

**Parcial Tema B – Guía para la resolución
Segundo Cuatrimestre 2012**

Análisis Numérico I – Curso nro. 6

Se presenta a continuación un detalle de los aspectos principales a tener en cuenta para la resolución del parcial.

Ejercicio nro. 1

A partir de la expresión para $A = (a_{ij})$, la matriz es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tanto para el método de Jacobi como para Gauss-Seidel, deben realizarse las iteraciones a partir de una solución inicial como $x_0 = (0 \ 0 \ 0)^t$

En cuanto a la convergencia de los métodos, puede usarse alguno de los siguientes criterios:

Suficientes pero no necesarios

- Si la matriz A es estrictamente diagonal dominante, entonces el método converge.
- Si $\|T\|_{\infty} < 1$, entonces el método converge.

Suficiente y necesario

$$\rho(T) < 1$$

Para este problema, el método de Jacobi no converge y sí converge el de Gauss-Seidel.

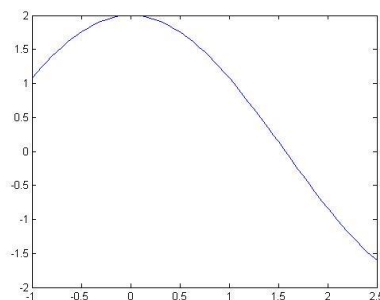
Las soluciones de ambos métodos pueden compararse con la “solución exacta” obtenida a partir del método de Gauss: $\tilde{x} = (0 \ 0 \ 1)^t$

El número de iteraciones necesarias puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$\|x^{(k)} - x\|_{\infty} \leq \|T_{GS}\|_{\infty}^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}$$

Ejercicio nro. 2

Podemos representar la función $g_1(x) = 2 \cos(x)$ gráficamente:



Partiendo de $x_0 = 1$, para obtener una nueva iteración hacemos:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= g_1(x_0) = 2 * \cos(1) = 1.080605 \\
 x_2 &= 0.941590 \\
 x_3 &= 1.177006 \\
 x_4 &= 0.767382 \\
 x_5 &= 0.439461
 \end{aligned}$$

A partir de las condiciones del Teorema de Punto Fijo, debe demostrarse que el proceso diverge.

Usamos la siguiente función alternativa:

$$g_2(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Partiendo de la misma condición inicial, las iteraciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= g_2(x_0) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 1.047198 \\
 x_2 &= 1.019728 \\
 x_3 &= 1.035770 \\
 x_4 &= 1.026419 \\
 x_5 &= 1.031876
 \end{aligned}$$

Nuevamente, deben aplicarse las condiciones del Teorema de Punto Fijo para demostrar que el proceso converge.

En ambos casos deben mostrarse los pasos de aplicación de las funciones.

También es posible aplicar el Método de Newton Raphson.

Luego de 13 iteraciones se alcanza el punto fijo $x = 1.029893$ con una tolerancia de 10^{-5}

Ejercicio nro. 3

La tabla de Diferencias Divididas es la siguiente:

			Diferencia	Diferencia	Diferencia	Diferencia	Diferencia
			1	2	3	4	5
x0	1	-3					
			3				
x1	2	0		6			
			15		1		
x2	3	15		9		0	
			33		1		0
x3	4	48		12		0	
			57		1		
x4	5	105		15			
			87				
x5	6	192					

A partir de esta tabla se construye el polinomio:

$$P_3(x) = -3 + 3(x - 1) + 6(x - 1)(x - 2) + 1(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 4x$$

Para determinar la cota del error, debe usarse la expresión dada en clase, como en este caso $f^{(4)} = 0$, el error de interpolación es cero.