

Planilla

INDICE

Indice	2
Introducción	3
Objetivos	3
Desarrollo	4
Gráficos	8
Gráfico 1.....	8
Gráfico 2.....	9
Conclusiones	10
Apéndice I	11
Deducción de cota de error relativo.....	11
Aproximación de $K(H)$	13
Apéndice II	14
Apéndice III.....	21
Apéndice IV	28

INTRODUCCIÓN

El cálculo a través de computadoras, introduce errores de redondeo, ya que en éstas es imposible representar números fraccionarios de forma exacta, teniendo que truncarlos para acoplarlos al tamaño de registros de la computadora. De esta forma, al realizar operaciones matemáticas, se pierde precisión, y si éstas operaciones buscan resolver sistemas de ecuaciones lineales, estos errores se propagan y crecen en función de la cantidad de ecuaciones, y de la condición del sistema.

En ingeniería se aproximan los problemas mediante modelos matemáticos, que se expresan en forma de sistemas de ecuaciones. Una característica principal de los modelos, es su condición.

OBJETIVOS

Con la realización de este Trabajo Práctico, intentaremos evidenciar cuán importante es la condición del sistema y la cantidad de variables de las cuales depende, a la hora de evaluar los resultados que se obtienen. Para su realización, se utilizó una matriz de Hilbert, que es un sistema que se sabe está mal condicionado, por lo que se esperan grandes errores. Para ver, además, la relación del error con la dimensión de la matriz, haremos la experiencia con matrices de distintos tamaños.

De esta forma, al aumentar la dimensión de las matrices, esperamos ver cómo se llega a soluciones con valor ingenieril nulo, en las cuales el error es mayor que la solución. La solución que se encuentra a esta limitación es trabajar con mayor precisión en los cálculos, aumentando la unidad de máquina, aunque esto hace que los problemas requieran computadoras mas potentes, lo que se traduce en mayores gastos económicos. Otra forma es buscar modelos mejor condicionados, cosa que no es siempre posible.

DESARROLLO

Para observar el efecto del error de redondeo, se procedió a calcular, mediante descomposición LU Doolittle, la inversa de una matriz. Se prefirió tomar una matriz mal condicionada, para no tener que resolver grandes sistemas de ecuaciones, y, además, se eligió una que fuera simétrica definida positiva, para no tener que programar ningún tipo de pivoteo.

En el lenguaje Pascal escribimos un programa, *ver apéndice III*, que nos permite hacer la descomposición LU Doolittle de una matriz, y luego, a partir de eso, sacar la inversa de la matriz de Hilbert. Teniendo en cuenta que:

$$H * H^{-1} = I$$

Si

$$H = L * U$$

entonces

$$L * U * H^{-1} = I.$$

A esta ecuación la podemos re-escribir de la forma

$$L * U * \text{col}_i(H^{-1}) = \text{col}_i(I),$$

y de esta forma obtener las n columnas de la matriz inversa.

Está demostrado que hecha la descomposición LU de una matriz, el cálculo de la ecuación

$$A * x = b$$

para obtener el valor del vector x , conlleva a un error de redondeo acotado por la siguiente ecuación

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq K(A) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{\max_{i,j} |a_{ij}^{(kk)}|}{\|A\|} \cdot u$$

En el *apéndice I* se demuestra que en el cálculo de la matriz inversa la cota del error de redondeo es:

$$\frac{\|\delta H^{-1}\|}{\|H^{-1}\|} \leq K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{1}{\|H\|} \cdot u \cdot \frac{n \cdot \max_z \|col_z(H^{-1})\|}{\|H^{-1}\|}$$

La condición de una matriz está dada por:

$$K(H) \equiv \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$$

Graficando $K(H)$ en escala logarítmica, vemos que se puede aproximar mediante una recta, de donde se deduce que $K(H)$ tiene dependencia exponencial respecto de n , y se puede aproximar mediante:

$$K(H) \cong \alpha 10^{\beta \cdot n}, \text{ ver apéndice I}$$

Con esta aproximación se puede proceder a describir la fórmula de cota del error relativo, tomando logaritmo decimal en ambos miembros y reordenando:

$$\log \frac{\|\delta H^{-1}\|}{\|H^{-1}\|} \leq \log(K(H)) + \log(u) + \log \left[(1,01)(n^3 + 3n^2) \cdot \frac{1}{\|H\|} \frac{n \cdot \max_z \|col_z(H^{-1})\|}{\|H^{-1}\|} \right]$$

Teniendo en cuenta que $K(H) \cong \alpha 10^{\beta \cdot n}$ y $u = 0.5 \cdot 10^{1-t}$, obtenemos

$$\log \frac{\|\delta H^{-1}\|}{\|H^{-1}\|} \leq \beta n + (1-t) + \log(0.5) + \log \alpha + \log \left[(1,01)(n^3 + 3n^2) \cdot \frac{1}{\|H\|} \frac{n \cdot \max_z \|col_z(H^{-1})\|}{\|H^{-1}\|} \right]$$

En esta fórmula se demuestra el peso que tiene el mal condicionamiento de la matriz y la precisión con la que se trabaje. En ésta se observa además que la pendiente del logaritmo del error está dada aproximadamente por β , y el resto de valores, excepto t , se pueden considerar constantes respecto de n . Al mejorar la precisión, modificar t , se reduce el error, lo que se observa como un desplazamiento vertical del gráfico del error en escala logarítmica. Ver gráfico 1.

Ejecutando el programa, se obtienen los resultados de la inversa de la matriz, y, como el resultado exacto es dato, se obtienen los errores relativos, absolutos, las normas de las distintas matrices, etc. A continuación se pueden apreciar estos resultados para el calculo de la inversa de la matriz de Hilbert de grado cuatro, en simple y doble precisión, así como el dato exacto, el error relativo, y el logaritmo decimal de este error relativo.

Para la matriz de Hilbert de dimensión 4 en simple precisión

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,1599978828E+02	-,1199979553E+03	,2399956055E+03	-,1399970703E+03
-,1199980011E+03	,1199981201E+04	-,2699958740E+04	,1679974121E+04
,2399955902E+03	-,2699958984E+04	,6479909668E+04	-,4199944336E+04
-,1399972839E+03	,1679974854E+04	-,4199944824E+04	,2799966064E+04

La matriz inversa de H exacta es:

,1600000000E+02	,1200000000E+03	,2400000000E+03	,1400000000E+03
-,1200000000E+03	,1200000000E+04	-,2700000000E+04	,1680000000E+04
,2400000000E+03	-,2700000000E+04	,6480000000E+04	-,4200000000E+04
-,1400000000E+03	,1680000000E+04	-,4200000000E+04	,2800000000E+04

Si definimos E_r como:

$$E_r = \frac{\|H^{-1} - H_{lu}^{-1}\|}{\|H^{-1}\|}$$

entonces, para $n=4$,

$$E_r=0,00001405444254, \quad \log_{10}(E_r)=-4,8521863757$$

Para la matriz de Hilbert de dimensión 4 en doble precisión:

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,1599999999999996E+02	-,1199999999999994E+03	,2399999999999985E+03	-,1399999999999990E+03
-,1199999999999994E+03	,1199999999999993E+04	-,2699999999999982E+04	,1679999999999988E+04
,2399999999999987E+03	-,2699999999999983E+04	,6479999999999957E+04	-,4199999999999971E+04
-,1399999999999991E+03	,1679999999999988E+04	-,4199999999999971E+04	,2799999999999981E+04

$$E_r=,652238582934440E-13$$

$$\log_{10}(E_r)= -13,18559351$$

Y así con todas las matrices, que se pueden observar en el *apéndice II*, llegando a los siguientes errores :

n	Error Relativo simple precisión	Log (error Relativo)	Error Relativo doble precisión	Log (error Relativo)
4	,1405444254E-04	-4,8521863757	,652238582934440E-13	-13,18559351
5	,4526298435E-03	-3,3442568149	,144241550780778E-12	-12,84090962
6	,1652125642E-01	-1,7819569282	,493674262518018E-10	-10,30655951
7	,3481303453E+00	-0,4582581191	,682372564619315E-09	-9,16597844
8	,9086277485E+00	-0,0416140044	,674005982641018E-07	-7,17133625

La representación grafica del error relativo en función de la dimensión de la matriz, en escala logarítmica, se puede ver en el *grafico 1*.

n	Cota del error relativo en simple precisión	Log ₁₀ (Cota del error relativo en simple precisión)	Cota del error relativo en doble precisión	Log ₁₀ (Cota del error relativo en doble precisión)
4	0,146601476	-0,833861656	1,466035200000E-09	-8,833855602
5	9,0455024	0,956432693	9,049599999999E-08	-7,043370617
6	425,8425006	2,629249003	4,329385200214E-06	-5,363573772
7	15066,89753	4,178023835	2,310731405330E-04	-3,636250533
8	112585,0224	5,051480619	1,208751335745E-02	-1,917663033

Si aplicamos la aproximación anterior, para acotar el error relativo, tenemos:

Con los datos de las ultimas tablas, procedemos a graficar los logaritmos para poder apreciar la dependencia del error respecto de n, ver *gráfico 1*. Como observamos, la aproximación es cierta, y realmente

aporta una cota para el error relativo. Esto es importante si tenemos en cuenta que no es siempre posible obtener los resultados exactos para sacar las diferencias. La fórmula para calcular el error relativo utiliza únicamente los datos obtenidos mediante el programa, y la matriz, que es dato; de esta forma, la fórmula es siempre aplicable, cualquiera sea el problema. Cabe aclarar, que si en vez de usar los valores de H^{-1} calculados, usáramos los reales, el valor de la cota no se modificaría.

GRÁFICOS

GRÁFICO 1

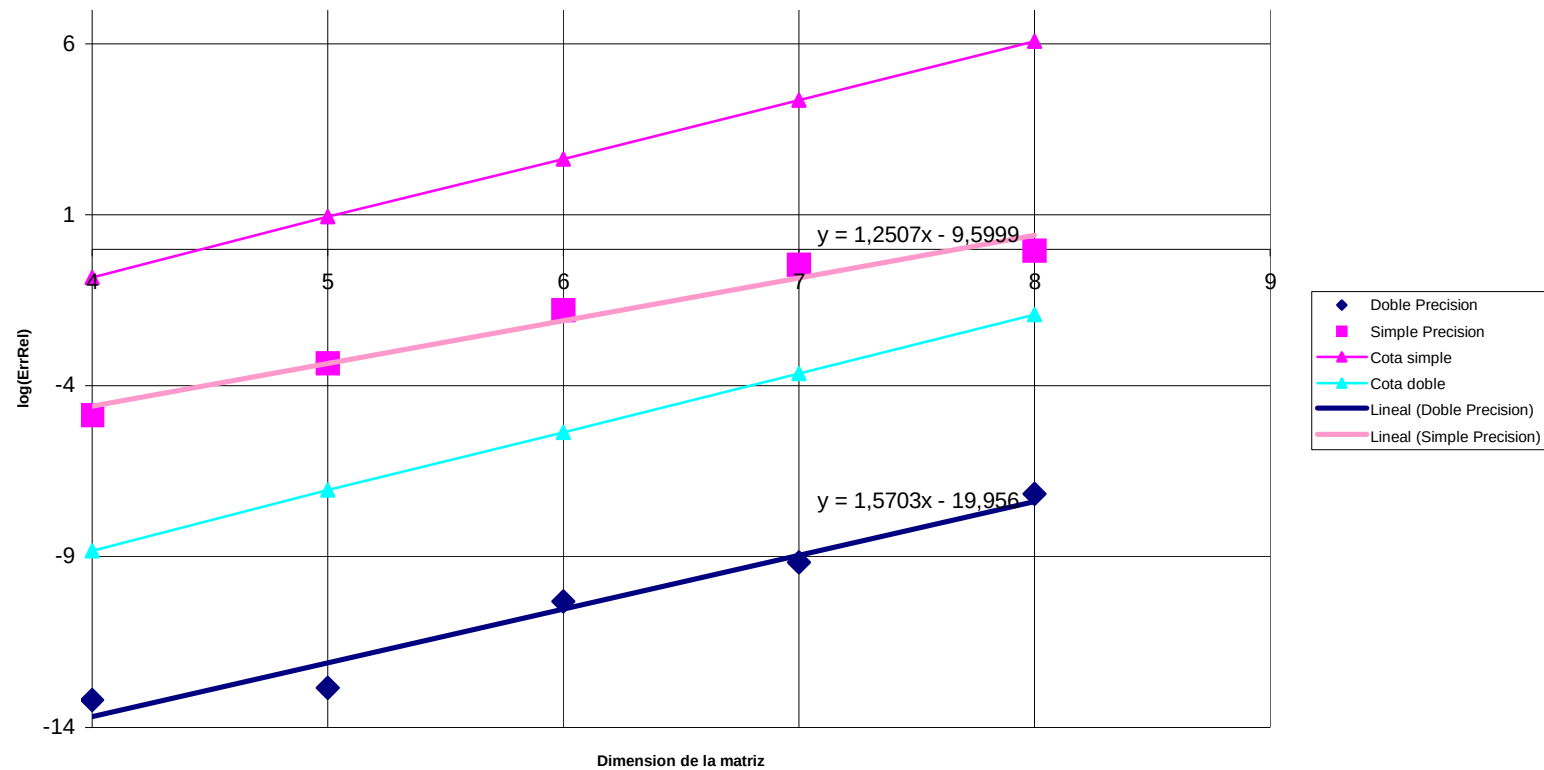
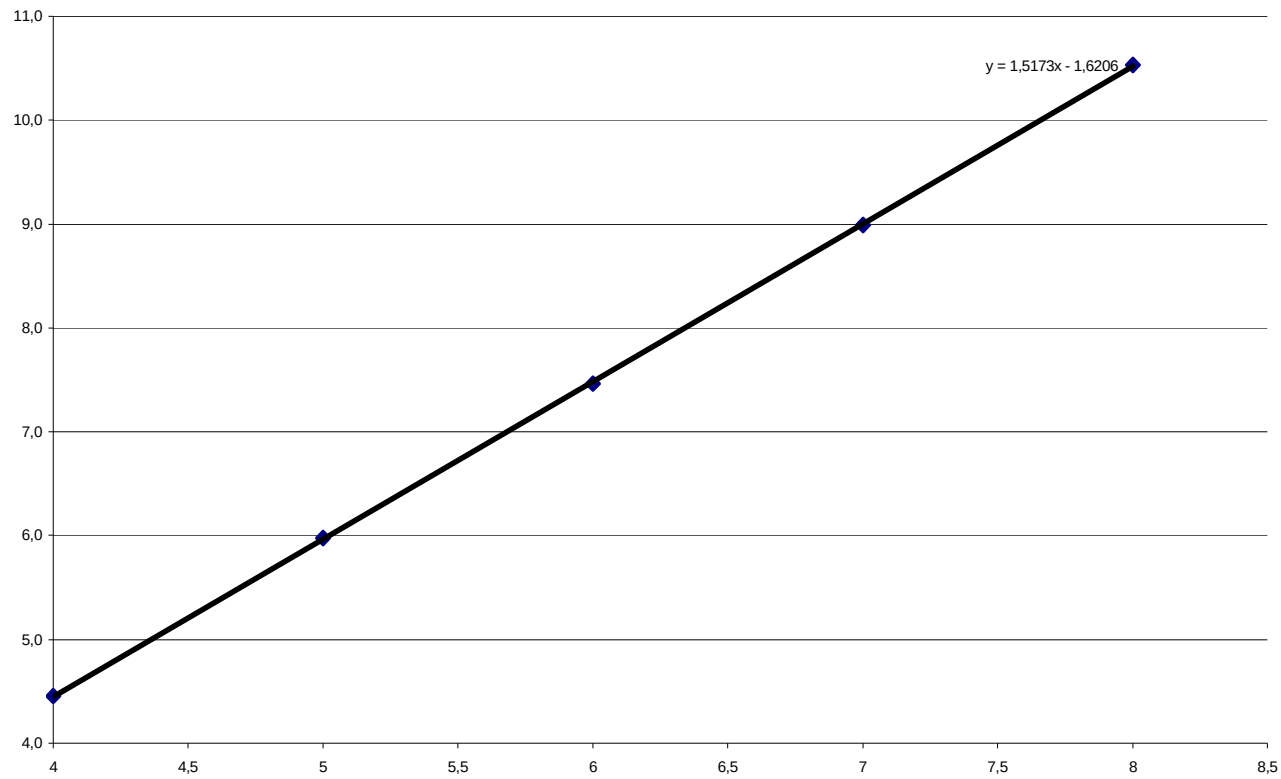


GRÁFICO 2



CONCLUSIONES

Habiendo realizado los cálculos pertinentes, y viendo los gráficos, podemos concluir que es muy importante la condición de una matriz. En este caso, una matriz mal condicionada, hace que el método dé un resultado totalmente sin sentido al calcular la inversa de una matriz de grado 8 (cuando los problemas a resolver en ingeniería son de grados muy superiores). Esto lleva a la necesidad de aumentar la precisión o cambiar de método. Ambas soluciones elevan el costo del resultado buscado, ya sea en mayores tiempos de proceso, como en mayor tiempo buscando y programando distintos métodos. También se puede observar la magnitud de los errores al trabajar con la matriz de Hilbert, y su dependencia con el rango de la matriz. También se observa que la magnitud del error está fuertemente ligada a la precisión de trabajo.

APENDICE I

DEDUCCIÓN DE COTA DE ERROR RELATIVO

Nuestro sistema de ecuaciones es:

$$H \bullet H^{-1} = I$$

que es lo mismo que resolver n sistemas de ecuaciones (n dimensión de la matriz H) de la forma:

$$H \bullet x_z = b_z$$

Donde x_z es un vector igual a la columna z de la matriz H y b_z es un vector igual a la columna z de la matriz I .

Para el sistema de ecuaciones $H \bullet x = b$ se sabe que la cota de error relativo de x es:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq K(H) \bullet 1,01 \bullet (n^3 + 3n^2) \bullet \frac{\max_{i,j} |h_{ij}^{(k)}|}{\|H\|} \bullet u$$

Si llamamos W a $(H_{real}^{-1} - H_{calculada}^{-1})$, tenemos que $\|\delta x_z\|$ es valor máximo de la columna z de la matriz W . Si sumamos todos los $\|\delta x_z\|$

$$\sum_{z=1}^n \|\delta x_z\|$$

Se ve claramente que $\|\delta H^{-1}\| = \|W\| = \|(H_{real}^{-1} - H_{calculada}^{-1})\|$

$$\|\delta H^{-1}\| \leq \sum_{z=1}^n \|\delta x_z\| \quad (1)$$

Esta desigualdad es porque como máximo lo que puede pasar es que los valores mas grandes de cada columna se encuentren en la misma fila.

$$\frac{\|\delta x_z\|}{\|x_z + \delta x_z\|} \leq K(H) \bullet 1,01 \bullet (n^3 + 3n^2) \bullet \frac{\max_{i,j} |h_{ij}^{(k)}|}{\|H\|} \bullet u \Rightarrow$$

$$\|\delta x_z\| \leq K(H) \bullet 1,01 \bullet (n^3 + 3n^2) \bullet \frac{\max_{i,j} |h_{ij}^{(k)}|}{\|H\|} \bullet u \bullet \|x_z + \delta x_z\| \Rightarrow$$

$$\sum_{z=1}^n \|\delta x_z\| \leq \sum_{z=1}^n K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{\max_{i,j} |h_{ij}^{(k)}|}{\|H\|} \cdot u \cdot \|x_z + \delta x_z\|$$

Si a esta desigualdad la relacionamos con (1) se tiene:

$$\|\delta H^{-1}\| \leq \sum_{z=1}^n \|\delta x_z\| \leq \sum_{z=1}^n K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{\max_{i,j} |h_{ij}^{(k)}|}{\|H\|} \cdot u \cdot \|x_z + \delta x_z\|$$

Por lo tanto

$$\|\delta H^{-1}\| \leq \sum_{z=1}^n K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{\max_{i,j} |h_{ij}^{(k)}|}{\|H\|} \cdot u \cdot \|x_z + \delta x_z\|$$

Si dividimos ambos miembros por $\|H^{-1}\|$ para encontrar la cota el error relativo y remplazamos $\|x_z + \delta x_z\|$ por $\|col_z(H^{-1})\|$ que es lo mismo, se obtiene:

$$\frac{\|\delta H^{-1}\|}{\|H^{-1}\|} \leq \sum_{z=1}^n \left(K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{\max_{i,j} |h_{ij}|}{\|H\|} \cdot u \cdot \frac{\|col_z(H^{-1})\|}{\|H^{-1}\|} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\|\delta H^{-1}\|}{\|H^{-1}\|} \leq K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{\max_{i,j} |h_{ij}|}{\|H\|} \cdot u \cdot \frac{\sum_{z=1}^n \|col_z(H^{-1})\|}{\|H^{-1}\|}$$

Como $\sum_{z=1}^n \|col_z(H^{-1})\| \leq n \cdot \max_z \|col_z(H^{-1})\|$ esto se puede hacer porque la norma de las columnas de $col_z(H^{-1})$ son del mismo orden.

También se sabe que $\max_{i,j} |h_{ij}| = 1$

Por lo tanto se llega a la siguiente expresión para la cota del error relativo:

$$\frac{\|\delta H^{-1}\|}{\|H^{-1}\|} \leq K(H) \cdot 1,01 \cdot (n^3 + 3n^2) \cdot \frac{1}{\|H\|} \cdot u \cdot \frac{n \cdot \max_z \|col_z(H^{-1})\|}{\|H^{-1}\|}$$

APROXIMACIÓN DE $K(H)$

$$K(H) = \|H\| \cdot \|H^{-1}\|$$

n	K(A)	Log ₁₀ K(H)
4	2,837500216E+04	4,5
5	9,436560854E+05	6,0
6	2,907028239E+07	7,5
7	9,851949435E+08	9,0
8	3,387279422E+10	10,5

En el *gráfico 2* se observa que, “ $y = 1,5173x - 1,6206$ ” es la recta que mejor aproxima estos datos, de allí se obtiene α y β , mediante:

$$\log_{10}(K(H)) = b + m \cdot x$$

Entonces, $K(H) = \alpha 10^{\beta \cdot n}$ donde:

$$\log_{10} \alpha = b$$

$$\beta = m ; n = x$$

Entonces:

$$K(H) = 0,023955 \cdot 10^{1,5173 \cdot n}$$

APÉNDICE II

Para la matriz de Hilbert de dimensión 5 en simple precisión

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,2499462128E+02	-,2998994141E+03	,1049562378E+04	-,1399334839E+04	,6296713257E+03
-,2999016418E+03	,4798144531E+04	-,1889188867E+05	,2686763086E+05	-,1259389551E+05
,1049577026E+04	-,1889199023E+05	,7934494531E+05	-,1175464766E+06	,5667358594E+05
-,1399360962E+04	,2686787305E+05	-,1175468906E+06	,1791188594E+06	-,8815995312E+05
,6296870728E+03	-,1259405371E+05	,5667394531E+05	-,8816017969E+05	,4408034375E+05

La matriz inversa de H exacta es:

,2500000000E+02	-,3000000000E+03	,1050000000E+04	-,1400000000E+04	,6300000000E+03
-,3000000000E+03	,4800000000E+04	-,1890000000E+05	,2688000000E+05	-,1260000000E+05
,1050000000E+04	-,1890000000E+05	,7938000000E+05	-,1176000000E+06	,5670000000E+05
-,1400000000E+04	,2688000000E+05	-,1176000000E+06	,1792000000E+06	-,8820000000E+05
,6300000000E+03	-,1260000000E+05	,5670000000E+05	-,8820000000E+05	,4410000000E+05

Para la matriz de Hilbert de dimensión 6 en simple precisión

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,3573550797E+02	-,6225541382E+03	,3310000244E+04	-,7430747070E+04	,7417873047E+04	-,2716183105E+04
-,6226739502E+03	,1449414160E+05	-,8682067188E+05	,2081162344E+06	-,2165851406E+06	,8162319531E+05
,3311354736E+04	-,8683521094E+05	,5553456875E+06	-,1387616750E+07	,1486110500E+07	-,5719610625E+06
-,7435101563E+04	,2081799844E+06	-,1387794000E+07	,3568405500E+07	-,3902729750E+07	,1526324625E+07
,7423451172E+04	-,2166770156E+06	,1486450250E+07	-,3903104750E+07	,4337718500E+07	-,1718014375E+07
-,2718590088E+04	,8166576563E+05	-,5721387500E+06	,1526586875E+07	-,1718140625E+07	,6874800000E+06

La matriz inversa de H exacta es:

,3600000000E+02	-,6300000000E+03	,3360000000E+04	-,7560000000E+04	,7560000000E+04	-,2772000000E+04
-,6300000000E+03	,1470000000E+05	-,8820000000E+05	,2116800000E+06	-,2205000000E+06	,8316000000E+05
,3360000000E+04	-,8820000000E+05	,5644800000E+06	-,1411200000E+07	,1512000000E+07	-,5821200000E+06
-,7560000000E+04	,2116800000E+06	-,1411200000E+07	,3628800000E+07	-,3969000000E+07	,1552320000E+07
,7560000000E+04	-,2205000000E+06	,1512000000E+07	-,3969000000E+07	,4410000000E+07	-,1746360000E+07
-,2772000000E+04	,8316000000E+05	-,5821200000E+06	,1552320000E+07	-,1746360000E+07	,6985440000E+06

Para la matriz de Hilbert de dimensión 7 en simple precisión

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,4244279099E+02	-,9158461914E+03	,6316323242E+04	-,1966030859E+05	,3063130664E+05	-,2333700195E+05	,6923899414E+04
-,9197445679E+03	,2748422461E+05	-,2199803750E+06	,7498108750E+06	-,1244791500E+07	,9949213125E+06	-,3066745938E+06
,6378983887E+04	-,2209742031E+06	,1930385875E+07	-,6981313500E+07	,1210361500E+08	-,1000287000E+08	,3166790250E+07
-,1997355273E+05	,7564521875E+06	-,7008052500E+07	,2643176200E+08	-,4730007200E+08	,4007366400E+08	-,1294374500E+08
,3130173047E+05	-,1260809125E+07	,1218969400E+08	-,4744417600E+08	,8698379200E+08	-,7512773600E+08	,2465012200E+08
-,2397998828E+05	,1011368875E+07	-,1010238700E+08	,4029588000E+08	-,7530682400E+08	,6605204800E+08	-,2194865400E+08
,7152658691E+04	-,3127663125E+06	,3206120750E+07	-,1304258100E+08	,2475635600E+08	-,2198963800E+08	,7383862000E+07

La matriz inversa de H exacta es:

,4900000000E+02	-,1176000000E+04	,8820000000E+04	-,2940000000E+05	,4851000000E+05	-,3880800000E+05	,1201200000E+05
-,1176000000E+04	,3763200000E+05	-,3175200000E+06	,1128960000E+07	-,1940400000E+07	,1596672000E+07	-,5045040000E+06
,8820000000E+04	-,3175200000E+06	,2857680000E+07	-,1058400000E+08	,1871100000E+08	-,1571724000E+08	,5045040000E+07
-,2940000000E+05	,1128960000E+07	-,1058400000E+08	,4032000000E+08	-,7276500000E+08	,6209280000E+08	-,2018016000E+08
,4851000000E+05	-,1940400000E+07	,1871100000E+08	-,7276500000E+08	,1334024960E+09	-,1152597600E+09	,3783780000E+08
-,3880800000E+05	,1596672000E+07	-,1571724000E+08	,6209280000E+08	-,1152597600E+09	,1005903360E+09	-,3329726400E+08
,1201200000E+05	-,5045040000E+06	,5045040000E+07	-,2018016000E+08	,3783780000E+08	-,3329726400E+08	,1109908800E+08

Para la matriz de Hilbert de dimensión 8 en simple precisión

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,4454449463E+02	-,9519804687E+03	,6071500000E+04	-,1536237500E+05	,1267850000E+05	,9475000000E+04	-,2084300000E+05	,8895250000E+04
-,9689208374E+03	,2832982422E+05	-,2142455313E+06	,6492540625E+06	-,8247694375E+06	,2273469688E+06	,3428619063E+06	-,2080839688E+06
,6434507324E+04	-,2219289219E+06	,1923910250E+07	-,6867794500E+07	,1162940000E+08	-,9136231000E+07	,2433453000E+07	,2349431875E+06
-,1787105078E+05	,7202981250E+06	-,7253284500E+07	,3073150000E+08	-,6525784000E+08	,7289047200E+08	-,4071406400E+08	,8896415000E+07
,2053012891E+05	-,1075583750E+07	,1344607700E+08	-,6947258400E+08	,1789853440E+09	-,2432557280E+09	,1669236480E+09	-,4557843600E+08
-,2850770264E+04	,6480368750E+06	-,1256686800E+08	,8350604800E+08	-,2557739680E+09	,3958463040E+09	-,3010276800E+09	,8940517600E+08
-,1137257520E+05	,5788322754E+04	,5366877500E+07	-,5092748400E+08	,1829825600E+09	-,3111397440E+09	,2520689440E+09	-,7838680800E+08
,6060791504E+04	-,1042196406E+06	-,7069220625E+06	,1239458000E+08	-,5176593200E+08	,9459953600E+08	-,8005217600E+08	,2564535000E+08

La matriz inversa de H exacta es:

,6400000000E+02	-,2016000000E+04	,2016000000E+05	-,9240000000E+05	,2217600000E+06	-,2882880000E+06	,1921920000E+06	-,5148000000E+05
-,2016000000E+04	,8467200000E+05	-,9525600000E+06	,4656960000E+07	-,1164240000E+08	,1556755200E+08	-,1059458400E+08	,2882880000E+07
,2016000000E+05	-,9525600000E+06	,1143072000E+08	-,5821200000E+08	,1496880000E+09	-,2043241280E+09	,1412611200E+09	-,3891888000E+08
-,9240000000E+05	,4656960000E+07	-,5821200000E+08	,3049200000E+09	-,8004149760E+09	,1109908736E+10	-,7769361920E+09	,2162160000E+09
,2217600000E+06	-,1164240000E+08	,1496880000E+09	-,8004149760E+09	,2134439936E+10	-,2996753664E+10	,2118916864E+10	-,5945939840E+09
-,2882880000E+06	,1556755200E+08	-,2043241280E+09	,1109908736E+10	-,2996753664E+10	,4249941760E+10	-,3030051072E+10	,8562153600E+09
,1921920000E+06	-,1059458400E+08	,1412611200E+09	-,7769361920E+09	,2118916864E+10	-,3030051072E+10	,2175421184E+10	-,6183777280E+09
-,5148000000E+05	,2882880000E+07	-,3891888000E+08	,2162160000E+09	-,5945939840E+09	,8562153600E+09	-,6183777280E+09	,1766793600E+09

Para la matriz de Hilbert de dimensión 5 en doble precisión:

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,24999999999927E+02	-,29999999999882E+03	,10499999999954E+04	-,13999999999937E+04	,62999999999716E+03
-,29999999999890E+03	,47999999999836E+04	-,18899999999941E+05	,26879999999923E+05	-,12599999999966E+05
,10499999999960E+04	-,18899999999944E+05	,79379999999814E+05	-,11759999999977E+06	,56699999999910E+05
-,13999999999947E+04	,26879999999932E+05	-,11759999999979E+06	,17919999999976E+06	-,88199999999918E+05
,62999999999770E+03	-,12599999999972E+05	,56699999999922E+05	-,88199999999925E+05	,44099999999979E+05

Para la matriz de Hilbert de dimensión 6 en doble precisión:

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,36000000006056E+02	-,630000000017909E+03	,336000000012334E+04	-,756000000032435E+04	,756000000036060E+04	-,277200000014281E+04
-,630000000018128E+03	,147000000005346E+05	-,882000000036778E+05	,211680000009661E+06	-,220500000010732E+06	,831600000042480E+05
,336000000012573E+04	-,882000000037028E+05	,564480000025447E+06	-,141120000006680E+07	,151200000007418E+07	-,582120000029351E+06
-,756000000033207E+04	,211680000009769E+06	-,141120000006710E+07	,362880000017608E+07	-,396900000019547E+07	,155232000007732E+07
,756000000037030E+04	-,220500000010886E+06	,151200000007474E+07	-,396900000019607E+07	,441000000021762E+07	-,174636000008607E+07
-,277200000014698E+04	,831600000043187E+05	-,582120000029640E+06	,155232000007774E+07	-,174636000008627E+07	,698544000034118E+06

Para la matriz de Hilbert de dimensión 7 en doble precisión:

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,490000000153763E+02	-,117600000058917E+04	,882000000549602E+04	-,294000000208190E+05	,485100000373710E+05	-,388080000317272E+05
-,117600000059698E+04	,376320000227842E+05	-,317520000211887E+06	,112896000080071E+07	-,194040000143433E+07	,159667200121569E+07
,882000000562332E+04	-,317520000213978E+06	,285768000198532E+07	-,105840000074886E+08	,187110000133936E+08	-,157172400113372E+08
-,294000000214672E+05	,112896000081495E+07	-,105840000075474E+08	,403200000284270E+08	-,727650000507796E+08	,620928000429387E+08
,485100000387729E+05	-,194040000146913E+07	,187110000135855E+08	-,727650000511073E+08	,133402500091201E+09	-,115259760077053E+09
-,388080000330904E+05	,159667200125183E+07	-,157172400115617E+08	,620928000434501E+08	-,115259760077472E+09	,100590336065406E+09
,120120000107517E+05	-,504504000406204E+06	,504504000374769E+07	-,201801600140721E+08	,378378000250726E+08	-,332972640211549E+08

,120120000102631E+05
-,504504000392700E+06
,504504000365813E+07
-,201801600138423E+08
,378378000248217E+08
-,332972640210569E+08
,110990880068070E+08

Para la matriz de Hilbert de dimensión 8 en doble precisión:

La matriz inversa de H calculada con el programa es:

,639999989269135E+02	-,201599993970466E+04	,201599991861442E+05	-,923999954853877E+05	,221759987609639E+06	-,288287982196033E+06
-,201599994006121E+04	,846719966366798E+05	-,952559954644517E+06	,465695974857459E+07	-,116423993103178E+08	,155675510093740E+08
,201599991942510E+05	-,952559954829762E+06	,114307193912564E+08	-,582119966270516E+08	,149687990751012E+09	-,204324106718942E+09
-,923999955437096E+05	,465695975035291E+07	-,582119966371876E+08	,304919981373658E+09	-,800414948938052E+09	,110990872669301E+10
,221759987797679E+06	-,116423993167719E+08	,149687990800087E+09	-,800414949056001E+09	,213443986037134E+10	-,299675355957457E+10
-,288287982497797E+06	,155675510204332E+08	-,204324106813587E+09	,110990872699640E+10	-,299675355994211E+10	,424994140887000E+10
,192191987404561E+06	-,105945832952957E+08	,141261110515867E+09	-,776936107502259E+09	,211891665615494E+10	-,303005081757003E+10
-,514799964128582E+05	,288287979935898E+07	-,389188773002349E+08	,216215985058057E+09	-,594593959063188E+09	,856215301257239E+09

,192191987168625E+06	-,514799963411912E+05
-,105945832862825E+08	,288287979654292E+07
,141261110433562E+09	-,389188772734421E+08
-,776936107205386E+09	,216215984954954E+09
,211891665567531E+10	-,594593958875766E+09
-,303005081726145E+10	,856215301096440E+09
,217542109937938E+10	-,618377717658242E+09
-,618377717710718E+09	,176679347952554E+09

APÉNDICE III

Código fuente del programa:

Ver en el *Apéndice IV* los resultados obtenidos en los archivos de texto (“corridas”).

```

program TrabajoPractico;
{Grupo 5}
{Autores:
    Moundiroff, Nicolás
    Stegmann, Claus}

Uses
    crt;

Type
    numero=single;           {Tipo de variable real, con
                               simple o doble precision}
    matriz= array [1..10, 1..10] of numero;  {Matriz cuadrada de 10 elementos
                                               de lado}
    vector= array [1..10] of numero;         {Vector de 10 elementos}
    cad=string[40];

Var
    H,L,U,I:matriz;          {H contendra la matriz de Hilbert, y luego la
                               inversa exacta de la misma, L y U seran esas
                               matrices, de la descomposicion LU Doolittle
                               de H, Inv sera la inversa de la matriz H
                               calculada}

```

```
seguir:char;
n:integer;           {Dimension de la matriz}
ent,sal:text;        {Variable con la direccion del archivo donde
                      se encuentran las matrices inversas exactas}
Procedure Mostrar(mat:matriz; g:integer); {Procedimiento que imprime en
                      pantalla la matriz m, cuadrada, de
                      lado g}
```

```
var
    i,j:integer;           {Representan la posocion en la
                           matriz, i filas, j columnas}
```

Begin

```

for i:=1 to g do
  begin
    for j:=1 to g do
      write(mat[i,j]:4:6,' ');
    
```

```

        Writeln;
    end;
readln;

```

end;

```
Procedure CargaMatriz(var m:matriz; g:integer); {carga la matriz (m) de hilbert,
cuadrada, de lado g}
```

```
var i,j:integer; {Representan la posocion en la
                 matriz, i filas, j columnas}
```

Begin

```

        for i:=1 to g do
            begin
                for j:=1 to g do
                    m[i,j]:=1/(i+j-1);
                end;
            end;
end;
Procedure DescLU(Var m:matriz; g:integer);{Realiza la descomposicion LU Doolittle
de la matriz m, cuadrada, de lado g,
utilizando los ceros de la eliminacion
para guardar los componentes de la
matriz L}

var
    i,j,k:integer;      {Representan la posocion en la matriz,
                        i filas, j columnas, k auxiliar}
Begin
    For k:=1 to g do
        begin
            for i:=k+1 to g do
                begin
                    m[i,k]:=m[i,k]/m[k,k];
                    for j:=k+1 to g do
                        m[i,j]:=m[i,j]-m[i,k]*m[k,j];
                    end;
                end;
            end;
        end;
end;
Procedure ExtraerL(var m,n:matriz; g:integer);{Extrae, de la matriz
Descomposicion LU de la matriz H (m),
la matriz L (n), cuadradas de lado g}

var
    i,j:integer;      {Representan la posocion en la
                        matriz, i filas, j columnas}
Begin
    for i:=1 to g do
        begin
            n[i,i]:=1;
            for j:=1 to i-1 do
                n[i,j]:=m[i,j];
            end;
        end;
    end;
end;
Procedure ExtraerU(var m,n:matriz; g:integer);{Extrae, de la matriz
Descomposicion LU de H (m), la matriz U (n),
cuadradas, de lado g}

var
    i,j:integer;
Begin
    for i:=1 to g do
        begin
            for j:=i to g do
                n[i,j]:=m[i,j];
            end;
        end;
    end;
end;
Procedure SustitucionDir(var v,w:vector; m:matriz; g:integer);{Realiza la
sustitucion directa, m*v=w,calculando los
valores del vector v. La matriz es cuadrada,
de lado g, al igual que los vectores}

```

```

var
  i,j:integer;      {Representan la posocion en la matriz,
                    i filas, j columnas}

Begin

  for i:=1 to g do
    begin
      v[i]:=w[i]/m[i,i];
      for j:=1 to i-1 do
        v[i]:=v[i]-v[j]*m[i,j]/m[i,i];

      end;
    end;
end;

Procedure SustitucionInv(var v,w:vector; m:matriz; g:integer); {Realiza la
sustitucion inversa, m*v=w, calculando los
valores del vector v. La matriz es cuadrada,
de lado g, al igual que los vectores}

var
  i,j:integer;      {Posiciones dentro de la matriz y los
                    vectores}

Begin

  for i:=g downto 1 do
    Begin
      v[i]:=w[i]/m[i,i];
      for j:=i+1 to g do
        v[i]:=v[i]-v[j]*m[i,j]/m[i,i];

      end;
    end;
end;

Procedure GenerarCanónico(var v:vector; g,p:integer); {Genera un vector v,
canónico, de dimension g, con ceros en todas
las posiciones menos en p}

Var
  i:integer;        {Posicion dentro del vector}
begin
  for i:=1 to g do
    begin
      if i=p then
        v[i]:=1
      else
        v[i]:=0;
      end;
    end;
end;

Procedure HacerDescLU(var h,l,u:matriz; g:integer); {Realiza los pasos
necesarios para obtener la descomposicion LU
Doolittle de la matriz H, de dimension g}

Begin
  DescLU(h,g);      {Realiza la descomposicion}
  ExtraerL(h,l,g);   {Obtiene la matriz l(L) a partir de dicha
descomposicion}
  ExtraerU(h,u,g);   {Obtiene la matriz u(U) a partir de dicha
descomposicion}
end;

Procedure ObtenerInv(var l,u,inv:matriz;      {Obtiene la inversa (inv) de la}

```

```

        g:integer);      {matriz cuya descomposicion LU
                        son las matrices l u, cuadradas, de
                        dimension g}
Var
  i,j:integer;
  x,y,z:vector;      {Vectores auxiliares para el calculo de la
                      inversa}
Begin
  for j:=1 to g do
    begin
      GenerarCanónico(z,g,j); {Obtiene la columna (vector z)
                              j, de la matriz identidad de dimension g}
      SustitucionDir(y,z,l,g); {Obtiene el vector y (l*y=z),
                              tal que u*x=y}
      SustitucionInv(x,y,u,g); {Obtiene el vector x, que
                              corresponde a la j-esima columna de la
                              inversa de la matriz H}
      for i:=1 to g do
        inv[i,j]:=x[i];      {Introduce el vector x como
                              columna de la matriz inversa}
      end;
    end;
  end;
Procedure Preparar(entra,salida:cad;var ent,sal:text);
                        {Subprograma que prepara el archivo para
                        trabajar.}

Begin
  Assign(ent,entra);
  Assign(sal,salida);
  Reset(ent);      {Prepara el archivo}
  Reset(sal);
  append(sal);
end;

Procedure Carga(g:integer; var mat:matriz ; var entr:text);
                        {Subprograma que carga una matriz a partir
                        de un archivo de texto especificado por
                        el usuario}

var
  i,j:integer;      {Variables auxiliares para el recorrido de
                    la matriz}
Begin
  case g of
    5:
      for i:=1 to 4 do
        Readln(entr);

    6:
      for i:=1 to 9 do
        Readln(entr);

    7:
      for i:=1 to 15 do
        Readln(entr);

```



```

            8:
                for i:=1 to 22 do
                    Readln(entr);

                end;
                for i:=1 to g do
                    begin
                        for j:=1 to g do
                            Read(entr,mat[i,j]); {Carga de datos}
                        end;
                    end;
                Close(entr);
            end;
        Procedure GuardarMat(m:matriz;var sal:text; g:integer);
        Var

            i,j:integer;
        Begin

            for i:=1 to g do
                Begin
                    for j:=1 to g do
                        Write(sal,m[i,j],', ');
                    writeln(sal,',');
                end;
            end;

        Procedure Resta(var m,n:matriz; g:integer);
        var
            i,j:integer;
        Begin
            for i:=1 to g do
                begin
                    for j:=1 to g do
                        n[i,j]:=n[i,j]-m[i,j];
                    end;
                end;
            end;

        Function NormaInf(m:matriz; g:integer):numero;
        var
            suma,norma:numero;
            i,j:integer;
        Begin

            norma:=0;
            for i:=1 to g do
                Begin
                    suma:=0;
                    for j:=1 to g do
                        Begin

                            if m[i,j]<0 Then
                                suma:= suma - m[i,j]
                            Else
                                suma:=suma +m[i,j];
                            If suma > norma then
                                norma:= suma;
                            end;
                        End;
                    End;
                End;
            End;
        End;
    
```

```

        NormaInf:=norma;
    End;
    Procedure final(norma:numero;g:integer;var res:text; sali:cad);
        {Subprograma que guarda los resultados en
        el archivo de texto especificado por el
        usuario}
        Var
            sal:text;
        begin
            Assign(sal,sali);
            Reset(sal);
            Append(sal);    {Agrega el texto al archivo}

            write(sal,',');
            writeln(sal, norma,',');

            Close(sal);    {Cierre de los archivos de texto}
            Close(res);
        end;
    Procedure mnylm(norma:numero;g:integer;sali:cad);
        var
            meli:text;
        begin
            Assign (meli,sali);
            reset (meli);
            append (meli);
            write(meli,',');
            writeln(meli, norma,',');
            Close(meli);
        end;

    Procedure Firma;
        Begin
            GotoXY(36,1);
            Write('GRUPO 5');
            GotoXY(25,2);
            Write('ALUMNOS: Moundiroff, Stegmann.');
```

GotoXY(1,4);
 End;
 begin
 Repeat

 Clrscr;
 Firma;
 Write('Ingrese el grado de la matriz (1 a 10) ');
 Readln(n);
 CargaMatriz(H,n);
 Clrscr; {Limpieza de pantalla}
 Firma;
 Writeln('La matriz H es:');
 Mostrar(H,n);

 mnylm(NormaInf(H,n),n,'c:\normas1.csv'); {Guarda los valores separados por comas
 en un archivo de texto, para luego ser
 tratados como tablas}

```

HacerDescLU(H,L,U,n);
Clrscr;
Firma;
Writeln('la matriz L es:');
Mostrar(L,n);
Clrscr;
Firma;
Writeln('la matriz U es:');
Mostrar(U,n);
ObtenerInv(L,U,I,n);
Clrscr;
Firma;
Writeln('la inversa de H calculada es');
Mostrar(I,n);
Preparar('c:\matrices.txt','c:\result.txt',ent,sal);
        { Lee de un archivo de texto las matrices
          inversas exactas, para poder comparar con
          el resultado }
Writeln(sal,'La inversa de H calculada, de grado ',n,' es:.,');
        { Guarda en un archivo de texto, el valor
          calculado para la inversa de H }

GuardarMat(I,sal,n);
Carga(n,H,ent);

Writeln(sal);
Writeln('La inversa exacta de H es:');
Writeln(sal,'La inversa de H exacta, de grado ',n,' es:.,');
        { Guarda en un archivo de texto, el valor
          exacto para la inversa de H }

GuardarMat(H,sal,n);
mnylm(NormaInf(H,n),n,'c:\normas2.csv');
Mostrar(H,n);
Resta(H,I,n);

Write('El error relativo, (norma de (invH calculada menos invH real))/(norma ');
Writeln('InvH Real) es: ',(NormaInf(I,n))/(NormaInf(H,n)),'. ');
Readln;
Final((NormaInf(I,n))/(NormaInf(H,n)),n,sal,'c:\normas.txt');

Writeln('¿otra vez?');
Readln(seguir);
Until seguir='n'

end.
```

APÉNDICE IV

Luego de la corrida en simple precisión, los datos en los archivos de texto son:

-----<----->-----<----->-----

RESULT.TXT

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 4 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

1.599978828E+01, -1.199979553E+02, 2.399956055E+02, -1.399970703E+02, ,,
-1.199980011E+02, 1.199981201E+03, -2.699958740E+03, 1.679974121E+03, ,,
2.399955902E+02, -2.699958984E+03, 6.479909668E+03, -4.199944336E+03, ,,
-1.399972839E+02, 1.679974854E+03, -4.199944824E+03, 2.799966064E+03, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 4 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

1.600000000E+01, -1.200000000E+02, 2.400000000E+02, -1.400000000E+02, ,,
-1.200000000E+02, 1.200000000E+03, -2.700000000E+03, 1.680000000E+03, ,,
2.400000000E+02, -2.700000000E+03, 6.480000000E+03, -4.200000000E+03, ,,
-1.400000000E+02, 1.680000000E+03, -4.200000000E+03, 2.800000000E+03, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 5 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

2.499462128E+01, -2.998994141E+02, 1.049562378E+03, -1.399334839E+03, 6.296713257E+02, ,,
-2.999016418E+02, 4.798144531E+03, -1.889188867E+04, 2.686763086E+04, -1.259389551E+04, ,,
1.049577026E+03, -1.889199023E+04, 7.934494531E+04, -1.175464766E+05, 5.667358594E+04, ,,
-1.399360962E+03, 2.686787305E+04, -1.175468906E+05, 1.791188594E+05, -8.815995312E+04, ,,
6.296870728E+02, -1.259405371E+04, 5.667394531E+04, -8.816017969E+04, 4.408034375E+04, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 5 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

2.500000000E+01, -3.000000000E+02, 1.050000000E+03, -1.400000000E+03, 6.300000000E+02, ,,
-3.000000000E+02, 4.800000000E+03, -1.890000000E+04, 2.688000000E+04, -1.260000000E+04, ,,
1.050000000E+03, -1.890000000E+04, 7.938000000E+04, -1.176000000E+05, 5.670000000E+04, ,,
-1.400000000E+03, 2.688000000E+04, -1.176000000E+05, 1.792000000E+05, -8.820000000E+04, ,,
6.300000000E+02, -1.260000000E+04, 5.670000000E+04, -8.820000000E+04, 4.410000000E+04, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 6 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

3.573550797E+01, -6.225541382E+02, 3.310000244E+03, -7.430747070E+03, 7.417873047E+03, -
2.716183105E+03, ,,
-6.226739502E+02, 1.449414160E+04, -8.682067188E+04, 2.081162344E+05, -2.165851406E+05,
8.162319531E+04, ,,
3.311354736E+03, -8.683521094E+04, 5.553456875E+05, -1.387616750E+06, 1.486110500E+06, -
5.719610625E+05, ,,
-7.435101563E+03, 2.081799844E+05, -1.387794000E+06, 3.568405500E+06, -3.902729750E+06,
1.526324625E+06, ,,
7.423451172E+03, -2.166770156E+05, 1.486450250E+06, -3.903104750E+06, 4.337718500E+06, -
1.718014375E+06, ,,

-2.718590088E+03, 8.166576563E+04, -5.721387500E+05, 1.526586875E+06, -1.718140625E+06, 6.874800000E+05, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 6 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

3.600000000E+01, -6.300000000E+02, 3.360000000E+03, -7.560000000E+03, 7.560000000E+03, -2.772000000E+03, ,,
-6.300000000E+02, 1.470000000E+04, -8.820000000E+04, 2.116800000E+05, -2.205000000E+05, 8.316000000E+04, ,,
3.360000000E+03, -8.820000000E+04, 5.644800000E+05, -1.411200000E+06, 1.512000000E+06, -5.821200000E+05, ,,
-7.560000000E+03, 2.116800000E+05, -1.411200000E+06, 3.628800000E+06, -3.969000000E+06, 1.552320000E+06, ,,
7.560000000E+03, -2.205000000E+05, 1.512000000E+06, -3.969000000E+06, 4.410000000E+06, -1.746360000E+06, ,,
-2.772000000E+03, 8.316000000E+04, -5.821200000E+05, 1.552320000E+06, -1.746360000E+06, 6.985440000E+05, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 7 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

4.244279099E+01, -9.158461914E+02, 6.316323242E+03, -1.966030859E+04, 3.063130664E+04, -2.333700195E+04, 6.923899414E+03, ,,
-9.197445679E+02, 2.748422461E+04, -2.199803750E+05, 7.498108750E+05, -1.244791500E+06, 9.949213125E+05, -3.066745938E+05, ,,
6.378983887E+03, -2.209742031E+05, 1.930385875E+06, -6.981313500E+06, 1.210361500E+07, -1.000287000E+07, 3.166790250E+06, ,,
-1.997355273E+04, 7.564521875E+05, -7.008052500E+06, 2.643176200E+07, -4.730007200E+07, 4.007366400E+07, -1.294374500E+07, ,,
3.130173047E+04, -1.260809125E+06, 1.218969400E+07, -4.744417600E+07, 8.698379200E+07, -7.512773600E+07, 2.465012200E+07, ,,
-2.397998828E+04, 1.011368875E+06, -1.010238700E+07, 4.029588000E+07, -7.530682400E+07, 6.605204800E+07, -2.194865400E+07, ,,
7.152658691E+03, -3.127663125E+05, 3.206120750E+06, -1.304258100E+07, 2.475635600E+07, -2.198963800E+07, 7.383862000E+06, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 7 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

4.900000000E+01, -1.176000000E+03, 8.820000000E+03, -2.940000000E+04, 4.851000000E+04, -3.880800000E+04, 1.201200000E+04, ,,
-1.176000000E+03, 3.763200000E+04, -3.175200000E+05, 1.128960000E+06, -1.940400000E+06, 1.596672000E+06, -5.045040000E+05, ,,
8.820000000E+03, -3.175200000E+05, 2.857680000E+06, -1.058400000E+07, 1.871100000E+07, -1.571724000E+07, 5.045040000E+06, ,,
-2.940000000E+04, 1.128960000E+06, -1.058400000E+07, 4.032000000E+07, -7.276500000E+07, 6.209280000E+07, -2.018016000E+07, ,,
4.851000000E+04, -1.940400000E+06, 1.871100000E+07, -7.276500000E+07, 1.334024960E+08, -1.152597600E+08, 3.783780000E+07, ,,
-3.880800000E+04, 1.596672000E+06, -1.571724000E+07, 6.209280000E+07, -1.152597600E+08, 1.005903360E+08, -3.329726400E+07, ,,
1.201200000E+04, -5.045040000E+05, 5.045040000E+06, -2.018016000E+07, 3.783780000E+07, -3.329726400E+07, 1.109908800E+07, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 8 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

4.454449463E+01, -9.519804687E+02, 6.071500000E+03, -1.536237500E+04, 1.267850000E+04,
 9.475000000E+03, -2.084300000E+04, 8.895250000E+03, ,,
 -9.689208374E+02, 2.832982422E+04, -2.142455313E+05, 6.492540625E+05, -8.247694375E+05,
 2.273469688E+05, 3.428619063E+05, -2.080839688E+05, ,,
 6.434507324E+03, -2.219289219E+05, 1.923910250E+06, -6.867794500E+06, 1.162940000E+07, -
 9.136231000E+06, 2.433453000E+06, 2.349431875E+05, ,,
 -1.787105078E+04, 7.202981250E+05, -7.253284500E+06, 3.073150000E+07, -6.525784000E+07,
 7.289047200E+07, -4.071406400E+07, 8.896415000E+06, ,,
 2.053012891E+04, -1.075583750E+06, 1.344607700E+07, -6.947258400E+07, 1.789853440E+08, -
 2.432557280E+08, 1.669236480E+08, -4.557843600E+07, ,,
 -2.850770264E+03, 6.480368750E+05, -1.256686800E+07, 8.350604800E+07, -2.557739680E+08,
 3.958463040E+08, -3.010276800E+08, 8.940517600E+07, ,,
 -1.137257520E+04, 5.788322754E+03, 5.366877500E+06, -5.092748400E+07, 1.829825600E+08, -
 3.111397440E+08, 2.520689440E+08, -7.83868000E+07, ,,
 6.060791504E+03, -1.042196406E+05, -7.069220625E+05, 1.239458000E+07, -5.176593200E+07,
 9.459953600E+07, -8.005217600E+07, 2.564535000E+07, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 8 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

6.400000000E+01, -2.016000000E+03, 2.016000000E+04, -9.240000000E+04, 2.217600000E+05, -
 2.882880000E+05, 1.921920000E+05, -5.148000000E+04, ,,
 -2.016000000E+03, 8.467200000E+04, -9.525600000E+05, 4.656960000E+06, -1.164240000E+07,
 1.556755200E+07, -1.059458400E+07, 2.882880000E+06, ,,
 2.016000000E+04, -9.525600000E+05, 1.143072000E+07, -5.821200000E+07, 1.496880000E+08, -
 2.043241280E+08, 1.412611200E+08, -3.891888000E+07, ,,
 -9.240000000E+04, 4.656960000E+06, -5.821200000E+07, 3.049200000E+08, -8.004149760E+08,
 1.109908736E+09, -7.769361920E+08, 2.162160000E+08, ,,
 2.217600000E+05, -1.164240000E+07, 1.496880000E+08, -8.004149760E+08, 2.134439936E+09, -
 2.996753664E+09, 2.118916864E+09, -5.945939840E+08, ,,
 -2.882880000E+05, 1.556755200E+07, -2.043241280E+08, 1.109908736E+09, -2.996753664E+09,
 4.249941760E+09, -3.030051072E+09, 8.562153600E+08, ,,
 1.921920000E+05, -1.059458400E+07, 1.412611200E+08, -7.769361920E+08, 2.118916864E+09, -
 3.030051072E+09, 2.175421184E+09, -6.183777280E+08, ,,
 -5.148000000E+04, 2.882880000E+06, -3.891888000E+07, 2.162160000E+08, -5.945939840E+08,
 8.562153600E+08, -6.183777280E+08, 1.766793600E+08, ,,

----<-----<-----<-----<-----

NORMAS.TXT

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 1.405444254E-05,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 4.526298435E-04,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 1.652125642E-02,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 3.481303453E-01,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 9.086277485E-01,,

----<-----<-----<-----<-----

NORMAS1.TXT

Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.083333492E+00,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.283333540E+00,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.450000286E+00,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.592857361E+00,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.717857361E+00,,

-----<-----<-----<-----<-----

NORMAS2.TXT

Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 1.362000000E+04,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 4.132800000E+05,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 1.186542000E+07,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 3.799649600E+08,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 1.246305075E+10,,

-----<-----<-----<-----<-----<-----<-----<-----<-----

Luego de la corrida en doble precisión, los datos en los archivos de texto son:

-----<-----<-----<-----<-----

RESULT.TXT

Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
La inversa de H calculada, de grado 4 es:,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
1.59999999999961E+001, -1.19999999999947E+002, 2.399999999999859E+002, -1.39999999999907E+002,
",
-1.19999999999949E+002, 1.19999999999933E+003, -2.699999999999829E+003, 1.679999999999886E+003,
",
2.399999999999870E+002, -2.699999999999833E+003, 6.479999999999576E+003, -4.199999999999715E+003,
",
-1.39999999999913E+002, 1.679999999999889E+003, -4.199999999999719E+003, 2.799999999999812E+003,
",

Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
La inversa de H exacta, de grado 4 es:,,
Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

1.600000000000000E+001, -1.200000000000000E+002, 2.400000000000000E+002, -1.400000000000000E+002, ,,
-1.200000000000000E+002, 1.200000000000000E+003, -2.700000000000000E+003, 1.680000000000000E+003, ,,
2.400000000000000E+002, -2.700000000000000E+003, 6.480000000000000E+003, -4.200000000000000E+003, ,,
-1.400000000000000E+002, 1.680000000000000E+003, -4.200000000000000E+003, 2.800000000000000E+003, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 5 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

2.499999999999275E+001, -2.99999999998820E+002, 1.04999999999545E+003, -1.3999999999379E+003, 6.29999999997165E+002, ,,
-2.99999999998907E+002, 4.79999999998365E+003, -1.8899999999411E+004, 2.6879999999234E+004, -1.2599999999669E+004, ,,
1.0499999999602E+003, -1.8899999999447E+004, 7.93799999998145E+004, -1.1759999999775E+005, 5.6699999999100E+004, ,,
-1.3999999999476E+003, 2.6879999999321E+004, -1.1759999999790E+005, 1.7919999999769E+005, -8.8199999999181E+004, ,,
6.29999999997709E+002, -1.2599999999723E+004, 5.6699999999221E+004, -8.8199999999255E+004, 4.4099999999790E+004, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 5 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

2.500000000000000E+001, -3.000000000000000E+002, 1.050000000000000E+003, -1.400000000000000E+003, 6.300000000000000E+002, ,,
-3.000000000000000E+002, 4.800000000000000E+003, -1.890000000000000E+004, 2.688000000000000E+004, -1.260000000000000E+004, ,,
1.050000000000000E+003, -1.890000000000000E+004, 7.938000000000000E+004, -1.176000000000000E+005, 5.670000000000000E+004, ,,
-1.400000000000000E+003, 2.688000000000000E+004, -1.176000000000000E+005, 1.792000000000000E+005, -8.820000000000000E+004, ,,
6.300000000000000E+002, -1.260000000000000E+004, 5.670000000000000E+004, -8.820000000000000E+004, 4.410000000000000E+004, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 6 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

3.600000000060564E+001, -6.300000000179090E+002, 3.360000000123342E+003, -7.560000000324358E+003, 7.560000000360600E+003, -2.772000000142816E+003, ,,
-6.300000000181285E+002, 1.470000000053469E+004, -8.820000000367785E+004, 2.116800000096616E+005, -2.205000000107326E+005, 8.316000000424801E+004, ,,
3.360000000125736E+003, -8.820000000370289E+004, 5.644800000254479E+005, -1.411200000066807E+006, 1.512000000074183E+006, -5.821200000293514E+005, ,,
-7.560000000332071E+003, 2.116800000097695E+005, -1.411200000067100E+006, 3.628800000176083E+006, -3.969000000195470E+006, 1.552320000077322E+006, ,,
7.560000000370306E+003, -2.205000000108865E+005, 1.512000000074740E+006, -3.969000000196077E+006, 4.410000000217620E+006, -1.746360000086071E+006, ,,
-2.772000000146982E+003, 8.316000000431873E+004, -5.821200000296403E+005, 1.552320000077744E+006, -1.746360000086273E+006, 6.985440000341181E+005, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 6 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

3.600000000000000E+001, -6.300000000000000E+002, 3.360000000000000E+003, -7.560000000000000E+003, 7.560000000000000E+003, -2.772000000000000E+003, ,, -6.300000000000000E+002, 1.470000000000000E+004, -8.820000000000000E+004, 2.116800000000000E+005, -2.205000000000000E+005, 8.316000000000000E+004, ,, 3.360000000000000E+003, -8.820000000000000E+004, 5.644800000000000E+005, -1.411200000000000E+006, 1.512000000000000E+006, -5.821200000000000E+005, ,, -7.560000000000000E+003, 2.116800000000000E+005, -1.411200000000000E+006, 3.628800000000000E+006, -3.969000000000000E+006, 1.552320000000000E+006, ,, 7.560000000000000E+003, -2.205000000000000E+005, 1.512000000000000E+006, -3.969000000000000E+006, 4.410000000000000E+006, -1.746360000000000E+006, ,, -2.772000000000000E+003, 8.316000000000000E+004, -5.821200000000000E+005, 1.552320000000000E+006, -1.746360000000000E+006, 6.985440000000000E+005, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 7 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

4.900000001537637E+001, -1.176000000589174E+003, 8.820000005496024E+003, -2.940000002081901E+004, 4.851000003737108E+004, -3.880800003172723E+004, 1.201200001026310E+004, ,, -1.176000000596983E+003, 3.763200002278427E+004, -3.175200002118874E+005, 1.128960000800715E+006, -1.940400001434337E+006, 1.596672001215691E+006, -5.045040003927003E+005, ,, 8.8200000005623324E+003, -3.175200002139788E+005, 2.857680001985325E+006, -1.058400000748868E+007, 1.871100001339365E+007, -1.571724001133728E+007, 5.045040003658134E+006, ,, -2.940000002146727E+004, 1.128960000814958E+006, -1.058400000754744E+007, 4.032000002842706E+007, -7.276500005077969E+007, 6.209280004293870E+007, -2.018016001384237E+007, ,, 4.851000003877299E+004, -1.940400001469131E+006, 1.871100001358554E+007, -7.276500005110736E+007, 1.334025000912018E+008, -1.152597600770533E+008, 3.783780002482179E+007, ,, -3.880800003309044E+004, 1.596672001251836E+006, -1.571724001156176E+007, 6.209280004345016E+007, -1.152597600774720E+008, 1.005903360654066E+008, -3.329726402105694E+007, ,, 1.201200001075176E+004, -5.045040004062048E+005, 5.045040003747699E+006, -2.018016001407210E+007, 3.783780002507267E+007, -3.329726402115496E+007, 1.109908800680703E+007, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 7 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

4.900000000000000E+001, -1.176000000000000E+003, 8.820000000000000E+003, -2.940000000000000E+004, 4.851000000000000E+004, -3.880800000000000E+004, 1.201200000000000E+004, ,, -1.176000000000000E+003, 3.763200000000000E+004, -3.175200000000000E+005, 1.128960000000000E+006, -1.940400000000000E+006, 1.596672000000000E+006, -5.045040000000000E+005, ,, 8.820000000000000E+003, -3.175200000000000E+005, 2.857680000000000E+006, -1.058400000000000E+007, 1.871100000000000E+007, -1.571724000000000E+007, 5.045040000000000E+006, ,, -2.940000000000000E+004, 1.128960000000000E+006, -1.058400000000000E+007, 4.032000000000000E+007, -7.276500000000000E+007, 6.209280000000000E+007, -2.018016000000000E+007, ,, 4.851000000000000E+004, -1.940400000000000E+006, 1.871100000000000E+007, -7.276500000000000E+007, 1.334025000000000E+008, -1.152597600000000E+008, 3.783780000000000E+007, ,, -3.880800000000000E+004, 1.596672000000000E+006, -1.571724000000000E+007, 6.209280000000000E+007, -1.152597600000000E+008, 1.005903360000000E+008, -3.329726400000000E+007, ,, 1.201200000000000E+004, -5.045040000000000E+005, 5.045040000000000E+006, -2.018016000000000E+007, 3.783780000000000E+007, -3.329726400000000E+007, 1.109908800000000E+007, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H calculada, de grado 8 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

6.399999892691358E+001, -2.015999939704663E+003, 2.015999918614421E+004, -9.239999548538774E+004, 2.217599876096398E+005, -2.882879821960330E+005, 1.921919871686250E+005, -5.147999634119123E+004, ,, -2.015999940061215E+003, 8.467199663667989E+004, -9.525599546445176E+005, 4.656959748574598E+006, -1.164239931031788E+007, 1.556755100937407E+007, -1.059458328628254E+007, 2.882879796542928E+006, ,, 2.015999919425108E+004, -9.525599548297623E+005, 1.143071939125643E+007, -5.821199662705165E+007, 1.496879907510123E+008, -2.043241067189425E+008, 1.412611104335629E+008, -3.891887727344216E+007, ,,

-9.239999554370961E+004, 4.656959750352912E+006, -5.821199663718761E+007, 3.049199813736581E+008, -8.004149489380525E+008, 1.109908726693017E+009, -7.769361072053866E+008, 2.162159849549540E+008, ,, 2.217599877976797E+005, -1.164239931677196E+007, 1.496879908000875E+008, -8.004149490560017E+008, 2.134439860371349E+009, -2.996753559574573E+009, 2.118916655675319E+009, -5.945939588757665E+008, ,, -2.882879824977977E+005, 1.556755102043328E+007, -2.043241068135871E+008, 1.109908726996400E+009, -2.996753559942116E+009, 4.249941408870005E+009, -3.030050817261454E+009, 8.562153010964408E+008, ,, 1.921919874045618E+005, -1.059458329529579E+007, 1.412611105158673E+008, -7.769361075022596E+008, 2.118916656154944E+009, -3.030050817570038E+009, 2.175421099379383E+009, -6.183777176582422E+008, ,, -5.147999641285824E+004, 2.882879799358981E+006, -3.891887730023490E+007, 2.162159850580575E+008, -5.945939590631886E+008, 8.562153012572396E+008, -6.183777177107186E+008, 1.766793479525541E+008, ,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

La inversa de H exacta, de grado 8 es:,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

6.400000000000000E+001, -2.016000000000000E+003, 2.016000000000000E+004, -9.240000000000000E+004, 2.217600000000000E+005, -2.882880000000000E+005, 1.921920000000000E+005, -5.148000000000000E+004, ,, -2.016000000000000E+003, 8.467200000000000E+004, -9.525600000000000E+005, 4.656960000000000E+006, -1.164240000000000E+007, 1.556755200000000E+007, -1.059458400000000E+007, 2.882880000000000E+006, ,, 2.016000000000000E+004, -9.525600000000000E+005, 1.143072000000000E+007, -5.821200000000000E+007, 1.496880000000000E+008, -2.043241200000000E+008, 1.412611200000000E+008, -3.891888000000000E+007, ,, -9.240000000000000E+004, 4.656960000000000E+006, -5.821200000000000E+007, 3.049200000000000E+008, -8.004150000000000E+008, 1.109908800000000E+009, -7.769361600000000E+008, 2.162160000000000E+008, ,, 2.217600000000000E+005, -1.164240000000000E+007, 1.496880000000000E+008, -8.004150000000000E+008, 2.134440000000000E+009, -2.996753760000000E+009, 2.118916800000000E+009, -5.945940000000000E+008, ,, -2.882880000000000E+005, 1.556755200000000E+007, -2.043241200000000E+008, 1.109908800000000E+009, -2.996753760000000E+009, 4.249941696000000E+009, -3.030051024000000E+009, 8.562153600000000E+008, ,, 1.921920000000000E+005, -1.059458400000000E+007, 1.412611200000000E+008, -7.769361600000000E+008, 2.118916800000000E+009, -3.030051024000000E+009, 2.175421248000000E+009, -6.183777600000000E+008, ,, -5.148000000000000E+004, 2.882880000000000E+006, -3.891888000000000E+007, 2.162160000000000E+008, -5.945940000000000E+008, 8.562153600000000E+008, -6.183777600000000E+008, 1.766793600000000E+008, ,,

----<----->-----<----->-----

NORMAS.TXT

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 6.522385829344402E-014,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 1.442415507807788E-013,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 4.936742625180184E-011,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 6.823725646193157E-010,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 6.740059826410185E-008,,

----<----->-----<----->-----

NORMAS1.TXT

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 2.083333333333333E+000,,

Grupo 5

Moundiroff - Stegmann

, 2.283333333333333E+000,,

Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.450000000000000E+000,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.592857142857143E+000,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 2.717857142857143E+000,,

----<----->-----<----->-----

NORMAS2.TXT

Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 1.362000000000000E+004,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 4.132800000000000E+005,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 1.186542000000000E+007,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 3.799649700000000E+008,,
Grupo 5
Moundiroff - Stegmann
, 1.246305060000000E+010,,