75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2
2do. Cuatrimestre 2006

Integración numérica y resolución de problemas valores iniciales no lineales

Si un péndulo ideal es apartado de su posición de equilibrio y es soltado sin velocidad inicial adquiere un movimiento que puede ser descrito mediante el ángulo ϕ que forma la varilla del péndulo con la vertical del punto de sujeción. La evolución temporal de ϕ se obtiene integrando el siguiente problema no-lineal de valor inicial

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\phi = 0 \quad \text{con} \quad \phi_{(0)} = A \quad \text{y} \quad \left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{(0)} = 0 \qquad (1)$$

donde g =9.8 m/s^2, L=1 es la longitud del péndulo en metros y A la amplitud angular. Dicho movimiento es periódico pudiendo calcularse su periodo (T) mediante la integral definida[1] :

$$T = 4\sqrt{L/g}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\Big/\sqrt{1 - sen^2(A/2)\ sen^2\varphi}\ d\varphi \quad si \quad 0 \le A < \pi \qquad (2)$$

Cuando *A* es pequeña se puede utilizar la siguiente aproximación lineal

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\phi = 0 \ \text{donde} \ T = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad (3)$$

para la cual se conocen las condiciones en las cuales el método de Taylor es conservativo y estable.

Se pide:

1) Integrar numéricamente la formula (2) usando cualquiera de los métodos vistos en el curso a los efectos de obtener T para los siguientes valores de *A*: 3, 1.5 y 0.03. Se pide que el alumno presente el cálculo, muestre numéricamente que el resultado obtenido cumple con una precisión del uno por mil y que explique el criterio utilizado en la elección del método empleado. Aquel alumno que pueda obtener una cota del error cometido empleando la teoría vista en el curso tendrá un puntaje adicional. Para esta parte del práctico si bien no es necesario escribir un programa de computadora se recomienda el uso de la misma (por ejemplo mediante una planilla de cálculo). Se aclara que no se considerará resuelta esta parte del práctico si se utilizan funciones de integración numérica provistas por software (por ejemplo: Matlab, Mathcad, Maple, etc.)
2) Aplicar el método de Taylor e integrar el problema (1) a lo largo de tres periodos para cada una de las amplitudes indicadas en el punto anterior. A los efectos de analizar el error de discretización se deberá repetir el calculo tomando en cada caso un paso de calculo (k) igual a 1/5, 1/10, 1/20 y 1/30 del periodo correspondiente. Para cada A graficar amplitudes y velocidades superponiendo las curvas obtenidas con los distintos pasos de tiempo. Analizar las dificultades que surgen para altas amplitudes debido a la no-linealidad del problema.

Método de Taylor

Para y" = f(t,y',y) con y(t0)=y0 e y'(t0)=y'0 usando las variables discretas (u,v) para (y, y') respectivamente resulta

$$u_{n+1} = u_n + k\, v_n + k^2/2\ f(t,v_n , u_n)$$
$$v_{n+1} = v_n + k/2\ (\ f(t, v_n , u_n) + f(t, v_{n+1} , u_{n+1})\ )$$

[1] Brauer and Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations,* 1969, Dover Publications, New York