# Evaluación integradora de fecha 06/08/2014

# Análisis Numérico I (75.12-95.04)

***Ejercicio nro. 1***

a) Dada la fórmula de integración aproximada conocida como fórmula de Lobatto:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx \cong \frac{1}{6}\cdot\left[f(-1)+f(+1)\right]+\frac{5}{6}\cdot\left[f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+f\left(+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right].$$

Determine el grado de exactitud de la misma.

b) Estimar la integral $\int_{0}^{2}\frac{1}{(1+x^2)}dx$ mediante el método de Romberg con 3 decimales correctos (se aclara que el error final sea menor que 3 decimales correctos, no las cuentas intermedias).

Comparar dicho valor con el valor exacto: $I = 1{,}10714871779 = \arctan(2)$.

c) Ahora estimar la integral de b) mediante el método de a). Comparar con el resultado exacto.

***Ejercicio nro. 2***

a) La fórmula general para todos los métodos explícitos de 2 pasos para resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es:

$$w_{n+1} = a_0\cdot w_n + a_1\cdot w_{n-1} + h\cdot\left[b_0\cdot f(t_n;w_n)+b_1\cdot f(t_{n-1};w_{n-1})\right]$$

Encontrar todo los métodos explícitos de dos pasos que tengan orden de consistencia 2. Indicar claramente la relación existente entre los 4 parámetros indicados.

b) Sea el método de 2do. orden

$$w_{n+1} = 3\cdot w_n - 2\cdot w_{n-1} + h\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot f(t_n;w_n)-\frac{3}{2}\cdot f(t_{n-1};w_{n-1})\right]$$ que se aplica al problema con $y'(t)=0; y(0)=0$ y cuya solución exacta vale $y(t)=0$.

i) Mostrar que la solución numérica vale $w_n = 0\forall n$.

ii) Si se perturba los valores iniciales del problema de la siguiente forma $y(0)=\frac{\varepsilon}{2}; y(h)=\varepsilon$. Si $z_n$ es la solución numérica de este problema mostrar que la misma vale $z_n = \varepsilon\cdot 2^{n-1}$.

iii) Deducir a partir de i) e ii) que el método propuesto es inestable.

***Ejercicio nro. 3***

Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} y_1' = A \cdot y_1 \cdot [1 - B \cdot y_2] \\ y_2' = C \cdot y_2 \cdot [D \cdot y_1 - 1] \end{cases} \text{ Con } \begin{cases} y_1(0) = \alpha \\ y_2(0) = \beta \end{cases}$$

Este sistema se denomina modelo presa-depredador de Lotka-Volterra donde $y_1(t)$ es el número de presas e $y_2(t)$ es el número de depredadores.

Sean A=4; B=0,5; C=3 y D=1/3.

a) Mostrar que existen soluciones $y_1(t) = C_1 \neq 0$ y $y_2(t) = C_2 \neq 0$ constantes y diferentes de la solución trivial igual a cero (equilibrio demográfico).

b) Con $y_1(0) = 3$ e $y_2(0) = 5$, plantear la resolución de las ecuaciones de Lotka-Volterra con h=0,1 usando el método de Runge-Kutta de orden 2:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n; w_n) + f(t_n + h; w_n + h \cdot f(t_n; w_n))]$$ convenientemente generalizado. Avanzar 3 pasos de cálculo para estimar las soluciones para t=0,3.