Evaluación integradora de fecha 07/08/2013

Análisis Numérico I (75.12-95.04)

Ejercicio nro. 1

Dada la tabla de una función f(x):

x	$f(x)$
1	2,71828
1,25	4,36293
1,5	6,72253
1,75	10,0706
2	14,7781
2,25	21,3474
2,5	30,4562
2,75	43,0172
3	60,2566

Estimar la integral $\int_1^3 f(x)\cdot dx$ mediante:

a) El método de trapecios compuesto.

Resolución 1-a

Para tener el menor error vamos a utilizar la fórmula de trapecios compuesto usando todos los puntos. Notar que en dichas fórmulas el paso y los puntos equiespaciados vienen dados por $h = {(b-a)}/{n} = {(3-1)}/{n} = 0{,}25 \Rightarrow n = {(b-a)}/{h} = {(3-1)}/{0{,}25} = 8$ y $x_j = a + j\cdot h = 1 + j\cdot 0{,}25$. La fórmula de trapecios compuesto es:

$$I = \int_a^b f(x)\cdot dx = \frac{h}{2}\cdot\left[f(x_0) + 2\cdot\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right] + E(f)$$

$$E(f) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f^{(2)}(\mu)$$

$$\mu \in (a,b)$$

Realizamos las cuentas:

$$I=\int_1^3 f(x)\cdot dx \cong T(h=0{,}25)=\frac{0{,}25}{2}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot\sum_{j=1}^{7} f(x_j)+f(x_8)\right]=$$

$$T(h=0{,}25)=\frac{0{,}25}{2}\cdot\left[2{,}71828+2\cdot\begin{bmatrix}4{,}36293+6{,}72253+10{,}0706+14{,}7781+\\21{,}3474+30{,}4562+43{,}0172\end{bmatrix}+60{,}2566\right]=$$

$$T(h=0{,}25)=\frac{0{,}25}{2}\cdot[2{,}71828+2\cdot 130{,}75496+60{,}2566]=\frac{0{,}25}{2}\cdot 324{,}4848=40{,}5606$$

b) El método de Simpson compuesto.

<u>Resolución 1-b</u>

Para tener el menor error vamos a utilizar la fórmula de Simpson compuesto usando todos los puntos. Notar que en dichas fórmulas el paso y los puntos equiespaciados vienen dados por $h=(b-a)/n=(3-1)/n=0{,}25 \Rightarrow n=(b-a)/h=(3-1)/0{,}25=8$ y $x_j=a+j\cdot h=1+j\cdot 0{,}25$. La fórmula de Simpson compuesto es:

$$I=\int_a^b f(x)\cdot dx=\frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot\sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j})+4\cdot\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1})+f(x_n)\right]+E(f)$$

$$E(f)=-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$$

$$\mu\in(a,b)$$

Realizamos las cuentas:

$$I=\int_1^3 f(x)\cdot dx \cong S(h=0{,}25)=\frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot\sum_{j=1}^{(8/2)-1} f(x_{2j})+4\cdot\sum_{j=1}^{8/2} f(x_{2j-1})+f(x_n)\right]=$$

$$S(h=0{,}25)=\frac{h}{3}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot\sum_{j=1}^{3} f(x_{2j})+4\cdot\sum_{j=1}^{4} f(x_{2j-1})+f(x_8)\right]$$

$$S(h=0{,}25)=\frac{0{,}25}{3}\cdot\left[2{,}71828+2\cdot\begin{bmatrix}6{,}72253+14{,}7781+\\30{,}4562\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}4{,}36293+10{,}0706+\\21{,}3474+43{,}0172\end{bmatrix}+60{,}2566\right]=$$

$$S(h=0{,}25)=\frac{0{,}25}{3}\cdot[2{,}71828+2\cdot 51{,}95683+4\cdot 78{,}79813+60{,}2566]=$$

$$S(h=0{,}25)=\frac{0{,}25}{3}\cdot 482{,}08106=40{,}1734$$

c) El método de Romberg.

<u>Resolución 1-c</u>

Para este método debemos calcular primeramente todas las integrales por el método de los trapecios:

$$T(h=2)=\frac{2}{2}\cdot\left[f(x_0)+f(x_8)\right]=\frac{2}{2}\cdot\left[2{,}71828+60{,}2566\right]=62{,}9749$$
$$T(h=1)=\frac{1}{2}\cdot\left[f(x_0)+2\cdot f(x_4)+f(x_8)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[2{,}71828+2\cdot 14{,}7781+60{,}2566\right]=46{,}2655$$
$$T(h=0{,}5)=\frac{0{,}5}{2}\cdot\left[2{,}71828+2\cdot\left[6{,}72253+14{,}7781+30{,}4562\right]+60{,}2566\right]=41{,}7221$$
$$T(h=0{,}25)=40{,}5606$$
$$R_{11}=62{,}9749$$
$$R_{21}=46{,}2655 \quad R_{22}=\frac{4\cdot R_{21}-R_{11}}{4-1}=40{,}6957$$
$$R_{31}=41{,}7221 \quad R_{32}=\frac{4\cdot R_{31}-R_{21}}{4-1}=40{,}2076 \quad R_{33}=\frac{16\cdot R_{32}-R_{22}}{16-1}=40{,}1751$$
$$R_{41}=40{,}5606 \quad R_{42}=\frac{4\cdot R_{41}-R_{31}}{4-1}=40{,}1734 \quad R_{43}=\frac{16\cdot R_{42}-R_{32}}{16-1}=40{,}1711 \quad R_{44}=\frac{64\cdot R_{43}-R_{33}}{64-1}=40{,}1710$$

Notar que el valor de $R_{41}=40{,}5606=T(h=0{,}25)$ y que el $R_{42}=40{,}1734=S(h=0{,}25)$ valores calculados con anterioridad en a) y b).
El valor final de Romberg resulta $R=R_{44}=40{,}1710$.

d) Si se sabe que la función a integrar es $f(x)=x\cdot e^x$, calcular el verdadero valor de la integral y los errores de cada estimación de los puntos anteriores. En el caso particular de trapecios y Simpson comprobar que el error verdadero está dentro de las cotas de los errores de los métodos.

Resolución 1-d

Integremos exactamente la integral, hallando su primitiva mediante el método de integración por partes usando el mecanismo determinado por la sigla ILPET (inversa, logarítmica, polinómica, exponencial y trigonométrica) para utilizar el método de integración por partes.

$$I=\int_1^3 f(x)\cdot dx=\int_1^3 x\cdot e^x\cdot dx=\left[x\cdot e^x\right]_1^3-\int_1^3 e^x\cdot dx=\left[x\cdot e^x-e^x\right]_1^3=\left[(x-1)\cdot e^x\right]_1^3$$
$$I=\left[(x-1)\cdot e^x\right]_1^3=(3-1)\cdot e^3-(1-1)\cdot e^1=2\cdot e^3=40{,}1711$$

Con lo cual los errores de los métodos serán:
$$e_{vT}=\left|I-T(h=0{,}25)\right|=\left|40{,}1711-40{,}5606\right|=0{,}39\leq 0{,}4$$
$$e_{vS}=\left|I-S(h=0{,}25)\right|=\left|40{,}1711-40{,}1734\right|=0{,}0023\leq 0{,}003$$
$$e_{vR}=\left|I-R(h=0{,}25)\right|=\left|40{,}1711-40{,}1710\right|=0{,}0001$$

Ahora calculamos las cotas de los errores de los métodos de trapecios y de Simpson:
$$E(T(f))=\left|-\frac{(b-a)}{12}h^2 f^{(2)}(\mu)\right|=\frac{(3-1)}{12}\cdot 0{,}25^2 f^{(2)}(\mu)$$
$$E(S(f))=\left|-\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)\right|=\frac{(3-1)}{180}\cdot 0{,}25^4 f^{(4)}(\mu)$$
$$\mu\in(a,b)$$

Ahora calculamos las derivadas de *f(x)* y sus cotas en el intervalo propuesto:

$$f(x) = x \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = \left[x \cdot e^x\right]' = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$$

$$f''(x) = \left[(x+1) \cdot e^x\right]' = e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$$

$$f^{(3)}(x) = \left[(x+2) \cdot e^x\right]' = e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x$$

$$f^{(4)}(x) = \left[(x+3) \cdot e^x\right]' = e^x + (x+3) \cdot e^x = (x+4) \cdot e^x$$

$$\left|f''(x)\right| = \left|(x+2) \cdot e^x\right| \leq \left|(3+2) \cdot e^3\right| = 100{,}4$$

$$\left|f^{(4)}(x)\right| = \left|(x+4) \cdot e^x\right| \leq \left|(3+4) \cdot e^3\right| = 140{,}6 \Rightarrow$$

$$E(T(f)) = \left|-\frac{(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\mu)\right| = \frac{(3-1)}{12} \cdot 0{,}25^2 \max_{1<x<3}\left|f^{(2)}(x)\right| \leq 1{,}0$$

$$E(S(f)) = \left|-\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)\right| = \frac{(3-1)}{180} \cdot 0{,}25^4 \max_{1<x<3}\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 0{,}006$$

$$E(T(f)) = 0{,}39 < 1$$

$$E(S(f)) = 0{,}003 < 0{,}006$$

Con lo cual se ha demostrado que los errores verdaderos son menores que las cotas de los errores para los métodos de trapecios y de Simpson.

Ejercicio nro. 2

Sea la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$y'' - 0{,}05 \cdot y' + 0{,}15 \cdot y = 0 \text{ con } t \geq 0; y(0) = 1; y'(0) = 0 .$$

a) Discretizarla mediante el método de Nyström:

$$w_{n+1} = 2 \cdot w_n - w_{n-1} + h^2 \cdot f\left(t_n, w_n, \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \cdot h}\right)$$

Resolución 2-a

Pasemos la derivada segunda de un lado de la ecuación y el resto será la *f* dependiente del parámetro *t* y de las variables *y(t)* e *y'(t)*:

$$y'' - 0{,}05 \cdot y' + 0{,}15 \cdot y = 0 \Rightarrow y'' = 0{,}05 \cdot y' - 0{,}15 \cdot y = f(t, y, y')$$

Para dicha ecuación la derivada primera la podemos aproximar por $y'(t) \cong \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \cdot h}$,

quedando entonces la ecuación como:

$$w_{n+1} = 2 \cdot w_n - w_{n-1} + h^2 \cdot \left(0{,}05 \cdot \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \cdot h} - 0{,}15 \cdot w_n\right) \Rightarrow$$

$$w_{n+1} = 2 \cdot w_n - w_{n-1} - 0{,}15 \cdot h^2 \cdot w_n + 0{,}05 \cdot \frac{h}{2} \cdot w_{n+1} - 0{,}05 \cdot \frac{h}{2} \cdot w_{n-1} \Rightarrow$$

$$w_{n+1} - 0{,}05 \cdot \frac{h}{2} \cdot w_{n+1} = 2 \cdot w_n - 0{,}15 \cdot h^2 \cdot w_n - w_{n-1} - 0{,}05 \cdot \frac{h}{2} \cdot w_{n-1}$$

$$\left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot w_{n+1} = \left(2 - 0{,}15 \cdot h^2\right) \cdot w_n - \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{h}{2}\right) \cdot w_{n-1}$$

$$w_{n+1} = \frac{\left(2 - 0{,}15 \cdot h^2\right)}{\left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{h}{2}\right)} \cdot w_n - \frac{\left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{h}{2}\right)}{\left(1 - 0{,}05 \cdot \frac{h}{2}\right)} \cdot w_{n-1}$$

Con lo cual hemos discretizado la ecuación:

b) Estimar *y(0,3)* usando *h=0,1*.

Resolución 2-b

Con un paso *h=0,1* precisamos tres pasos de cálculo para llegar desde *t=0* a *t=0,3*. Sin embargo como es un método multipaso (de dos pasos) precisaré un paso menos que deberá ser dato.

Hagamos las cuentas pero primero estimemos el valor de w_1 que precisamos a partir de *y'(0)* utilizando Taylor.

$$y(t+h)=y(t)+h\cdot y'(t)+\frac{h^2}{2}y''(t)+O(h^3)\Rightarrow$$

$$y(0+h)\cong y(0)+h\cdot y'(0)+\frac{h^2}{2}y''(0)=1+0{,}1\cdot 0+\frac{0{,}1^2}{2}\cdot(0{,}05\cdot y'(0)-0{,}15\cdot y(0))=1-0{,}005\cdot 0{,}15$$

$$y(h)\cong 1-7{,}5\cdot 10^{-4}\Rightarrow w_1\cong 0{,}99925$$

Ahora comenzamos con los cálculos:

$$w_{n+1}=\frac{(2-0{,}15\cdot h^2)}{\left(1-0{,}05\cdot\frac{h}{2}\right)}\cdot w_n-\frac{\left(1+0{,}05\cdot\frac{h}{2}\right)}{\left(1-0{,}05\cdot\frac{h}{2}\right)}\cdot w_{n-1}\Rightarrow$$

$$w_2=\frac{(2-0{,}15\cdot 0{,}1^2)}{\left(1-0{,}05\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)}\cdot 0{,}99925-\frac{\left(1+0{,}05\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)}{\left(1-0{,}05\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)}\cdot 1=0{,}99699$$

$$w_3=\frac{(2-0{,}15\cdot 0{,}1^2)}{\left(1-0{,}05\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)}\cdot 0{,}99699-\frac{\left(1+0{,}05\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)}{\left(1-0{,}05\cdot\frac{0{,}1}{2}\right)}\cdot 0{,}99925=0{,}99322$$

Este valor es el que aproxima el valor de *y(0,3)*. El valor aproximado sobreestima al valor verdadero. El cálculo de dicho valor verdadero se puede realizar calculando exactamente las soluciones de la EDO de 2do. orden (nos da dos raíces complejas). El verdadero valor de $y(0{,}3)=0{,}98999$. Este cálculo no era requerido pero el verdadero error cometido es de 0,003.

c) Estudiar la consistencia del método de Nyström.

Resolución 2-c

Para calcular la consistencia deberemos analizar el error de truncamiento local.
Para ello calculamos todos los desarrollos en serie de Taylor alrededor de *t*.

$$0=\left|y''(t)-f(t,y(t),y'(t))\right|\Rightarrow\tau=\left|\frac{y(t+h)-2\cdot y(t)+y(t-h)}{h^2}-f\left(t,y(t),\frac{y(t+h)-y(t-h)}{2\cdot h}\right)\right|=$$

$$y(t+h)=y(t)+h\cdot y'(t)+\frac{h^2}{2}\cdot y''(t)+\frac{h^3}{6}\cdot y^{(3)}(t)+\frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t)+O(h^5)$$

$$y(t-h)=y(t)-h\cdot y'(t)+\frac{h^2}{2}\cdot y''(t)-\frac{h^3}{6}\cdot y^{(3)}(t)+\frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t)+O(h^5)$$

$$y(t+h)-2\cdot y(t)+y(t-h)=2\cdot\frac{h^2}{2}\cdot y''(t)+2\cdot\frac{h^4}{24}\cdot y^{(4)}(t)+O(h^5)\Rightarrow$$

$$\frac{y(t+h)-2\cdot y(t)+y(t-h)}{h^2}=y''(t)+\frac{h^2}{12}\cdot y^{(4)}(t)+O(h^3)$$

$$y(t+h)-y(t-h)=2\cdot h\cdot y'(t)+2\cdot\frac{h^3}{6}\cdot y^{(3)}(t)+O(h^5)$$

$$\frac{y(t+h)-y(t-h)}{2\cdot h}=y'(t)+\frac{h^2}{6}\cdot y^{(3)}(t)+O(h^4)$$

$$f\left(t,y(t),\frac{y(t+h)-y(t-h)}{2\cdot h}\right)=f\left(t,y(t),y'(t)+\frac{h^2}{6}\cdot y^{(3)}(t)+O(h^4)\right)$$

$$f\left(t,y(t),\frac{y(t+h)-y(t-h)}{2\cdot h}\right)\cong f(t,y(t),y'(t))+\frac{h^2}{6}\cdot y^{(3)}(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}+O(h^4)\Rightarrow$$

$$\tau=\left|y''(t)+\frac{h^2}{12}\cdot y^{(4)}(t)+O(h^3)-\left[f(t,y(t),y'(t))+\frac{h^2}{6}\cdot y^{(3)}(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}+O(h^4)\right]\right|=$$

$$\tau=\left|y''(t)+\frac{h^2}{12}\cdot y^{(4)}(t)+O(h^3)-y''(t)-\frac{h^2}{6}\cdot y^{(3)}(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}+O(h^4)\right|=\left|\frac{h^2}{12}\cdot\left[y^{(4)}(t)-2\cdot y^{(3)}(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right]+O(h^3)\right|$$

Ahora efectuamos la acotación del tau llegando a que este método posee orden de consistencia 2:

$$\tau=\left|\frac{h^2}{12}\cdot\left[y^{(4)}(t)-2\cdot y^{(3)}(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right]+O(h^3)\right|\le M\cdot h^2$$

en donde el M vale : $M=\frac{1}{12}\cdot\max_{t-h<x<t+h}\left\{\left|y^{(4)}(x)-2\cdot y^{(3)}(x)\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right|\right\}$. Con lo que queda demostrado que el orden de consistencia vale 2.