Coloquio del 14/07/2010

Análisis Numérico I (75.12) – Curso nro. 7

Ejercicio nro. 1

Dada la tabla:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

Se pide:

- a) Estimar la $I = \int_1^5 f(x) \cdot dx$ mediante todos los métodos que pueda (de los vistos en el curso). Comparar los resultados ¿Cuál apostaría Ud. que es el más aproximado al valor verdadero?
- b) ¿Puede usarse el método de Gauss-Legendre? ¿Por qué si o por qué no?

Ejercicio nro. 2

Dada la ecuación diferencial ordinaria de 1er. Orden $y'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2$, con $y(1) = -1$ y $t \geq 1$. Se pide:

- a) Estimar $y(1.2)$ usando el método predictor-corrector:

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + h \cdot f_n \\ w_{n+1} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f_n + f_{n+1}] \end{cases}$$

Con $h=0.1$ y $f_n = f(t_n, w_n)$

- b) Ídem a) con el método $w_{n+1} = w_{n-1} + 2 \cdot h \cdot f_n$. Si precisa valores de arranque calcúlelos con el método de (a).
- c) Comparar los resultados de (a) y (b) con el valor verdadero, sabiendo que $y(t) = -\frac{1}{t}$.

Rta. Ej. nro. 1

- a) Con la tabla dada se puede estimar la integral por los métodos de trapezios simple (con $h=4$), trapezios compuesto con $h=2$ y $h=1$; Simpson simple con $h=2$ y Simpson compuesto con $h=1$. También puede usarse Romberg y obtener una buena estimación con el valor R33. Las apuestas se las dejo al pulpo Paul...)

A continuación las cuentas:

$$T(h=1)=h/2\{f(1)+f(5)+2\cdot(f(2)+f(3)+f(4))\}= 11,5157$$

$$S(h=1)=h/3\{f(1)+f(5)+4\cdot(f(2)+f(4))+2\cdot f(3)\}= 11,5245$$

$$R_{11} = T(h=4) = 4/2 * \{f(1) + f(5)\} = 2 \cdot \{2,4142 + 3,2804\} = 11,3892$$

$$R_{21} = T(h=2) = 2/2 * \{f(1) + f(5) + 2 \cdot f(3)\} = 1 \cdot \{2,4142 + 3,2804 + 2 \cdot 2,8974\} = 11,4894$$

$$R_{31} = T(h=1) = 1/2 * \{f(1) + f(5) + 2 \cdot [f(2) + f(3) + f(4)]\} =$$

$$R_{31} = 1 \cdot \{2,4142 + 3,2804 + 2 \cdot [2,6734 + 2,8974 + 3,0976]\} = 11,5157$$

$$R_{11} = 11,3892$$

$$R_{21} = 11,4894 \quad R_{22} = 11,5228$$

$$R_{21} = 11,5157 \quad R_{32} = 11,5245 \quad R_{33} = 11,5246$$

El valor más probable de la integral es 11,5246, siendo Simpson de 11,5245 y trapezios de 11,5157.

- b) No puede usarse el método de Gauss-Legendre porque no se conoce la función y los valores que se poseen no coinciden con las raíces de los polinomios de Legendre.

Rta. Ej. nro. 2

- a) El método dado es el método de segundo orden llamado Euler modificado o predictor-corrector. Efectuaremos los cálculos con el mismo:

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_{n+1}^{(0)} = w_n + h \cdot f(t_n, w_n) \\ w_{n+1}^{(k+1)} = w_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1}^{(k)})] \end{cases}$$

Ahora usamos la función para efectuar los cálculos:

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_{n+1}^{(0)} = w_n + h \cdot \left[\frac{1}{t_n^2} - \frac{w_n}{t_n} - w_n^2 \right] \\ w_{n+1}^{(k+1)} = w_n + \frac{h}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{t_n^2} - \frac{w_n}{t_n} - w_n^2 \right) + \left(\frac{1}{t_{n+1}^2} - \frac{w_{n+1}^{(k)}}{t_{n+1}} - w_{n+1}^{(k)2} \right) \right] \end{cases}$$

y reemplazamos por los valores dados comenzamos con los cálculos:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_1^{(0)} = w_0 + h \cdot \left[\frac{1}{t_0^2} - \frac{w_0}{t_0} - w_0^2 \right] \\ w_1^{(1)} = w_0 + \frac{h}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{t_0^2} - \frac{w_0}{t_0} - w_0^2 \right) + \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{w_1^{(0)}}{t_1} - w_1^{(0)2} \right) \right] \end{array} \right.$$

Tener en cuenta que para llegar a $t=1.2$ con un paso de cálculo de $h=0.1$ deberemos efectuar dos pasos de cálculo

$$h = 0.1$$

$$w_0 = -1$$

$$t_0 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = w_1^{(0)} = (-1) + 0.1 \cdot \left[\frac{1}{1^2} - \frac{(-1)}{1} - (-1)^2 \right] \\ w_1^{(1)} = (-1) + 0.05 \cdot \left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{(-1)}{1} - (-1)^2 \right) + \left(\frac{1}{1.1^2} - \frac{w_1^{(0)}}{1.1} - w_1^{(0)2} \right) \right] \\ w_1 = w_1^{(0)} = (-1) + 0.1 \cdot [1 + 1 - 1] = -0.9 \\ w_1^{(1)} = (-1) + 0.05 \cdot \left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{(-1)}{1} - (-1)^2 \right) + \left(\frac{1}{1.1^2} - \frac{(-0.9)}{1.1} - (-0.9)^2 \right) \right] \\ w_1^{(1)} = (-1) + 0.05 \cdot [(1 + 1 - 1) + (0.82645 + 0.81818 - 0.81)] = -0.90827 \end{array} \right.$$

Luego de estos cálculos obtuvimos una estimación para $y(1.1)$. Volvemos a efectuar el cálculo.

$$h = 0.1$$

$$w_1 = -0.90827$$

$$t_1 = 1.1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2 = w_2^{(0)} = (-0.90827) + 0.1 \cdot \left[\frac{1}{1.1^2} - \frac{(-0.90827)}{1.1} - (-0.90827)^2 \right] \\ w_2^{(1)} = (-0.90827) + 0.05 \cdot \left[\left(\frac{1}{1.1^2} - \frac{(-0.90827)}{1.1} - (-0.90827)^2 \right) + \left(\frac{1}{1.2^2} - \frac{w_2^{(0)}}{1.2} - w_2^{(0)2} \right) \right] \\ w_2 = w_2^{(0)} = (-0.90827) + 0.1 \cdot [0.82645 + 0.8257 - 0.82495] = -0.82555 \\ w_2^{(1)} = (-0.90827) + 0.05 \cdot \left[(0.82645 + 0.8257 - 0.82495) + \left(\frac{1}{1.2^2} - \frac{(-0.82555)}{1.2} - (-0.82555)^2 \right) \right] \\ w_2^{(1)} = (-0.90827) + 0.05 \cdot [(0.8272) + (0.69444 + 0.68796 - 0.68153)] = -0.83187 \end{array} \right.$$

Y llegamos a la estimación de $y(1.2)$ que da aproximadamente -0.83187 que difiere en un 2 por mil del verdadero valor.

- b) El método dado es el método de segundo orden multipaso denominado salto de rana. Recordar que deberemos usar una valor para el primer paso (usaremos el de a).

$$w_{n+1} = w_{n-1} + h \cdot f(t_n, w_n)$$

$$w_{n+1} = w_{n-1} + h \cdot \left[\frac{1}{t_n^2} - \frac{w_n}{t_n} - w_n^2 \right]$$

Ahora calculamos solo el w_2 ya que el w_0 es dato y el w_1 lo sacamos del cálculo de (a).

$$w_2 = w_0 + h \cdot \left[\frac{1}{t_1^2} - \frac{w_1}{t_1} - w_1^2 \right]$$

$$w_2 = (-1) + 0.1 \cdot \left[\frac{1}{1.1^2} - \frac{(-0.90827)}{1.1} - (-0.90827)^2 \right]$$

$$w_2 = (-1) + 0.1 \cdot [0.82645 + 0.8257 - 0.82495]$$

$$w_2 = (-1) + 0.1 \cdot 0.8272 = -0.91728$$

Y llegamos a la estimación de $y(1.2)$ que da aproximadamente -0.91728 que difiere en un 10 por ciento del verdadero valor.

Cabría en este caso verificar qué sucede con la estabilidad de este método.