Evaluación integradora del 07/07/2014

Análisis Numérico I (75.12 – 95.04) – Curso nro. 6

Ejercicio nro. 1

La "función error" (*erf(t)*) se define mediante la integral $y(t) = erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-x^2} \cdot dx$ pero puede definirse también como la solución de la ecuación diferencial $y'(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t^2}$ con $y(0) = 0$.

Se pide:

a) Estimar el valor de $y(1)$ utilizando la fórmula integral de *erf* mediante el método de Simpson con *h=0.25*. Acotar el error cometido con este método.

b) Ahora estimar el valor de $y(1)$ utilizando la fórmula diferencial de *erf* mediante el método predictor-corrector:

$$\begin{cases} w_{n+1}^{*} = w_{n.} + \frac{h}{2}\left[f(t_n; w_n) + f(t_n + h; w_n + h \cdot f(t_n; w_n))\right] \\ w_{n+1} = w_{n.} + \frac{h}{2}\left[f(t_n; w_n) + f(t_n + h; w_{n+1}^{*})\right] \end{cases}$$

con *h=0.25.*

c) Comparar ambos resultados con el verdadero valor $y(1) = 0.84270$.

Ejercicio nro. 2

Dado el método numérico para resolver el problema $y'(t) = f(t; y(t))$ con $y(t_0) = y_0$:

$$w_{n+1} = 3 \cdot w_n - 2 \cdot w_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot \left\{ f(t_n; w_n) - 3 \cdot f(t_{n-1}; w_{n-1}) \right\}.$$

Se pide:

a) Estudiar la consistencia del método.

b) Estudiar la estabilidad del método cuando se aplica a la ecuación $y'(t) = \lambda \cdot y(t)$, con $y(t_0) = y_0$.

Resolución Ejercicio nro. 1

a) Estimemos la integral por el método de Simpson utilizando como ***h=0.25***.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = S(h) + Err(h)$$

$$S(h) = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + 2\cdot\sum_{j=1}^{\left(n/2\right)-1} f\left(x_{2j}\right) + 4\cdot\sum_{j=1}^{n/2} f\left(x_{2j-1}\right) + f(b)\right]$$

$$Err(h) = -\frac{(b-a)}{180}\cdot h^4\cdot f(\xi)$$

Calculemos entonces *S(h)* y la cota de *Err(h)*.

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = S(h) + Err(h)$$

$$y(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^1 e^{-x^2}\cdot dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot S(h=0.25) \Rightarrow n = 4$$

$$S(h=0.25) = \frac{0.25}{3}\cdot\left[f(0) + 2\cdot\sum_{j=1}^{\left(4/2\right)-1} f\left(x_{2j}\right) + 4\cdot\sum_{j=1}^{4/2} f\left(x_{2j-1}\right) + f(1)\right]$$

$$S(h=0.25) = \frac{0.25}{3}\cdot\left[f(0) + 2\cdot f(x_2) + 4\cdot\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + f(1)\right]$$

$$S(h=0.25) = \frac{0.25}{3}\cdot\left[e^{-0^2} + 2\cdot e^{-0.5^2} + 4\cdot\left(e^{-0.25^2} + e^{-0.75^2}\right) + e^{-1^2}\right]$$

$$S(h=0.25) = \frac{0.25}{3}\cdot\left[1 + 2\cdot 0.7788 + 4\cdot(0.93941 + 0.56978) + 0.36788\right] = 0.74686$$

$$y(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 0.74686 = 0.84274$$

Con lo que queda $y(1) = 0.84274$.

Ahora calculamos la cota del error.

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} \Rightarrow f^{(2)}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[(-2x)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}+(-2)\cdot e^{-x^2}\right]$$

$$f^{(2)}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[\left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}\right] \Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[(8x)\cdot e^{-x^2}+\left(4x^2-2\right)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}\right]$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[\left(-8x^3+12x\right)\cdot e^{-x^2}\right] \Rightarrow f^{(4)}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[\left(-24x^2+12\right)\cdot e^{-x^2}+\left(-8x^3+12x\right)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}\right.$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[\left(16x^4-48x^2+12\right)\cdot e^{-x^2}\right] \Rightarrow \max_{0<x<1}\left(\left|f^{(4)}(x)\right|\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 12=13.541$$

$$Err(h)=\left|-\frac{(1-0)}{180}\cdot 0.25^4\cdot f^{(4)}(\xi)\right|\leq 0.00029385\leq 0.0003$$

$\mathrm{I}=0.84274\pm 0.00029$

Con lo que la cota del error vale 0.00029.

b) Ahora estimamos el valor de $y(1)$ utilizando la fórmula diferencial de *erf* mediante el método predictor-corrector formado por Runge-Kutta de orden 2 (predictor) y Crank-Nicholson (corrector):

$$\begin{cases} w_{n+1}^{*}=w_{n.}+\dfrac{h}{2}\left[f\left(t_n;w_n\right)+f\left(t_n+h;w_n+h\cdot f\left(t_n;w_n\right)\right)\right] \\ w_{n+1}=w_{n.}+\dfrac{h}{2}\left[f\left(t_n;w_n\right)+f\left(t_n+h;w_{n+1}^{*}\right)\right] \end{cases}$$

$$y'(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t^2}=f(t,y(t))$$

$$\begin{cases} w_{n+1}^{*}=w_{n.}+\dfrac{h}{2}\left[\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_n^2}+f\left(t_n+h;w_n+h\cdot\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_n^2}\right)\right] \\ w_{n+1}=w_{n.}+\dfrac{h}{2}\left[\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_n^2}+\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_{n+1}^2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{n+1}^{*}=w_{n.}+\dfrac{h}{2}\left[\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_n^2}+\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_{n+1}^2}\right] \\ w_{n+1}=w_{n.}+\dfrac{h}{2}\left[\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_n^2}+\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_{n+1}^2}\right] \end{cases}$$

con *h=0.25 e y(0)=0.* Comencemos los cálculos.

Veamos previamente que el método predictor no calcula w_{n+1}^{*} con lo cual se puede calcular directamente con el método corrector el valor de w_{n+1}.

$$w_{n+1} = w_{n.} + \frac{h}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_n^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-t_{n+1}^2}\right]$$

$$w_1 = w_{0.} + \frac{0.25}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.25^2}\right] = 0 + \frac{0.25}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.25^2}\right] = 0.27355$$

$$w_2 = w_{1.} + \frac{0.25}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.25^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.5^2}\right] = 0.27355 + 0.24235 = 0.5159$$

$$w_3 = w_{2.} + \frac{0.25}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.5^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.75^2}\right] = 0.5159 + 0.19021 = 0.70611$$

$$w_4 = w_{3.} + \frac{0.25}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-0.75^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-1^2}\right] = 0.70611 + 0.13225 = 0.83837$$

Con lo que queda $y(1) = 0.83837$.

c) Comparamos ambos resultados y vemos que es mejor el resultado de la parte (a) con un error verdadero de $|y(1) - S(h = 0.25)| = 0.00004$ (el error es de orden h a la cuarta) y el error verdadero de la parte (b) es $|y(1) - w_4| = 0.004$ (el error es de orden h al cuadrado).

<u>Resolución Ejercicio nro. 2</u>

a) Estudiemos la consistencia del método haciendo desarrollo en serie de Taylor:

$$w_{n+1} = 3\cdot w_n - 2\cdot w_{n-1} + \frac{h}{2}\cdot\{f(t_n; w_n) - 3\cdot f(t_{n-1}; w_{n-1})\}$$

Pasamos al continuo:

$$y(t+h) = 3\cdot y(t) - 2\cdot y(t-h) + \frac{h}{2}\cdot\{f(t; y(t)) - 3\cdot f(t-h; y(t-h))\}$$

Ahora reemplazamos las *f* por las *y'*.

$$y(t+h) = 3\cdot y(t) - 2\cdot y(t-h) + \frac{h}{2}\cdot\{y'(t) - 3\cdot y'(t-h)\}$$

Calculamos el tau y los desarrollos en serie de Taylor:

$$\tau = \left| \frac{y(t+h) - 3\cdot y(t) + 2\cdot y(t-h)}{2h} - \frac{1}{4}\cdot [y'(t) - 3\cdot y'(t-h)] \right|$$

$$y(t+h) = y(t) + h\cdot y'(t) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(t) + \frac{h^3}{6}\cdot y'''(t) + \frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^5)$$

$$y(t-h) = y(t) - h\cdot y'(t) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(t) - \frac{h^3}{6}\cdot y'''(t) + \frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^5)$$

$$y'(t-h) = y'(t) - h\cdot y''(t) + \frac{h^2}{2}\cdot y'''(t) - \frac{h^3}{6}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^4)$$

En los desarrollos en serie de Taylor lo hacemos hasta orden 4 en las "*y*" y de orden 3 para "*y'*"
.

$$\tau = \left| \frac{\begin{array}{l} y(t) + h\cdot y'(t) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(t) + \frac{h^3}{6}\cdot y'''(t) + \frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^5) - 3\cdot y(t) + \\ 2\cdot\left(y(t) - h\cdot y'(t) + \frac{h^2}{2}\cdot y''(t) - \frac{h^3}{6}\cdot y'''(t) + \frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^5)\right) \end{array}}{2h} - \atop \frac{1}{4}\left[y'(t) - 3\cdot\left(y'(t) - h\cdot y''(t) + \frac{h^2}{2}\cdot y'''(t) - \frac{h^3}{6}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^4)\right)\right] \right| =$$

$$\tau = \left| \frac{-h\cdot y'(t) + \frac{3h^2}{2}\cdot y''(t) - \frac{h^3}{6}\cdot y'''(t) + \frac{3h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^5)}{2h} - \frac{1}{4}\cdot \atop \left[-2y'(t) + 3h\cdot y''(t) - \frac{3h^2}{2}\cdot y'''(t) + \frac{3h^3}{6}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^4)\right] \right|$$

$$\tau = \left| -\frac{1}{2}\cdot y'(t) + \frac{3h}{4}\cdot y''(t) - \frac{h^2}{12}\cdot y'''(t) + \frac{3h^3}{48}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^4) - \atop \left[-\frac{1}{2}\cdot y'(t) + \frac{3h}{4}\cdot y''(t) - \frac{3h^2}{8}\cdot y'''(t) + \frac{3h^3}{24}\cdot y^{(4)}(t) + O(h^4)\right] \right|$$

$$\tau = \left| \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\right)\cdot h^2\cdot y'''(t) + \left(-\frac{3}{24} + \frac{3}{48}\right)\cdot h^3\cdot y^{(4)}(t) + O(h^4) \right| \le \left(\frac{9}{24} - \frac{4}{24}\right)\cdot h^2\cdot y'''(t) + O(h^3)$$

$$\tau \le \frac{5}{24}\cdot h^2\cdot y'''(t) + O(h^3) \le M\cdot h^2$$

$$M = \frac{5}{24}\cdot \max_{t-h<\xi<t+h}\{|y'''(\xi)|\}$$

Con lo cual el orden del método es "2".

b) Estudiar la estabilidad del método cuando se aplica a la ecuación $y'(t)=\lambda\cdot y(t)$, con $y(t_0)=y_0$.

$$w_{n+1}=3\cdot w_n-2\cdot w_{n-1}+\frac{h}{2}\cdot\{f(t_n;w_n)-3\cdot f(t_{n-1};w_{n-1})\}\Rightarrow$$

$$w_{n+1}=3\cdot w_n-2\cdot w_{n-1}+\frac{h}{2}\cdot\{\lambda\cdot w_n-3\cdot\lambda\cdot w_{n-1}\}=\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot w_n-\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)\cdot w_{n-1}$$

Ahora aplicamos perturbaciones sabiendo que la ecuación es lineal. Al ser un método multipaso debemos agregar una nueva variable para el paso anterior, con lo cual nos queda un sistema también lineal al que vamos a perturbar.
Con estas consideraciones las perturbaciones van a quedar:

$$\begin{cases} v_{n+1}=w_n \\ w_{n+1}=\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot w_n-\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)\cdot v_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n\to\delta_n \\ w_n\to\varepsilon_n \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v_{n+1}+\delta_{n+1}=w_n+\varepsilon_n \\ w_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot(w_n+\varepsilon_n)-\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)\cdot(v_n+\delta_n) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \delta_{n+1}=\varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1}=\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot\varepsilon_n-\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)\cdot\delta_n \end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}\delta_{n+1}\\ \varepsilon_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right) & 3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta_n\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}$$

Ahora encontramos los autovalores de la matriz perturbada a partir de pedir que sea singular $M_{Per}\underset{\rightarrow}{v}=\mu\underset{\rightarrow}{v}\Rightarrow(M_{Per}-\mu\cdot Id)\cdot\underset{\rightarrow}{v}=\underset{\rightarrow}{0}$

$$M_{Per}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right) & 3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\det\begin{pmatrix}-\mu & 1\\ -\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right) & 3+\lambda\cdot\frac{h}{2}-\mu\end{pmatrix}=0$$

$$P(\mu)=\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}-\mu\right)\cdot(-\mu)+\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)=0\Rightarrow P(\mu)=\mu^2-\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)\cdot\mu+\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)=0$$

$$\mu=\frac{\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)\pm\sqrt{\left(3+\lambda\cdot\frac{h}{2}\right)^2-4\cdot\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)}}{2}=\frac{3}{2}+\lambda\cdot\frac{h}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\lambda\cdot\frac{h}{4}\right)^2-\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)}$$

$$\mu=\frac{3}{2}+\lambda\cdot\frac{h}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\lambda\cdot\frac{h}{4}\right)^2-\left(2+\lambda\cdot\frac{3h}{2}\right)}=\frac{3}{2}+\lambda\cdot\frac{h}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\lambda\cdot\frac{3h}{4}+\lambda^2\cdot\frac{h^2}{16}-2-\lambda\cdot\frac{3h}{2}}$$

Con estos valores de mu vemos para qué lambda y h converge:

$$\mu = \frac{3}{2} + \lambda \cdot \frac{h}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \lambda \cdot \frac{3h}{4} + \lambda^2 \cdot \frac{h^2}{16} - 2 - \lambda \cdot \frac{3h}{2}} = \frac{3}{2} + \lambda \cdot \frac{h}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda \cdot \frac{3h}{4} + \lambda^2 \cdot \frac{h^2}{16}}$$

$$\mu = \frac{3}{2} + \lambda \cdot \frac{h}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \lambda \cdot 3h + \lambda^2 \cdot \frac{h^2}{4}}$$

Con estos valores de mu vemos para qué lambda y h converge: