Evaluación integradora de fecha 13/08/2014

Análisis Numérico I (75.12-95.04)

Ejercicio nro. 1

Sea el método multipaso explícito genérico dado por:

$$w_{n+1} = a_0 \cdot w_n + a_1 \cdot w_{n-1} + a_2 \cdot w_{n-2} + h \cdot \left[b_0 \cdot f(t_n; w_n) + b_1 \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) + b_2 \cdot f(t_{n-2}; w_{n-2})\right]$$

Se pide encontrar la relación entre los parámetros $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ que aseguren que el método tenga orden de consistencia 4.
Mostrar uno de dichos métodos. ¿Es único?

Respuesta:
Calculemos el tau con estos valores genéricos:

$$\tau = \left| \begin{array}{l} \dfrac{w(t+h) - a_0 \cdot w(t) - a_1 \cdot w(t-h) - a_2 \cdot w(t-2h)}{3h} - \\ \dfrac{1}{3} \cdot \left[b_0 \cdot f(t; w(t)) + b_1 \cdot f(t-h; w(t-h)) + b_2 \cdot f(t-2h; w(t-2h))\right] \end{array} \right|$$

$$\tau = \left| \begin{array}{l} \dfrac{w(t+h) - a_0 \cdot w(t) - a_1 \cdot w(t-h) - a_2 \cdot w(t-2h)}{3h} - \\ \dfrac{1}{3} \cdot \left[b_0 \cdot w'(t) + b_1 \cdot w'(t-h) + b_2 \cdot w'(t-2h)\right] \end{array} \right|$$

¿Por qué dividimos por 3h? Porque es la distancia entre *w(t+h)* y *w(t-2h)* (estimación de la derivada).
Desarrollamos ahora por Taylor alrededor de *"t"* los valores de *w*.

$$w(t+h) = w(t) + h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) + \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + \frac{h^4}{24} \cdot w^{(4)}(t) + \frac{h^5}{120} \cdot w^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$w(t-h) = w(t) - h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) - \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + \frac{h^4}{24} \cdot w^{(4)}(t) - \frac{h^5}{120} \cdot w^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$w(t-2h) = w(t) - 2h \cdot w'(t) + \frac{4h^2}{2} \cdot w''(t) - \frac{8h^3}{6} \cdot w'''(t) + \frac{16h^4}{24} \cdot w^{(4)}(t) - \frac{32h^5}{120} \cdot w^{(5)}(t) + O(h^6)$$

$$w'(t-h) = w'(t) - h \cdot w''(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w'''(t) - \frac{h^3}{6} \cdot w^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24} \cdot w^{(5)}(t) + O(h^5)$$

$$w'(t-2h) = w'(t) - 2h \cdot w''(t) + \frac{4h^2}{2} \cdot w'''(t) - \frac{8h^3}{6} \cdot w^{(4)}(t) + \frac{16h^4}{24} \cdot w^{(5)}(t) + O(h^5)$$

Notar que como solo estamos buscando que el método sea de orden de consistencia 4 realizamos desarrollo Taylor hasta orden 5 en los w y orden 4 en los w'.
Ahora reemplazamos en el Tau, pero lo haremos en orden:

$$\frac{w(t+h)-a_0\cdot w(t)-a_1\cdot w(t-h)-a_2\cdot w(t-2h)}{3h}=w(t)\cdot\frac{1}{3h}\cdot(1-a_0-a_1-a_2)+$$
$$+w'(t)\cdot\frac{h}{3h}\cdot(1+a_1+2a_2)+w''(t)\cdot\frac{\frac{h^2}{2}}{3h}\cdot(1-a_1-4a_2)+w'''(t)\cdot\frac{\frac{h^3}{6}}{3h}\cdot(1+a_1+8a_2)+$$
$$+w^{(4)}(t)\cdot\frac{\frac{h^4}{24}}{3h}\cdot(1-a_1-16a_2)+w^{(5)}(t)\cdot\frac{\frac{h^5}{120}}{3h}\cdot(1+a_1+32a_2)+O(h^5)$$
$$\frac{w(t+h)-a_0\cdot w(t)-a_1\cdot w(t-h)-a_2\cdot w(t-2h)}{3h}=w(t)\cdot\frac{1}{3h}\cdot(1-a_0-a_1-a_2)+$$
$$+w'(t)\cdot\frac{1}{3}\cdot(1+a_1+2a_2)+w''(t)\cdot\frac{h}{6}\cdot(1-a_1-4a_2)+w'''(t)\cdot\frac{h^2}{18}\cdot(1+a_1+8a_2)+$$
$$+w^{(4)}(t)\cdot\frac{h^3}{72}\cdot(1-a_1-16a_2)+w^{(5)}(t)\cdot\frac{h^4}{360}\cdot(1+a_1+32a_2)+O(h^5)$$
$$\frac{1}{3}\cdot[b_0\cdot w'(t)+b_1\cdot w'(t-h)+b_2\cdot w'(t-2h)]=w'(t)\cdot\frac{1}{3}\cdot(b_0+b_1+b_2)+w''(t)\cdot\frac{h}{3}\cdot(-b_1-2b_2)+$$
$$+w'''(t)\cdot\frac{h^2}{6}\cdot(b_1+4b_2)+w^{(4)}(t)\cdot\frac{h^3}{18}\cdot(-b_1-8b_2)+w^{(5)}(t)\cdot\frac{h^4}{72}\cdot(b_1+16b_2)+O(h^5)$$

Y ahora que hemos obtenido las aproximaciones las colocamos en el cálculo del Tau:

$$\tau=\left|\begin{array}{l} w(t)\cdot\frac{1}{3h}\cdot(1-a_0-a_1-a_2)+w'(t)\cdot\frac{1}{3}\cdot(1+a_1+2a_2-(b_0+b_1+b_2))+ \\ w''(t)\cdot\frac{h}{6}\cdot(1-a_1-4a_2-2\cdot(-b_1-2b_2))+w'''(t)\cdot\frac{h^2}{18}\cdot(1+a_1+8a_2-3\cdot(b_1+4b_2))+ \\ w^{(4)}(t)\cdot\frac{h^3}{72}\cdot(1-a_1-16a_2-4\cdot(-b_1-8b_2))+w^{(5)}(t)\cdot\frac{h^4}{360}\cdot(1+a_1+32a_2-5\cdot(b_1+16b_2))+O(h^5)\end{array}\right|$$

Ahora en el Tau planteamos que posea orden de consistencia 4, con lo cual obtenemos 5 ecuaciones con 6 incógnitas que serán los siguientes:

$$\begin{cases} 1-a_0-a_1-a_2=0 \\ 1+a_1+2a_2-(b_0+b_1+b_2)=0 \\ 1-a_1-4a_2-2\cdot(-b_1-2b_2)=0 \\ 1+a_1+8a_2-3\cdot(b_1+4b_2)=0 \\ 1-a_1-16a_2-4\cdot(-b_1-8b_2)=0 \end{cases}$$

Notar que obtuvimos 5 ecuaciones igualadas a cero a partir de pedir que queden solo los términos de orden cuarta en h en el tau.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 9 \\ a_2 = -9 \\ b_0 = 8/3 \\ b_1 = -22/3 \\ b_2 = -10/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-1-9-(-9)=0 \\ 1+9+2\cdot(-9)-\frac{1}{3}(8-22-10)=0 \\ 1-9-4\cdot(-9)-\frac{2}{3}\cdot(22+20)=0 \\ 1+9+8\cdot(-9)-(-22-40)=0 \\ 1-9-16\cdot(-9)-\frac{4}{3}\cdot(22+80)=0 \end{cases}$$

Obtuvimos uno de los infinitos métodos de 4to. orden de consistencia.
Uno de los métodos propuestos es:

$$w_{n+1} = w_n + 9\cdot w_{n-1} - 9\cdot w_{n-2} + \frac{h}{3}\cdot\left[8\cdot f(t_n; w_n) - 22\cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) - 10\cdot f(t_{n-2}; w_{n-2})\right]$$

Ejercicio nro. 2

Dada la ecuación diferencial $y''(t) + 4\cdot y'(t) + 13\cdot y(t) = 40\cdot\cos(t)$ con $t \geq 0$, y los valores iniciales $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.
Discretizarla usando el método directo de Nystrom:

$$\frac{w_{n+1} - 2\cdot w_n + w_{n-1}}{h^2} = f\left(t_n; w_n; \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2\cdot h}\right)$$

Dicho método sirve para aproximar el problema matemático de una ecuación diferencial de segundo orden de la forma c.

Tomar como valor auxiliar de cálculo $w_1 = y(0) + h\cdot y'(0) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(0) + O(h^3)$.

Siendo $w_1 \cong y(0) + h\cdot y'(0) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(0) = w_0 + h\cdot y'(0) + \frac{h^2}{2}\cdot f(0; y(0); y'(0))$.

a) Utilizar h=0.1 y avanzar 3 pasos de tiempo.

Respuesta:

Discretizaremos la ecuación a resolver mediante el método de Nyström:

$$y''(t) = f(t; y; y') \Rightarrow$$
$$y''(t) + 4\cdot y'(t) + 13\cdot y(t) = 40\cdot\cos(t) \Rightarrow y''(t) = -4\cdot y'(t) - 13\cdot y(t) + 40\cdot\cos(t) = f(t; y; y')$$

Ahora que ya la hemos discretizado aplicamos el método teniendo en cuenta que este que es un método implícito (corrector) lo usaremos en la forma directa (como predictor) despejando el valor en el paso *t+h*.

$$\frac{w_{n+1} - 2\cdot w_n + w_{n-1}}{h^2} = f\left(t_n; w_n; \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2\cdot h}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{w_{n+1} - 2\cdot w_n + w_{n-1}}{h^2} = -4\cdot\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2\cdot h} - 13\cdot w_n + 40\cdot\cos(t_n)$$

Ahora de esta última ecuación despejamos el valor al paso *n+1*.

$$\frac{w_{n+1}-2\cdot w_n+w_{n-1}}{h^2}=-4\cdot\frac{w_{n+1}-w_{n-1}}{2\cdot h}-13\cdot w_n+40\cdot\cos(t_n)$$

$$w_{n+1}-2\cdot w_n+w_{n-1}=-4\cdot h^2\cdot\frac{w_{n+1}-w_{n-1}}{2\cdot h}-13\cdot h^2\cdot w_n+40\cdot h^2\cdot\cos(t_n)$$

$$w_{n+1}-2\cdot w_n+w_{n-1}=-2\cdot h\cdot(w_{n+1}-w_{n-1})-13\cdot h^2\cdot w_n+40\cdot h^2\cdot\cos(t_n)$$

$$w_{n+1}\cdot(1+2\cdot h)=w_n\cdot\left(2-13\cdot h^2\right)+w_{n-1}\cdot(-1+2\cdot h)+40\cdot h^2\cdot\cos(t_n)$$

$$w_{n+1}=w_n\cdot\frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h}+w_{n-1}\cdot\frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h}+\frac{40\cdot h^2}{1+2\cdot h}\cdot\cos(t_n)$$

Ahora utilizamos h=0.1, los valores iniciales y avanzamos 3 pasos de tiempo.
Antes de hacerlo debemos calcular el valor a t=h:

$$w_1=y(0)+h\cdot y'(0)+\frac{h^2}{2}\cdot y''(0)+O\left(h^3\right)\Rightarrow$$

$$w_1=3+h\cdot 4+\frac{h^2}{2}\cdot\left(-4\cdot y'(0)-13\cdot y(0)+40\cdot\cos(0)\right)+O\left(h^3\right)\Rightarrow$$

$$w_1=3+h\cdot 4+\frac{h^2}{2}\cdot(-4\cdot 4-13\cdot 3+40\cdot 1)+O\left(h^3\right)=3+4\cdot h+\frac{h^2}{2}\cdot(-16-39+40)+O\left(h^3\right)$$

$$w_1=3+4\cdot h-\frac{15\cdot h^2}{2}+O\left(h^3\right)\cong 3+4\cdot 0.1-\frac{15\cdot 0.1^2}{2}=3.325$$

Ahora calculamos los valores con 3 pasos de tiempo:

$$w_0=3$$

$$w_1=3.325$$

$$w_2=w_1\cdot\frac{2-13\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}+w_0\cdot\frac{-1+2\cdot 0.1}{1+2\cdot 0.1}+\frac{40\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}\cdot\cos(0.1)$$

$$w_2=3.325\cdot\frac{2-13\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}+3\cdot\frac{-1+2\cdot 0.1}{1+2\cdot 0.1}+\frac{40\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}\cdot\cos(0.1)=3.513126$$

$$w_3=w_2\cdot\frac{2-13\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}+w_1\cdot\frac{-1+2\cdot 0.1}{1+2\cdot 0.1}+\frac{40\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}\cdot\cos(0.2)$$

$$w_3=3.513126\cdot\frac{2-13\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}+3.325\cdot\frac{-1+2\cdot 0.1}{1+2\cdot 0.1}+\frac{40\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}\cdot\cos(0.2)=3.58464$$

$$w_4=w_3\cdot\frac{2-13\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}+w_2\cdot\frac{-1+2\cdot 0.1}{1+2\cdot 0.1}+\frac{40\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}\cdot\cos(0.3)$$

$$w_3=3.58464\cdot\frac{2-13\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}+3.513126\cdot\frac{-1+2\cdot 0.1}{1+2\cdot 0.1}+\frac{40\cdot 0.1^2}{1+2\cdot 0.1}\cdot\cos(0.3)=3.56243$$

b) Plantear el estudio de la estabilidad.

Respuesta:

Utilizamos la función discretizada.

$$w_{n+1} = w_n \cdot \frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h} + w_{n-1}\cdot\frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h} + \frac{40\cdot h^2}{1+2\cdot h}\cdot\cos(t_n)$$

Ahora planteamos las perturbaciones para analizar el estudio de la estabilidad.

$$\begin{cases} v_{n+1} = w_n \\ w_{n+1} = w_n\cdot\frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h} + v_n\cdot\frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h} + \frac{40\cdot h^2}{1+2\cdot h}\cdot\cos(t_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n \to v_n + \delta_n \\ w_n \to w_n + \varepsilon_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} + \delta_{n+1} = w_n + \varepsilon_{n+1} \\ w_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = (w_n + \varepsilon_{n+1})\cdot\frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h} + (v_{n+1} + \delta_{n+1})\cdot\frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h} + \frac{40\cdot h^2}{1+2\cdot h}\cdot\cos(t_n) \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h} & \frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(M - \lambda\cdot Id) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h} & \frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2-13\cdot h^2}{1+2\cdot h}\cdot\lambda + \frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \sqrt{\left(\frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h}\right)^2 - \frac{-1+2\cdot h}{1+2\cdot h}}$$

$$\lambda = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \sqrt{\left(\frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h}\right)^2 - \frac{(-2+4\cdot h)\cdot(2+4\cdot h)}{(2+4\cdot h)^2}} =$$

$$\lambda = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \frac{1}{2+4\cdot h}\sqrt{(2-13\cdot h^2)^2 - (-2+4\cdot h)\cdot(2+4\cdot h)} =$$

$$\lambda = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \frac{1}{2+4\cdot h}\sqrt{4-52\cdot h^2+169\cdot h^4-16\cdot h^2+4} = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \frac{\sqrt{8-68\cdot h^2+169\cdot h^4}}{2+4\cdot h} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \frac{\sqrt{8-68\cdot h^2+169\cdot h^4}}{2+4\cdot h}$$

El método resulta inestable pero para ello debemos realizar más cálculos. Lo hacemos para h=0.

$$\lambda = \frac{2-13\cdot h^2}{2+4\cdot h} \pm \frac{\sqrt{8-68\cdot h^2+169\cdot h^4}}{2+4\cdot h}$$

$$h = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0.4142; \lambda_2 = 2.4142 \Rightarrow \rho(h=0) = 2.4 > 1$$

Ejercicio nro. 3

Dada la integral: $I = \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$. Se pide estimar su valor mediante:

a) Trapecios con n=4.

Respuesta:

Utilizamos el método compuesto de trapecios:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$T(h) = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \Rightarrow$$

$$T(h=1) = \frac{1}{2} \cdot \left(f(0) + f(4) + 2 \cdot \left(f(1) + f(2) + f(3) \right) \right) =$$

$$T(h=1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^0}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{e^4}{\sqrt{1+4^2}} + 2 \cdot \left(\frac{e^1}{\sqrt{1+1^2}} + \frac{e^2}{\sqrt{1+2^2}} + \frac{e^3}{\sqrt{1+3^2}} \right) \right) =$$

$$T(h=1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^0}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{e^4}{\sqrt{1+4^2}} + 2 \cdot \left(\frac{e^1}{\sqrt{1+1^2}} + \frac{e^2}{\sqrt{1+2^2}} + \frac{e^3}{\sqrt{1+3^2}} \right) \right) = 18.69920$$

b) Simpson con n=4.

<u>Respuesta:</u>

Utilizamos el método compuesto de Simpson:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$S(h) = \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + f\left(x_{2 \cdot n/2} \right) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \cdot \sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) \right) \Rightarrow$$

$$S(h=1) = \frac{1}{3} \cdot \left(f(0) + f(4) + 2 \cdot f(2) + 4 \cdot \left(f(1) + f(3) \right) \right) =$$

$$S(h=1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^0}{\sqrt{1+0^2}} + \frac{e^4}{\sqrt{1+4^2}} + 2 \cdot \frac{e^2}{\sqrt{1+2^2}} + 4 \cdot \left(\frac{e^1}{\sqrt{1+1^2}} + \frac{e^3}{\sqrt{1+3^2}} \right) \right) = 17.98195$$

c) Gauss-Legendre con 3 puntos (n=3). En este último caso la tabla de datos es:

k	x_k	c_k
1	$-\sqrt{3/5}$	$5/9$
2	0	$8/9$
3	$+\sqrt{3/5}$	$5/9$

<u>Respuesta:</u>

Utilizamos el método de Gauss-Legendre:

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx \cong \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot f(x_k)$$

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{(b-a)}{2}\cdot(t+1)+a \\ dx=\dfrac{(b-a)}{2}\cdot dt \end{cases} \Rightarrow I=\int_a^b f(x)\cdot dx=\frac{(b-a)}{2}\cdot\int_{-1}^{1} f(x(t))\cdot dt$$

Haciendo el cambio de variables podemos calcular la integral por este método:

$$I=\int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx=\frac{(4-0)}{2}\cdot\int_{-1}^{1} f(x(t))\cdot dt \cong 2\cdot\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot f(x_k)$$

$$I\cong 2\cdot(c_1\cdot f(x_1)+c_2\cdot f(x_2)+c_3\cdot f(x_3))=$$

$$I\cong 2\cdot\left(\frac{5}{9}\cdot f\left(2\left(-\sqrt{0.6}+1\right)\right)+\frac{8}{9}\cdot f(2(0+1))+\frac{5}{9}\cdot f\left(2\left(+\sqrt{0.6}+1\right)\right)\right)$$

$$I\cong 2\cdot\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{e^{2\left(-\sqrt{0.6}+1\right)}}{\sqrt{1+\left[2\left(-\sqrt{0.6}+1\right)\right]^2}}+\frac{8}{9}\cdot\frac{e^{2(0+1)}}{\sqrt{1+[2(0+1)]^2}}+\frac{5}{9}\cdot\frac{e^{2\left(+\sqrt{0.6}+1\right)}}{\sqrt{1+\left[2\left(+\sqrt{0.6}+1\right)\right]^2}}\right)=17.94630$$

Con lo cual la integral nos queda $I_{GL}=17.94630$