Evaluación integradora del 16/07/2014

Análisis Numérico I (75.12 – 95.04) – Curso nro. 6

Ejercicio nro. 1

Un bloque de masa *"m"* cuelga de un resorte de constante *"k"*. Actúan sobre el bloque la fuerza elástica del resorte y la gravedad. Si *"y(t)"* indica la posición del bloque en el tiempo *"t"* (el movimiento se desarrolla solamente en la dirección vertical) y se considera como dirección positiva de "y" hacia arriba (hacia la pared en que cuelga el resorte), la ecuación del movimiento del bloque es: $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t) - m \cdot g$.

Fijamos el origen $y(0) = 0$ en la posición de equilibrio del resorte (sin bloque, sin estirar y considerando la masa del resorte despreciable). Al colgar el bloque del resorte, éste se estira hasta alcanzar una nueva posición de equilibrio "y_E":

Se pide:

a) Suponiendo $m = 0{,}25kg; k = 0{,}114 \, {}^{N}\!/_{cm}; g = 980 \, {}^{cm}\!/_{seg^2}$ calcular "y_E".

b) Se eleva el bloque 5cm sobre la posición "y_E" y se suelta. Las condiciones iniciales son $y(0) = 5cm + y_E$; $y'(0) = 0 \, {}^{cm}\!/_{seg}$. Reescribir la ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

c) Resolver numéricamente el sistema hallado en (b) mediante el método:

$$\begin{cases} q_1 = h \cdot f(t_n; w_n) \\ q_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{2}{3} \cdot h; w_n + \frac{2}{3} \cdot q_1\right) \\ w_{n+1} = w_{n.} + \frac{1}{4} \cdot [q_1 + 3 \cdot q_2] \end{cases}$$

Convenientemente generalizado para $0 \le t \le 1{,}5seg$ con $h = 0{,}5seg$.

Ejercicio nro. 2

Dado el método numérico $w_{n+1} = -w_n + 2 \cdot w_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot \{5 \cdot f(t_n; w_n) + f(t_{n-1}; w_{n-1})\}$.

Se pide:

a) ¿Qué tipo de método es?
b) Calcular el orden de consistencia del método.
c) Supongamos que se aplica el método anterior para discretizar la ecuación diferencial $y'(t) = -a \cdot y(t)$, $y(0) = w_0$ con $a > 0$. Estudiar la estabilidad.

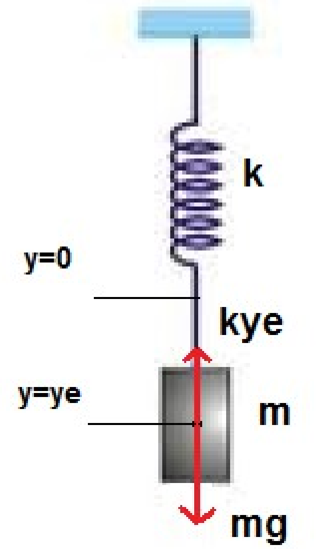
Ejercicio nro. 3

a) La regla del punto medio es una fórmula de integración numérica dada por: $\int_a^b f(x)\cdot dx \cong 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$ con $h=\frac{b-a}{2}$. Deducir la regla compuesta del punto medio. (Ayuda: considerar *n* par y proceder en forma similar a la deducción de la formula compuesta de Simpson).

b) Estimar $I=\int_e^{e+1}\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\cdot dx$ mediante la fórmula de Simpson simple. Acotar el error. Calcular el valor verdadero de la integral y comparar.

Resolucion ejercicio nro. 1

Hagamos primero el dibujo del diagrama de cuerpo libre.



Notar que el valor de "y_E" es negativo (está por debajo del valor *y=0*).

a) Ahora en el punto de equilibrio (con el bloque colgando) el valor de "y_E" quedará como (recordar que la sumatoria de las fuerzas es nula y que la aceleración es nula por encontrarse en equilibrio):

$$m \cdot y''_E(t) = 0 = -k \cdot y_E(t) - m \cdot g \Rightarrow k \cdot y_E(t) = -m \cdot g \Rightarrow y_E = -\frac{m \cdot g}{k}$$

$$y_E = -\frac{m \cdot g}{k} = -\frac{0.25kg \cdot 980\frac{cm}{seg^2}}{0.114 \cdot \frac{N}{cm}} = -\frac{0.25kg \cdot 980\frac{cm}{seg^2}}{11.4\frac{kg}{cm}\frac{cm}{seg^2}} = -\frac{0.25 \cdot 980}{11.4} cm = -21.491cm$$

b) Ahora pasamos la ecuación diferencial de segundo orden a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t) - m \cdot g \Rightarrow y''(t) = -\frac{k}{m} \cdot y(t) - g \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -\frac{k}{m} \cdot y(t) - g \end{cases}$$

En donde los valores iniciales son: $y(0) = 5cm + y_E = (5 - 21{,}491)cm = -16{,}491cm$; $y'(0) = 0 \, {}^{cm}/_{seg}$.

c) Aplicamos ahora el método de Heun (Runge-Kutta de segundo orden) generalizado al sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) = f_1(t; y; z) \\ z'(t) = -\dfrac{k}{m} \cdot y(t) - g = f_2(t; y; z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11} = h \cdot f_1(t_n; v_n; w_n) & q_{12} = h \cdot f_2(t_n; v_n; w_n) \\ q_{21} = h \cdot f_1\left(t_n + \dfrac{2}{3}h; v_n + \dfrac{2}{3}q_{11}; w_n + \dfrac{2}{3}q_{12}\right) & q_{22} = h \cdot f_2\left(t_n + \dfrac{2}{3}h; v_n + \dfrac{2}{3}q_{11}; w_n + \dfrac{2}{3}q_{12}\right) \\ v_{n+1} = v_{n.} + \dfrac{1}{4} \cdot [q_{11} + 3 \cdot q_{21}] & w_{n+1} = w_{n.} + \dfrac{1}{4} \cdot [q_{12} + 3 \cdot q_{22}] \end{cases}$$

Ahora reemplazamos por las ecuaciones particulares del problema

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) = f_1(t; y; z) \\ z'(t) = -\dfrac{k}{m} \cdot y(t) - g = f_2(t; y; z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11} = h \cdot w_n & q_{12} = h \cdot \left(-\dfrac{k}{m} \cdot v_n - g\right) \\ q_{21} = h \cdot \left(w_n + \dfrac{2}{3} \cdot q_{12}\right) & q_{22} = h \cdot \left(-\dfrac{k}{m} \cdot \left(v_n + \dfrac{2}{3} \cdot q_{11}\right) - g\right) \\ v_{n+1} = v_{n.} + \dfrac{1}{4} \cdot [q_{11} + 3 \cdot q_{21}] & w_{n+1} = w_{n.} + \dfrac{1}{4} \cdot [q_{12} + 3 \cdot q_{22}] \end{cases}$$

Este método ya se encuentra convenientemente generalizado y lo usamos para resolver el problema (usamos como unidades cm y seg sin indicarlas):

$$\begin{cases} q_{11} = h \cdot w_0 & q_{12} = h \cdot \left(-\dfrac{k}{m} \cdot v_0 - g\right) \\ q_{21} = h \cdot \left(w_n + \dfrac{2}{3} \cdot q_{12}\right) & q_{22} = h \cdot \left(-\dfrac{k}{m} \cdot \left(v_n + \dfrac{2}{3} \cdot q_{11}\right) - g\right) \\ v_1 = v_{0.} + \dfrac{1}{4}[q_{11} + 3 \cdot q_{21}] & w_1 = w_{0.} + \dfrac{1}{4}[q_{12} + 3 \cdot q_{22}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11} = 0.5 \cdot 0 = 0 & q_{12} = 0.5 \cdot (-45.6 \cdot (-16.491) - 980) = -114.005 \\ q_{21} = 0.5 \cdot \left(0 + \dfrac{2}{3} \cdot (-114.005)\right) = -38.002 & q_{22} = 0.5 \cdot \left(-45.6 \cdot \left((-16.491) + \dfrac{2}{3} \cdot 0\right) - 980\right) = -114.005 \\ v_1 = -16.49 + \dfrac{1}{4} \cdot [0 + 3 \cdot (-38.002)] = -44.992 & w_1 = 0 + \dfrac{1}{4} \cdot [-114.005 + 3 \cdot (-114.005)] = -114.005 \end{cases}$$

Seguimos hasta el valor de t=1.5.

$$\begin{cases} q_{11} = 0.5 \cdot (-114.005) = -57.003 & q_{12} = 0.5 \cdot (-45.6 \cdot (-44.992) - 980) = 535.818 \\ q_{21} = 0.5 \cdot \left((-114.005) + \dfrac{2}{3} \cdot 535.818\right) = 121.6 & q_{22} = 0.5 \cdot \left(-45.6 \cdot \left(-44.992 + \dfrac{2}{3} \cdot -57.003\right) - 980\right) = 1402.3 \\ v_2 = -44.992 + \dfrac{1}{4} \cdot [-57.003 + 3 \cdot 121.6] = 31.957 & w_2 = -114.005 + \dfrac{1}{4} \cdot [535.818 + 3 \cdot 1402.3] = 1071.7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11}=0.5\cdot(1071.7)=535.84 & q_{12}=0.5\cdot(-45.6\cdot 31.957-980)=-1218.6 \\ q_{21}=0.5\cdot\left(1071.7+\frac{2}{3}\cdot(-1218.6)\right)=129.64 & q_{22}=0.5\cdot\left(-45.6\cdot\left(31.957+\frac{2}{3}\cdot 535.84\right)-980\right)=\text{-}9363.4 \\ v_3=31.957+\frac{1}{4}\cdot[535.84+3\cdot 129.64]=263.15 & w_3=1071.7+\frac{1}{4}\cdot[-1218.6-3\cdot 9363.4]=-6255.5 \end{cases}$$

Por lo que el valor para t=1.5 será $y(1.5)\cong 263.15cm$.

Calculemos la solución exacta para compararla:

$$m\cdot y''(t)=-k\cdot y(t)-m\cdot g\Rightarrow y''(t)=-\frac{k}{m}\cdot y(t)-g\Rightarrow y''(t)+\frac{k}{m}\cdot y(t)=-g\Rightarrow$$

$$y''(t)+\omega^2\cdot y(t)=-g\Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_H(t)=A\cdot\cos(\omega t)+B\cdot sen(\omega t) \\ y_P(t)=-\dfrac{g}{\omega^2} \end{cases}\Rightarrow y_G(t)=y_H(t)+y_P(t)\Rightarrow$$

$$y(t)=A\cdot\cos(\omega t)+B\cdot sen(\omega t)-\frac{g}{\omega^2}\Rightarrow y(0)=A-\frac{g}{\omega^2}=-16.491cm$$

$$y'(t)=-\omega\cdot A\cdot sen(\omega t)+\omega\cdot B\cdot\cos(\omega t)\Rightarrow y'(0)=\omega\cdot B=0$$

$$y(t)=5cm\cdot\cos(6.7528\cdot t)-21.491cm\Rightarrow y(1.5)=-25.301cm$$

Notar la gran diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada por este método de orden 2.

<u>Resolucion ejercicio nro. 2</u>

Se pide:

a) ¿Qué tipo de método es? Es un método explícito multipaso también denominado predictor (ya que siempre predice la solución y no precisa de valores predichos para el cálculo).

b) Calcular el orden de consistencia del método.

El método es $w_{n+1}=-w_n+2\cdot w_{n-1}+\frac{h}{2}\cdot\{5\cdot f(t_n;w_n)+f(t_{n-1};w_{n-1})\}$, pasémoslo al continuo: $w(t+h)=-w(t)+2\cdot w(t-h)+\frac{h}{2}\cdot\{5\cdot f(t;w(t))+f(t-h;w(t-h))\}$.

Realizamos las aproximaciones del desarrollo en serie de Taylor. Algo a tener en cuenta es hasta qué término del desarrollo en serie debemos realizar dicho desarrollo y la respuesta es hasta *n+2* si *n* es el número de puntos intervinientes en un método explícito y hasta *n+3* en un método implícito. Por ejemplo en el método de Euler (1 punto explicito) hacemos hasta orden 3, en el método de salto de rana (2 puntos explicito, hacemos hasta orden 4), en Crank-Nicholson (1 punto implícito, hacemos hasta orden 4), y así sucesivamente.

En este caso es explícito con dos puntos (en t y t-h), hacemos hasta orden 4.

Tener en cuenta que será hasta orden 3 (uno menos) en las *"fs."*, y será hasta orden 4 en las *"w"* para que tengan el mismo orden:

$$w(t+h) = w(t) + h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) + \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + \frac{h^4}{24} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^5)$$

$$w(t-h) = w(t) - h \cdot w'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) - \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) + \frac{h^4}{24} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^5)$$

$$f(t-h; w(t-h)) = w'(t-h) = w'(t) - h \cdot w''(t) + \frac{h^2}{2} \cdot w'''(t) - \frac{h^3}{6} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4)$$

$$f(t; w(t)) = w'(t)$$

El Tau lo construimos con la resta entre la aproximación de la derivada y la de la f:

$$\tau = \left| \frac{w(t+h) + w(t) - 2 \cdot w(t-h)}{2h} - \frac{1}{4} \cdot \{5 \cdot f(t; w(t)) + f(t-h; w(t-h))\} \right|$$

$$w(t+h) + w(t) - 2 \cdot w(t-h) = w(t) \cdot (1+1-2) + h \cdot w'(t) \cdot (1-(-1)2) + \frac{h^2}{2} \cdot w''(t) \cdot (1-2) +$$

$$+ \frac{h^3}{6} \cdot w'''(t) \cdot (1-(-1)2) + \frac{h^4}{24} \cdot w^{(4)}(t) \cdot (1-2) + \mathrm{O}(h^5) \Rightarrow$$

$$\frac{w(t+h) + w(t) - 2 \cdot w(t-h)}{2h} = \frac{3}{2} \cdot w'(t) - \frac{h}{4} \cdot w''(t) + \frac{1h^2}{4} \cdot w'''(t) - \frac{3h^3}{48} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4)$$

$$\frac{1}{4} \cdot \{5 \cdot f(t; w(t)) + f(t-h; w(t-h))\} = \frac{1}{4} \cdot \{5 \cdot w'(t) + w'(t-h)\}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \{5 \cdot w'(t) + w'(t-h)\} = \frac{3}{2} \cdot w'(t) - \frac{h}{4} \cdot w''(t) + \frac{1h^2}{8} \cdot w'''(t) - \frac{1h^3}{24} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4)$$

$$\tau = \left| \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot w'(t) - \frac{h}{4} \cdot w''(t) + \frac{1h^2}{4} \cdot w'''(t) - \frac{3h^3}{48} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4) - \\ \left(\frac{3}{2} \cdot w'(t) - \frac{h}{4} \cdot w''(t) + \frac{1h^2}{8} \cdot w'''(t) - \frac{1h^3}{24} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4) \right) \end{array} \right|$$

El Tau finalmente queda como:

$$\tau = \left| \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot w'(t) - \frac{h}{4} \cdot w''(t) + \frac{1h^2}{4} \cdot w'''(t) - \frac{3h^3}{48} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4) - \\ \left(\frac{3}{2} \cdot w'(t) - \frac{h}{4} \cdot w''(t) + \frac{1h^2}{8} \cdot w'''(t) - \frac{1h^3}{24} \cdot w^{(4)}(t) + \mathrm{O}(h^4) \right) \end{array} \right|$$

$$\tau = \left| h^2 \cdot w'''(t) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + h^3 \cdot w^{(4)}(t) \cdot \left(\frac{3}{48} - \frac{1}{24} \right) + \mathrm{O}(h^4) \right| \le M \cdot h^2$$

Con lo que queda de orden de consistencia 2. Siendo $M=\frac{1}{4}\cdot \max\limits_{t-h\leq\xi\leq t+h}\left\{\left|w'''(\xi)\right|\right\}$

c) Supongamos que se aplica el método anterior para discretizar la ecuación diferencial $y'(t)=-a\cdot y(t)$, $y(0)=w_0$ con $a>0$. Estudiar la estabilidad.

Partimos de $w_{n+1}=-w_n+2\cdot w_{n-1}+\frac{h}{2}\cdot\{5\cdot f(t_n;w_n)+f(t_{n-1};w_{n-1})\}$ tomando que

$f(t,y(t))=-a\cdot y(t)$ nos queda $w_{n+1}=-w_n+2\cdot w_{n-1}+\frac{h}{2}\cdot\{5(-a\cdot w_n)+(-a\cdot w_{n-1})\}$.

Ahora lo expresamos en función de los w :

$$w_{n+1}=w_n\cdot\left(-1-\frac{5}{2}ah\right)+w_{n-1}\cdot\left(2-\frac{1}{2}ah\right)$$

Es una combinación lineal de $w_{n-1};w_n$. Planteamos las pequeñas perturbaciones:

$$\begin{cases} v_{n+1}=w_n \\ w_{n+1}=w_n\cdot\left(-1-\frac{5}{2}ah\right)+v_n\cdot\left(2-\frac{1}{2}ah\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n\to\delta_n \\ w_n\to\varepsilon_n\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}\delta_n\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2-\frac{1}{2}ah & -1-\frac{5}{2}ah\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_n\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}$$

y a partir de las mismas llegamos a la matriz de las perturbaciones:
Ahora buscamos los autovalores de dicha matriz de 2x2:

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2-\frac{1}{2}ah & -1-\frac{5}{2}ah\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M-\lambda\cdot Id)=0\Rightarrow\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 2-\frac{1}{2}ah & -1-\frac{5}{2}ah-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^2+\left(1+\frac{5}{2}ah\right)\cdot\lambda-\left(2-\frac{1}{2}ah\right)=0\Rightarrow\lambda=\frac{-\left(1+\frac{5}{2}ah\right)}{2}\pm\frac{\sqrt{\left(1+\frac{5}{2}ah\right)^2+4\cdot\left(2-\frac{1}{2}ah\right)}}{2}$$

$$\lambda=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}ah\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}ah\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}ah\right)}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}ah\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}ah+\frac{25}{16}a^2h^2\right)+\left(2-\frac{1}{2}ah\right)}$$

$$\lambda=-\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{4}ah\right)\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}ah+\frac{25}{16}a^2h^2}$$

Notar que para los valores negativos el autovalor en módulo va a ser siempre mayor que 2 (va a ser menor que -2), con lo cual el método es siempre inestable ya que $ah>0$.

Ejercicio nro. 3

a) La regla del punto medio es una fórmula de integración numérica dada por: $\int_a^b f(x)\cdot dx \cong 2hf\left(\frac{a+b}{2}\right)$ con $h=\frac{b-a}{2}$. Deducir la regla compuesta del punto medio. (Ayuda: considerar *n* par y proceder en forma similar a la deducción de la formula compuesta de Simpson).

Resolución:

Consideremos n par y deduzcamos la fórmula de integración compuesta del punto medio a partir de tomar los puntos $x_0, x_1, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}$ siendo

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\cdot dx \cong 2hf\left(x_{2j-1}\right) \Rightarrow \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\cdot dx = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} f(x)\cdot dx \cong \sum_{j=0}^{n-1} 2hf\left(x_{2j+1}\right) = 2h\sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_{2j+1}\right)$$

$$h=\frac{x_{2j+2}-x_{2j}}{2}\ \forall 0\le j\le n-1$$

b) Estimar $I=\int_e^{e+1}\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\cdot dx$ mediante la fórmula de Simpson simple. Acotar el error. Calcular el valor verdadero de la integral y comparar.

Resolución:

$$I=\int_e^{e+1}\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\cdot dx=\frac{h}{3}\cdot\left(f\left(x_0\right)+4\cdot f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)-\frac{h^5}{90}\cdot f^{(4)}(\xi)$$

$$h=\frac{e+1-e}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow S(h=0.5)=\frac{0.5}{3}\cdot\left(\frac{1}{e\cdot\ln(e)}+4\cdot\frac{1}{(e+0.5)\cdot\ln(e+0.5)}+\frac{1}{(e+1)\cdot\ln(e+1)}\right)$$

$$S(h=0.5)=0.27267$$

Calculemos el error derivando 4 veces a la función:

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(x)}=x^{-1}\cdot\ln^{-1}(x)\Rightarrow f'(x)=-x^{-2}\cdot\ln^{-1}(x)-x^{-2}\cdot\ln^{-2}(x)$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3\cdot\ln(x)}+\frac{3}{x^3\cdot\ln^2(x)}+\frac{2}{x^3\cdot\ln^3(x)}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3\cdot\ln(x)}+\frac{3}{x^3\cdot\ln^2(x)}+\frac{2}{x^3\cdot\ln^3(x)}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4\cdot\ln(x)}-\frac{11}{x^4\cdot\ln^2(x)}-\frac{12}{x^4\cdot\ln^3(x)}-\frac{6}{x^4\cdot\ln^4(x)}$$

$$\max_{e<x<e+1}\left\{\left|f^{(4)}(x)\right|\right\}=0.64105\Rightarrow \mathrm{Err}=\left|\mathrm{I-S(h=0.5)}\right|\leq\frac{0.5^5}{90}\cdot\left|f^{(4)}(\xi)\right|\leq\frac{0.5^5}{90}\cdot 0.64105\leq 0.00023$$

$$I=0.27267\pm 0.00023$$

Calculemos el verdadero valor para analizar el error verdadero (I=0.27251):

$$Err_v=\left|I-S(h=0.5)\right|=\left|0.27251-0.27267\right|=0.00016\leq 0.00023$$

Como se puede ver el error verdadero y la cota del error verdadero resultan bastante similares.