Análisis Numérico I (75.12 95.04) – Curso nro. 6
Segundo Cuatrimestre 2013
Primer Recuperatorio - Tema B - 3/12/2013

Ejercicio nro. 1

Dado el siguiente sistema lineal $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se pide lo siguiente:

a) Hallar la solución del sistema $\hat{x}$ mediante el método de Gauss sin pivoteo utilizando una grilla de punto flotante de 2 dígitos significativos y redondeo simétrico. (10 puntos).

b) Sabiendo que la solución exacta es $x = (\ 1 \quad 1\ )^T$ calcular el residuo $\Delta b = b - A\hat{x}$, y el error en la solución $\Delta x = x - \hat{x}$. Usando Δb, b, Δx y x, encontrar una cota inferior del numero de condición $K(A)$ en norma infinito. Asimismo calcular $K(A)$ de manera exacta usando su definición. Utilizar doble precisión en estos cálculos (4 dígitos significativos) (20 puntos)

c) Usando la descomposición LU de la matriz A, hacer refinamiento iterativo de la solución encontrada en a). Saque conclusiones. (10 puntos)

Nota 1: Efectuar todos los cálculos en forma explícita cuando se opere con la grilla. Es parte de la evaluación.

Nota 2: Definición: $\|A\|_\infty = \underset{1 \le i \le m}{Max} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

Ejercicio nro. 2

Dada la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\alpha \\ -2\alpha & 1 & -2\alpha \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que el método de Jacobi converge cuando $\alpha < 1/\sqrt{2}$ y diverge cuando $\alpha > 1/\sqrt{2}$. (10 puntos)

b) Demostrar que el método de Gauss-Seidel también converge cuando $\alpha < 1/\sqrt{2}$ y diverge cuando $\alpha > 1/\sqrt{2}$. (10 puntos)

Ejercicio nro. 3

Se desea encontrar la intersección del las curvas $f_1(x) = e^x$ y $f_2(x) = \frac{1}{x}$, es decir, encontrar p tal que $f_1(p) = f_2(p)$:

a) Proponer una iteración de punto fijo que converja a la solución buscada. (5 puntos)
b) definir un intervalo [a,b] que asegure la convergencia del método demostrando las condiciones del Teorema del Punto Fijo. (15 puntos).
c) Estimar de manera teórica el Nro de iteraciones n necesarias que garantice una exactitud de 10^{-4}, es decir tal que $|x_n - p| \le 10^{-4}$. Aplicar 10 pasos de la iteración con $x_0 = 0.5$. (10 puntos)
d) Establecer de manera analítica el orden de convergencia y la constante asintótica del método. (10 puntos)