

Evaluación integradora de fecha 06/08/2014

Análisis Numérico I (75.12-95.04)

Ejercicio nro. 1

a) Dada la fórmula de integración aproximada conocida como fórmula de Lobatto:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \cong \frac{1}{6} \cdot [f(-1) + f(+1)] + \frac{5}{6} \cdot \left[f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + f\left(+\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \right].$$

Determine el grado de exactitud de la misma.

Respuesta:

Para conocer el grado de exactitud de la fórmula deberemos aplicarla sobre un polinomio y verificar hasta qué grado la fórmula resulta una igualdad. Esto lo hacemos sobre los polinomios de grado 0, 1, 2, y así hasta llegar al grado en donde deja de ser una igualdad.

Comencemos con $f(x) = P(x) = 1$:

$$\int_{-1}^1 1 \cdot dx = 2$$

Con lo cual vale para los polinomios de grado 0.

$$\frac{1}{6} \cdot [1 + 1] + \frac{5}{6} \cdot [1 + 1] = \frac{2}{6} + \frac{10}{6} = 2$$

Sigamos con $f(x) = P(x) = x$:

$$\int_{-1}^1 x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$$

$$\frac{1}{6} \cdot [-1 + 1] + \frac{5}{6} \cdot \left[-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \right] = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot 0 = 0$$

Con lo cual vale para los polinomios de grado 1.

Sigamos con $f(x) = P(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^1 x^2 \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{6} \cdot [(-1)^2 + 1^2] + \frac{5}{6} \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^2 \right] = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{10}{25} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Con lo cual vale para los polinomios de grado 2.

Sigamos con $f(x) = P(x) = x^3$:

$$\int_{-1}^1 x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

$$\frac{1}{6} \cdot [(-1)^3 + 1^3] + \frac{5}{6} \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^3 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^3 \right] = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot 0 = 0$$

Con lo cual vale para los polinomios de grado 3.

Sigamos con $f(x) = P(x) = x^4$:

$$\int_{-1}^1 x^4 \cdot dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{6} \cdot [(-1)^4 + 1^4] + \frac{5}{6} \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^4 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^4 \right] = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{25} = \frac{2}{6} + \frac{2}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Con lo cual vale para los polinomios de grado 4.

Sigamos con $f(x) = P(x) = x^5$:

$$\int_{-1}^1 x^5 \cdot dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_{-1}^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{(-1)^6}{6} = 0$$

$$\frac{1}{6} \cdot [(-1)^5 + 1^5] + \frac{5}{6} \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^5 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^5 \right] = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot 0 = 0$$

Con lo cual vale para los polinomios de grado 5.

Sigamos con $f(x) = P(x) = x^6$:

$$\int_{-1}^1 x^6 \cdot dx = \left[\frac{x^7}{7} \right]_{-1}^1 = \frac{1^7}{7} - \frac{(-1)^7}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{1}{6} \cdot [(-1)^6 + 1^6] + \frac{5}{6} \cdot \left[\left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^6 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^6 \right] = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{125} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{25} = \frac{12}{30} = \frac{26}{75}$$

Vemos que la ecuación no se cumple para los polinomios de grado 6.

Nos hemos valido del hecho que las dos partes de la fórmula son lineales con lo cual la fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual que 5 y por consiguiente el grado de exactitud de la fórmula es 5.

b) Estimar la integral $\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)} dx$ mediante el método de Romberg con 3 decimales

correctos (se aclara que el error final sea menor que 3 decimales correctos, no las cuentas intermedias).

Comparar dicho valor con el valor exacto: $I = 1,10714871779 = \arctan(2)$.

Respuesta:

Debemos calcular la integral por el método de los trapecios para poder comenzar con la extrapolación de Richardson (método de Romberg). Se indica que el error final debe ser de 3 decimales con lo cual podemos usar 6 decimales sin perder mucha exactitud. Realizamos 3 cálculos de trapecios para comenzar con las iteraciones:

$$T(h=2) = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{(1+0^2)} + \frac{1}{(1+2^2)} \right) = 1.2$$

$$T(h) = \frac{h}{2} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$T(h=1) = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{(1+0^2)} + \frac{1}{(1+2^2)} + 2 \cdot \frac{1}{(1+1^2)} \right) = 1.1$$

$$T(h=0.5) = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{(1+0^2)} + \frac{1}{(1+2^2)} + 2 \cdot \left[\frac{1}{(1+0.5^2)} + \frac{1}{(1+1^2)} + \frac{1}{(1+1.5^2)} \right] \right) = 1.103846$$

Ahora realizamos la extrapolación:

$$R_{11} = 1.2$$

$$R_{21} = 1.1$$

$$R_{31} = 1.103846$$

$$R_{22} = \frac{4 \cdot R_{21} - R_{11}}{3} = 1.066667$$

No nos alcanzó con 3 cálculos de trapecios.

$$R_{32} = \frac{4 \cdot R_{31} - R_{21}}{3} = 1.105128$$

$$R_{33} = \frac{16 \cdot R_{32} - R_{22}}{15} = 1.107692$$

$$\text{Err} = |R_{33} - R_{22}| = 0.041$$

Agregamos un cálculo más.

$$T(h=0.25) = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{(1+0^2)} + \frac{1}{(1+2^2)} + 2 \cdot \left[\frac{1}{(1+0.25^2)} + \frac{1}{(1+0.5^2)} + \frac{1}{(1+0.75^2)} + \frac{1}{(1+1^2)} + \frac{1}{(1+1.25^2)} + \frac{1}{(1+1.5^2)} + \frac{1}{(1+1.75^2)} \right] \right) = 1.106317$$

$$R_{41} = 1.106317$$

$$R_{42} = \frac{4 \cdot R_{41} - R_{31}}{3} = 1.107140$$

$$R_{43} = \frac{16 \cdot R_{42} - R_{32}}{15} = 1.107274$$

$$R_{44} = \frac{64 \cdot R_{43} - R_{33}}{63} = 1.107268$$

$$\text{Err} = |R_{44} - R_{33}| = 0.0004 \Rightarrow I = 1.1073 \pm 0.0004$$

Notar que ahora sí hemos obtenido el valor requerido dentro de la premisa de 3 decimales correctos.

El valor exacto difiere del valor calculado con 4 iteraciones en un 0.0001 (menor que la cota calculada).

c) Ahora estimar la integral de b) mediante el método de a). Comparar con el resultado exacto.

Respuesta:

Debemos primero modificar los extremos de integración para poder aplicar la fórmula entre -1 y 1:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot dx &= \frac{(b-a)}{2} \cdot \int_{-1}^1 f(t) \cdot dt \\ x(t) &= \frac{(b-a)}{2} \cdot (t+1) + a \Rightarrow dx(t) = \frac{(b-a)}{2} \cdot dt \Rightarrow \\ x(t) &= t+1 \\ \int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)} dx &= \frac{(2-0)}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+[t+1]^2)} dt \end{aligned}$$

Ahora calculamos la integral con el nuevo mapeo:

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+[t+1]^2)} dt \cong \frac{1}{6} \cdot [f(-1) + f(+1)] + \frac{5}{6} \cdot \left[f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + f\left(+\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \right]$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)} dx \cong \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{(1+[-1+1]^2)} + \frac{1}{(1+[1+1]^2)} \right] + \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{1}{\left(1+\left[1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]^2\right)} + \frac{1}{\left(1+\left[1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right]^2\right)} \right]$$

$$\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)} dx \cong 1.107591 \Rightarrow \text{Err} \cong 0.0004$$

Ejercicio nro. 2

- a) La fórmula general para todos los métodos explícitos de 2 pasos para resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es:

$$w_{n+1} = a_0 \cdot w_n + a_1 \cdot w_{n-1} + h \cdot [b_0 \cdot f(t_n; w_n) + b_1 \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1})]$$

Encontrar todos los métodos explícitos de dos pasos que tengan orden de consistencia 2. Indicar claramente la relación existente entre los 4 parámetros indicados.

Respuesta:

Calculemos el tau con estos valores genéricos:

$$\tau = \left| \frac{w(t+h) - a_0 \cdot w(t) - a_1 \cdot w(t-h)}{2h} - \frac{1}{2} \cdot [b_0 \cdot f(t; w(t)) + b_1 \cdot f(t-h; w(t-h))] \right|$$

$$\tau = \left| \frac{w(t+h) - a_0 \cdot w(t) - a_1 \cdot w(t-h)}{2h} - \frac{1}{2} \cdot [b_0 \cdot w'(t) + b_1 \cdot w'(t-h)] \right|$$

¿Por qué dividimos por 2h? Porque es la distancia entre $w(t+h)$ y $w(t-h)$ (estimación de la derivada).

Desarrollamos ahora por Taylor alrededor de "t" los valores de w.

$$\tau = \left| \frac{w(t+h) - a_0 \cdot w(t) - a_1 \cdot w(t-h)}{2h} - \frac{1}{2} \cdot [b_0 \cdot w'(t) + b_1 \cdot w'(t-h)] \right|$$

$$w(t+h) = w(t) + h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) + \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + O(h^4)$$

$$w(t-h) = w(t) - h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) - \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + O(h^4)$$

$$w'(t-h) = w'(t) - h \cdot w''(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w'''(t) + O(h^3)$$

Notar que como solo estamos buscando que el método sea de orden de consistencia 2 realizamos desarrollo Taylor hasta orden 3 en los w y orden 2 en los w'.

Ahora reemplazamos en el Tau:

$$\tau = \left| \frac{w(t) + h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) + \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + O(h^4) - a_0 \cdot w(t) - a_1 \cdot \left[w(t) - h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) - \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + O(h^4) \right]}{2h} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[b_0 \cdot w'(t) + b_1 \cdot \left[w'(t) - h \cdot w''(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w'''(t) + O(h^3) \right] \right]}{2h} \right| =$$

$$\tau = \left| \frac{w(t) \cdot (1 - a_0 - a_1) + h \cdot w'(t) \cdot (1 + a_1) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) \cdot (1 - a_1) + \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) \cdot (1 + a_1) + O(h^4)}{2h} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[w'(t) \cdot (b_0 + b_1) - h \cdot w''(t) \cdot b_1 + \frac{h^2}{2} \cdot w'''(t) \cdot b_1 + O(h^3) \right] \cdot w'(t)}{2h} \right| =$$

$$\Rightarrow 1 - a_0 - a_1 = 0$$

$$\frac{(1 + a_1)}{2} - \frac{b_0 + b_1}{2} = 0$$

$$\frac{(1 - a_1)}{2} + b_1 = 0$$

Notar que obtuvimos 3 ecuaciones igualadas a cero a partir de pedir que queden solo los términos de orden cuadrado en h en el tau.

Luego el conjunto de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} 1 = a_0 + a_1 \\ 1 + a_1 = b_0 + b_1 \\ 1 - a_1 = -2 \cdot b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a_0 + a_1 \\ 2 = b_0 - b_1 \\ 1 = a_1 - 2 \cdot b_1 \end{cases}$$

Notar que son 3 ecuaciones con 4 incógnitas con lo cual tenemos infinitas soluciones.

$$\text{Si } \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = -2 \\ b_0 = \frac{1}{2} \\ b_1 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3 - 2 \\ 2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1+3}{2} \\ 1 = -2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 + 3 \end{cases}$$

Tenemos el siguiente método

b) Sea el método de 2do. orden

$$w_{n+1} = 3 \cdot w_n - 2 \cdot w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_n; w_n) - \frac{3}{2} \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) \right] \text{ que se aplica al}$$

problema con $y'(t) = 0$; $y(0) = 0$ y cuya solución exacta vale $y(t) = 0$.

i) Mostrar que la solución numérica vale $w_n = 0 \forall n$.

Respuesta:

Ya que la solución vale 0 para todo t , consideremos como $w_0 = 0$ y $w_1 = 0$. Los cálculos serían:

$$w_{n+1} = 3 \cdot w_n - 2 \cdot w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_n; w_n) - \frac{3}{2} \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) \right]$$

$$w_2 = 3 \cdot w_1 - 2 \cdot w_0 + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_1; w_1) - \frac{3}{2} \cdot f(t_0; w_0) \right]$$

$$w_2 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right] = 0$$

$$w_{n+1} = 3 \cdot w_n - 2 \cdot w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_n; w_n) - \frac{3}{2} \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) \right]$$

$$w_{n+1} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right] = 0 \forall n$$

ii) Si se perturba los valores iniciales del problema de la siguiente forma

$$y(0) = \frac{\varepsilon}{2}; y(h) = \varepsilon. \text{ Si } z_n \text{ es la solución numérica de este problema mostrar}$$

$$\text{que la misma vale } z_n = \varepsilon \cdot 2^{n-1}.$$

Respuesta:

La derivada vale 0, pero las condiciones iniciales no. Hagamos los cálculos. Probémoslo por inducción. Veamos que vale para $n=2$.

$$w_{n+1} = 3 \cdot w_n - 2 \cdot w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_n; w_n) - \frac{3}{2} \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) \right]$$

$$w_2 = 3 \cdot w_1 - 2 \cdot w_0 + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_1; w_1) - \frac{3}{2} \cdot f(t_0; w_0) \right]$$

$$w_2 = 3 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) - 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right] = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \cdot 2^{2-1}$$

Probemos ahora que vale dicha solución para todo valor n :

$$w_{n+1} = 3 \cdot w_n - 2 \cdot w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot f(t_n; w_n) - \frac{3}{2} \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) \right]$$

$$w_{n+1} = 3 \cdot (\varepsilon \cdot 2^{n-1}) - 2 \cdot (\varepsilon \cdot 2^{n-2}) + h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right] = \varepsilon \cdot [3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{n-2}] =$$

$$w_{n+1} = \varepsilon \cdot [3 \cdot 2 \cdot 2^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-2}] = \varepsilon \cdot [4 \cdot 2^{n-2}] = \varepsilon \cdot 2^n$$

iii) Deducir a partir de i) e ii) que el método propuesto es inestable.

El método es inestable ya que una perturbación sobre el valor se propaga como

$g_n = \left| \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \right| = \left| \frac{\varepsilon \cdot 2^{n-1}}{\varepsilon \cdot 2^{n-2}} \right| = 2 > 1$ con lo cual se observa que el método es inestable ya que dicho cociente es mayor que 1.

Ejercicio nro. 3

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden :

$$\begin{cases} y_1' = A \cdot y_1 \cdot [1 - B \cdot y_2] \\ y_2' = C \cdot y_2 \cdot [D \cdot y_1 - 1] \end{cases} \text{ con } \begin{cases} y_1(0) = \alpha \\ y_2(0) = \beta \end{cases}$$

Este sistema se denomina modelo presa-depredador de Lotka-Volterra donde $y_1(t)$ es el número de presas e $y_2(t)$ es el número de depredadores.

Sean $A=4$; $B=0,5$; $C=3$ y $D=1/3$.

a) Mostrar que existen soluciones $y_1(t) = C_1 \neq 0$ y $y_2(t) = C_2 \neq 0$ constantes y diferentes de la solución trivial igual a cero (equilibrio demográfico).

Respuesta:

Para demostrar esto lo único que tenemos que hacer es reemplazar los valores de A, B, C y D y proponer valores constantes (las derivadas van a valer 0 por ser constantes).

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_1' = A \cdot y_1 \cdot [1 - B \cdot y_2] \\ y_2' = C \cdot y_2 \cdot [D \cdot y_1 - 1] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y_1' = 4 \cdot y_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot y_2\right] \\ y_2' = 3 \cdot y_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot y_1 - 1\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 \cdot y_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot y_2\right] \\ 0 = 3 \cdot y_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot y_1 - 1\right] \end{cases} \\ \begin{cases} 0 = 4 \cdot C_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot C_2\right] \\ 0 = 3 \cdot C_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot C_1 - 1\right] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = 3 \\ y_2(t) = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Con $y_1(0) = 3$ e $y_2(0) = 5$, plantear la resolución de las ecuaciones de Lotka-Volterra con $h=0,1$ usando el método de Runge-Kutta de orden 2:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n; w_n) + f(t_n + h; w_n + h \cdot f(t_n; w_n))] \text{ convenientemente}$$

generalizado. Avanzar 3 pasos de cálculo para estimar las soluciones para $t=0,3$.

Respuesta:

Generalizamos el método para el SEDO. Lo hacemos primero en form general (para cualquier SEDO de 2×2).

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t; y_1; y_2) = 4 \cdot y_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot y_2\right] \\ y_2' = f_2(t; y_1; y_2) = 3 \cdot y_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot y_1 - 1\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 5 \end{cases}$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n; w_n) + f(t_n + h; w_n + h \cdot f(t_n; w_n))] \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \cdot [f_1(t_n; v_n; w_n) + f_1(t_n + h; v_n + h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n); w_n + h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n))] \\ w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f_2(t_n; v_n; w_n) + f_2(t_n + h; v_n + h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n); w_n + h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n))] \end{cases}$$

Podemos hacer menos cuentas realizando cálculos adicionales como:

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \cdot [f_1(t_n; v_n; w_n) + f_1(t_n + h; v_n + h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n); w_n + h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n))] \\ w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f_2(t_n; v_n; w_n) + f_2(t_n + h; v_n + h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n); w_n + h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n))] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q_{11} = h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n) \\ q_{12} = h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n) \\ q_{21} = h \cdot f_1(t_n + h; v_n + q_{11}; w_n + q_{12}) \\ q_{22} = h \cdot f_2(t_n + h; v_n + q_{11}; w_n + q_{12}) \\ v_{n+1} = v_n + \frac{q_{11} + q_{21}}{2} \\ w_{n+1} = w_n + \frac{q_{12} + q_{22}}{2} \end{cases}$$

Ahora lo especializamos para el problema.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t; y_1; y_2) = 4 \cdot y_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot y_2\right] \\ y_2' = f_2(t; y_1; y_2) = 3 \cdot y_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot y_1 - 1\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11} = h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n) = h \cdot 4 \cdot v_n \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot w_n\right] \\ q_{12} = h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n) = h \cdot 3 \cdot w_n \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot v_n - 1\right] \\ q_{21} = h \cdot f_1(t_n + h; v_n + q_{11}; w_n + q_{12}) = h \cdot 4 \cdot (v_n + q_{11}) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (w_n + q_{12})\right] \\ q_{22} = h \cdot f_2(t_n + h; v_n + q_{11}; w_n + q_{12}) = h \cdot 3 \cdot (w_n + q_{12}) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (v_n + q_{11}) - 1\right] \\ v_{n+1} = v_n + \frac{q_{11} + q_{21}}{2} \\ w_{n+1} = w_n + \frac{q_{12} + q_{22}}{2} \end{cases}$$

Usamos los valores iniciales y el $h=0.1$.

$$\begin{cases} y_1(0) = 3 = v_0 \\ y_2(0) = 5 = w_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11} = h \cdot 4 \cdot v_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot w_0\right] = 0.1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot 5\right] = -1.8 \\ q_{12} = h \cdot 3 \cdot w_0 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot v_0 - 1\right] = 0.1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 3 - 1\right] = 0 \\ q_{21} = h \cdot 4 \cdot (v_0 + q_{11}) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (w_0 + q_{12})\right] = 0.1 \cdot 4 \cdot (3 - 1.8) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (5 + 0)\right] = -0.72 \\ q_{22} = h \cdot 3 \cdot (w_0 + q_{12}) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (v_0 + q_{11}) - 1\right] = 0.1 \cdot 3 \cdot (5 + 0) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (3 - 1.8) - 1\right] = -0.9 \\ v_1 = v_0 + \frac{q_{11} + q_{21}}{2} = 3 + \frac{-1.8 + -0.72}{2} = 1.74 \\ w_1 = w_0 + \frac{q_{12} + q_{22}}{2} = 5 + \frac{0 - 0.9}{2} = 4.55 \end{cases}$$

Este valor es para $t=0.1$. Seguimos hasta calcular el valor para $t=0.3$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 q_{11} = h \cdot 4 \cdot v_1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot w_1 \right] = 0.1 \cdot 4 \cdot 1.74 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot 4.55 \right] = -0.8874 \\
 q_{12} = h \cdot 3 \cdot w_1 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot v_1 - 1 \right] = 0.1 \cdot 3 \cdot 4.55 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1.74 - 1 \right] = -0.5733 \\
 q_{21} = h \cdot 4 \cdot (v_1 + q_{11}) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (w_1 + q_{12}) \right] = 0.1 \cdot 4 \cdot (1.74 - 0.8874) \cdot \\
 \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (4.55 - 0.5733) \right] = -0.33707 \\
 q_{22} = h \cdot 3 \cdot (w_1 + q_{12}) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (v_1 + q_{11}) - 1 \right] = 0.1 \cdot 3 \cdot (4.55 - 0.5733) \cdot \\
 \left[\frac{1}{3} \cdot (1.74 - 0.8874) - 1 \right] = -0.85396 \\
 v_2 = v_1 + \frac{q_{11} + q_{21}}{2} = 1.74 + \frac{-0.8874 - 0.33707}{2} = 1.12777 \\
 w_2 = w_1 + \frac{q_{12} + q_{22}}{2} = 4.55 + \frac{-0.5733 - 0.85396}{2} = 3.83637
 \end{array} \right.$$

Y ahora realizamos el último cálculo:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 q_{11} = h \cdot 4 \cdot v_2 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot w_2 \right] = 0.1 \cdot 4 \cdot 1.12777 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot 3.83637 \right] = -0.41420 \\
 q_{12} = h \cdot 3 \cdot w_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot v_2 - 1 \right] = 0.1 \cdot 3 \cdot 3.83637 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot 1.12777 - 1 \right] = -0.71826 \\
 q_{21} = h \cdot 4 \cdot (v_2 + q_{11}) \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (w_2 + q_{12}) \right] = 0.1 \cdot 4 \cdot (1.12777 - 0.41420) \cdot \\
 \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (3.83637 - 0.71826) \right] = -0.15957 \\
 q_{22} = h \cdot 3 \cdot (w_2 + q_{12}) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (v_2 + q_{11}) - 1 \right] = 0.1 \cdot 3 \cdot (3.83637 - 0.71826) \cdot \\
 \left[\frac{1}{3} \cdot (1.12777 - 0.41420) - 1 \right] = -0.71294 \\
 v_3 = v_2 + \frac{q_{11} + q_{21}}{2} = 1.12777 + \frac{-0.41420 - 0.15957}{2} = 0.84088 \\
 w_3 = w_2 + \frac{q_{12} + q_{22}}{2} = 3.83637 + \frac{-0.71826 - 0.71294}{2} = 3.12077
 \end{array} \right.$$

Con lo cual las soluciones quedan $y_1(0.3) \cong 0.84088$ e $y_2(0.3) \cong 3.12077$.