

Primer Recuperatorio del primer parcial

Tema B - 03/07/2013 - Primer Cuatrimestre 2013

Análisis Numérico I (75.12 95.04) – Curso nro. 6

Ejercicio nro. 1

Dado el siguiente sistema lineal $A \cdot x = b$. Se pide lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 \\ 0,5 & 0,333 & 0,25 \\ 0,333 & 0,25 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,167 \\ 0,083 \\ 0,117 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar la solución del sistema mediante el método de Gauss sin pivoteo utilizando una grilla de punto flotante de 3 dígitos significativos y redondeo simétrico. (15 puntos).

Resp:

Para resolverlo primeramente expresaremos la matriz como matriz ampliada de 3x4.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 & -0,167 \\ 0,5 & 0,333 & 0,25 & 0,083 \\ 0,333 & 0,25 & 0,2 & 0,117 \end{bmatrix}$$

No se pide efectuar intercambios de filas ya que debemos resolverlo por Gauss sin pivoteo.

Calculamos los multiplicadores y efectuamos las operaciones para dejar ceros en la primera columna, modificando los elementos de la matriz A ampliada:

$$m_{21} = a_{21}^{(1)} / a_{11}^{(1)} = 0,5 / 1 = 0,5$$

$$m_{31} = a_{31}^{(1)} / a_{11}^{(1)} = 0,333 / 1 = 0,333$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21} * a_{12}^{(1)} = 0,333 - 0,5 * 0,5 =_G 0,333 - 0,25 =_G 0,083$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - m_{21} * a_{13}^{(1)} = 0,25 - 0,5 * 0,333 =_G 0,25 - 0,167 =_G 0,083$$

$$a_{24}^{(2)} = a_{24}^{(1)} - m_{21} * a_{14}^{(1)} = 0,083 - 0,5 * (-0,167) =_G 0,083 + 0,0835 =_G 0,167$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - m_{31} * a_{12}^{(1)} = 0,25 - 0,333 * 0,5 =_G 0,25 - 0,167 =_G 0,083$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{31} * a_{13}^{(1)} = 0,2 - 0,333 * 0,333 =_G 0,2 - 0,111 =_G 0,089$$

$$a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - m_{31} * a_{14}^{(1)} = 0,117 - 0,333 * (-0,167) =_G 0,117 + 0,0556 =_G 0,173$$

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 & -0,167 \\ (0,5) & 0,083 & 0,083 & 0,167 \\ (0,333) & 0,083 & 0,089 & 0,173 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos los multiplicadores y efectuamos las operaciones para dejar ceros en la segunda columna, modificando los elementos de la matriz A ampliada:

$$m_{32} = a_{32}^{(2)} / a_{22}^{(2)} = 0,083 / 0,083 =_G 1,00$$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - m_{32} * a_{23}^{(2)} = 0,089 - 1 * 0,083 =_G 0,089 - 0,083 =_G 0,006$$

$$a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)} - m_{32} * a_{24}^{(2)} = 0,173 - 1 * 0,167 =_G 0,173 - 0,167 =_G 0,006$$

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 & -0,167 \\ (0,5) & 0,083 & 0,083 & 0,167 \\ (0,333) & (1) & 0,006 & 0,006 \end{bmatrix}$$

Ahora que la matriz A aumentada fue triangulada puede encontrarse la solución por sustitución inversa:

$$x_3 = a_{34} / a_{33} = -0,006 / 0,006 =_G 1$$

$$x_2 = (a_{24} - a_{23} * x_3) / a_{22} = (0,167 - 0,083 * 1) / 0,083 =_G (0,167 - 0,083) / 0,083 =_G 0,084 / 0,083 =_G 1,01$$

$$x_1 = (a_{14} - a_{13} * x_3 - a_{12} * x_2) / a_{11} = (-0,167 - 0,333 * 1 - 0,5 * 1,01) / 1 =_G (-0,167 - 0,333 - 0,505) / 1$$

$$x_1 = (-0,5 - 0,505) / 1 =_G -1,01 / 1 =_G -1,01$$

$$\vec{x} = (-1,01 \quad 1,01 \quad 1)$$

Se encontró la solución que dista de la predicha como solución. El error absoluto en "x" resulta ser de 0,01.

b) Utilizar la solución de (a) con la misma grilla para aplicar refinamiento iterativo. (15 puntos).

Resp:

En este caso se puede utilizar la descomposición de la matriz A en producto de matrices L y U , de forma tal que $PA=LU$. Para este caso particular la matriz de permutaciones resulta ser $P=Id$, con lo cual queda

Primeramente utilizaremos la doble precisión para calcular el residuo ($\{Gr(10,6,2),rd\}$).

$$r = b - A\tilde{x} = \begin{pmatrix} -0,167 \\ 0,083 \\ 0,117 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 \\ 0,5 & 0,333 & 0,25 \\ 0,333 & 0,25 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1,01 \\ 1,01 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$r = \begin{pmatrix} -0,167 \\ 0,083 \\ 0,117 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1*1,01 + 0,5*1,01 + 0,333*1 \\ -0,5*1,01 + 0,333*1,01 + 0,25*1 \\ -0,333*1,01 + 0,25*1,01 + 0,2*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,167 \\ 0,083 \\ 0,117 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,172 \\ 0,08133 \\ 0,11617 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,00167 \\ 0,00083 \end{pmatrix}$$

Notar que luego de calcular el residuo quedó dentro de la grilla $\{Gr(10,3,2),rd\}$. Grilla en la cual efectuaremos las operaciones de sustitución directa e inversa a partir de las matrices L y U halladas en el punto anterior:

$$r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x}) = A\delta x$$

$$A = LU \Rightarrow A\delta x = r \Rightarrow LU\delta x = r$$

$$\begin{cases} Ly = r \\ U\delta x = y \end{cases}$$

Donde las matrices L , U y P son:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,333 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 \\ 0 & 0,083 & 0,083 \\ 0 & 0 & 0,006 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,00167 \\ 0,00083 \end{pmatrix}$$

Resolvemos por sustitución directa e inversa obteniendo el:

$$Ly = r$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0,333 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,00167 \\ 0,00083 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 0,005$$

$$y_2 = 0,00167 - 0,5 * y_1 = 0,00167 - 0,5 * 0,005 =_G$$

$$y_2 =_G 0,00167 - 0,0025 =_G -0,00083$$

$$y_3 = 0,00083 - 0,333 * y_1 - 1 * y_2 =_G 0,00083 - 0,333 * 0,005 - 1 * (-0,00083) =_G$$

$$y_3 = 0,00083 - 0,00167 + 0,00083 =_G -0,00084 + 0,00083 =_G -0,00001$$

luego

$$U\delta x = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,333 \\ 0 & 0,083 & 0,083 \\ 0 & 0 & 0,006 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ -0,00083 \\ -0,00001 \end{pmatrix}$$

$$\delta x_3 = -0,00001/0,006 =_G -0,00167$$

$$\delta x_2 = (-0,00083 - 0,083 * \delta x_3)/0,083 =_G (-0,00083 - 0,083 * (-0,00167))/0,083 =_G$$

$$\delta x_2 =_G (-0,00083 + 0,000139)/0,083 =_G -0,000691/0,083 =_G -0,00833$$

$$\delta x_1 = (0,005 - 0,333 * \delta x_3 - 0,5 * \delta x_2)/1 =_G (0,005 - 0,333 * (-0,00167) - 0,5 * (-0,00833))/1 =_G$$

$$\delta x_1 = (0,005 + 0,000556 + 0,00417)/1 =_G (0,00556 + 0,00417)/1 =_G 0,00973/1 =_G 0,00973$$

$$\vec{\delta x} = (0,00973 \quad -0,000691 \quad -0,00167)$$

Ahora mejoramos la solución de (a):

$$\vec{x} = \tilde{x} + \delta x = (-1,01 \quad 1,01 \quad 1) + (0,00973 \quad -0,00833 \quad -0,00167) = (1 \quad 1 \quad 0,998)$$

- c) Sabiendo que el número de condición de A es de 800, y con los resultados de (a) y (b) indicar si es factible obtener una estimación del $K(A)$ y si dicha estimación es buena.

Comparar los resultados de (a) y (b) con la solución exacta $x = (-1 \quad 1 \quad 1)^t$

¿Está el sistema mal condicionado? Explique. (10 puntos).

Resp:

La estimación del número de condición de la matriz será:

$$K(A) \cong \frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|\tilde{x}\|_{\infty}} \cdot 10^3 = \frac{0,00973}{1,01} \cdot 10^3 = 10. \text{ Sin embargo esta estimación no es buena.}$$

Obtendría una mejor estimación con más dígitos en la mantisa.

Desde ya que el sistema está mal condicionado porque $K(A) = 800$, el cual es muy distinto al valor estimado.

Además la solución mejorada es distinta del verdadero valor.

Sin embargo $|x_a - x|_{\infty} = 0,01$ y $|x_b - x|_{\infty} = 0,002$, con lo cual resulta mejor la aproximación por refinamiento.

Ejercicio nro. 2

Aplique los dos métodos que se enuncian a continuación para hallar el cero de $f(x) = x^2 - \ln(x^2) - 2$ con una exactitud de 10^{-4} . Determine el intervalo de convergencia de ambos métodos para que se satisfagan las condiciones del TPF. Utilice en ambos casos $x_0 = 2$:

a) Mediante la función de iteración de punto fijo $g(x) = \sqrt{\ln(x^2) + 2}$. (20 puntos).

Resp:

Primero de todo calculemos algunos valores considerando que la diferencia entre dos iteraciones sea menor que 10^{-5} . Lógicamente que ello no indica que la diferencia con el verdadero valor sea menor que 10^{-4} pero nos dará una pauta del valor verdadero.

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1,84019$$

$$x_2 = 1,79436$$

$$x_3 = 1,78025$$

$$x_4 = 1,77581$$

$$x_5 = 1,77441$$

$$x_6 = 1,77396$$

$$x_7 = 1,77382$$

$$x_8 = 1,77377$$

$$x_9 = 1,77376$$

$$x_{10} = 1,77375$$

A partir de estos cálculos podemos determinar un intervalo dentro del cual caerían todos los puntos de la sucesión y dicho intervalo podría ser (por ejemplo) $[1; 2]$. Ahora verifiquemos que satisface todas las condiciones del teorema del punto fijo.

- i) la función $g(x) = \sqrt{\ln(x^2) + 2}$ es continua en dicho intervalo por ser suma, cuadrado y composición de funciones continuas, y al ser el logaritmo de valores mayores a 1 serán siempre positivos, con lo cual la función será siempre creciente con un mínimo en $\sqrt{2} \cong 1,41421$ y un máximo en $\sqrt{\ln(4) + 2} \cong 1,84019$.

- ii) Como ya se indicó $g(x)$ es creciente porque

$$g'(x) = \left[\sqrt{\ln(x^2) + 2} \right]' = \frac{1}{2} \cdot \frac{[\ln(x^2) + 2]'}{\sqrt{\ln(x^2) + 2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\sqrt{\ln(x^2) + 2}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln(x^2) + 2}} > 0$$

en el intervalo $[1; 2]$. Con esto se puede determinar que $g: [1; 2] \rightarrow [1,41421; 1,84019] \subset [1; 2]$ por ser una función monótona creciente.

- iii) Nos falta ver que la $g(x)$ es de Lipschitz y que dicha constante es menor que 1 en el intervalo $[1; 2]$. La $g'(x)$ es decreciente, con

$$g'(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln(x^2) + 2}} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{\ln(1^2) + 2}} = 0,70711 \quad \text{y}$$

$$g'(2) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln(2^2) + 2}} = 0,27171 \quad \text{y el valor máximo será en 1, con lo}$$

$$\text{cual } L = \max_{1 < x < 2} \{g'(x)\} = 0,70711 < 1$$

Con estas tres condiciones vemos que la $g(x)$ satisface las tres condiciones del teorema del punto fijo con lo cual existe un único punto fijo de la $g(x)$ en el intervalo $[1; 2]$. Dicho punto fijo lo hemos determinado y vale $\alpha = 1,77375$. También podemos determinar el orden de convergencia y la constante asintótica del error a

$$\text{partir de la derivada de } g(x) \text{ en el punto fijo: } g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\ln(\alpha^2) + 2}} = 0,31784 \neq 0$$

con lo cual el orden de convergencia es "1" y la constante asintótica del error vale 0,31784.

b) Mediante el método de Newton-Raphson. (15 puntos).

Resp:

Primero escribimos la función de iteración mediante el método de Newton-Raphson:

$$g_{NR}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - \ln(x^2) - 2}{2 \cdot x - \frac{2}{x}}$$

Calculamos algunos valores considerando que la diferencia entre dos iteraciones sea menor que 10^{-5} . Lógicamente que ello no indica que la diferencia con el verdadero valor sea menor que 10^{-4} pero nos dará una pauta del valor verdadero.

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1,79543$$

$$x_2 = 1,77400$$

$$x_3 = 1,77375$$

$$x_4 = 1,77375$$

A partir de estos cálculos podemos determinar un intervalo dentro del cual caerían todos los puntos de la sucesión y dicho intervalo podría ser (por ejemplo) $[1,5; 2]$. Achicamos el intervalo porque el valor 1 genera inconvenientes de continuidad con la función en el denominador.

Ahora verifiquemos que satisface todas las condiciones del teorema del punto fijo.

- i) la función $g_{NR}(x) = x - \frac{x^2 - \ln(x^2) - 2}{2 \cdot x - \frac{2}{x}}$ es continua en dicho intervalo

por ser suma, cuadrado y composición de funciones continuas. Se excluyó el punto $x=1$ por el inconveniente del denominador.

- ii) La función $g(x)$ posee un mínimo en el punto fijo, siendo decreciente de 1,5 al punto fijo y creciente del punto fijo a 2. A continuación los valores más representativos de la función de iteración de Newton-Raphson vista como una función de iteración de punto fijo:

$$g_{NR}(1,5) = 1,5 - \frac{1,5^2 - \ln(1,5^2) - 2}{2 \cdot 1,5 - \frac{2}{1,5}} = 1,83656 \in [1,5 \quad 2],$$

$$g_{NR}(2) = 2 - \frac{2^2 - \ln(2^2) - 2}{2 \cdot 2 - \frac{2}{2}} = 1,79543 \in [1,5 \quad 2] \quad y$$

$$g_{NR}(1,77375) = 1,77375 - \frac{1,77375^2 - \ln(1,77375^2) - 2}{2 \cdot 1,77375 - \frac{2}{1,77375}} = 1,77375 \in [1,5 \quad 2]$$

. La derivada de la función de NR queda

$$g'_{NR}(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)} = \frac{(x^2 - \ln(x^2) - 2) \cdot \left(2 + \frac{2}{x^2}\right)}{\left(2 \cdot x - \frac{2}{x}\right)^2}, \quad \text{siendo}$$

$g'_{NR}(1,5) = -0,58337$, $g'_{NR}(2) = 0,17047$ y $g'_{NR}(1,77375) = 0$. Resulta claro que dicho punto fijo es una raíz de multiplicidad 1 de la $f(x)$, ya que $f'(\alpha = 1,77375) = 2 \cdot \alpha - \frac{2}{\alpha} = 2,42 \neq 0$. Por todo lo expuesto

$$g_{NR} : [1,5 \quad 2] \rightarrow [1,77375 \quad 1,83656] \subset [1,5 \quad 2].$$

- iii) Nos falta ver que la $g(x)$ es de Lipschitz y que dicha constante es menor que 1 en el intervalo $[1,5 \quad 2]$. La $g'(x)$ es creciente, siendo su máximo valor en módulo el de la derivada en 1,5, con lo cual $L = \max_{1 < x < 2} \{ |g'(x)| \} = 0,58337 < 1$

Con estas tres condiciones vemos que la $g(x)$ satisface las tres condiciones del teorema del punto fijo con lo cual existe un único punto fijo de la $g(x)$ en el intervalo $[1,5 \quad 2]$. Dicho punto fijo lo hemos determinado y vale $\alpha = 1,77375$. También podemos determinar el orden de convergencia y la constante asintótica del error a partir de la derivada de $g(x)$ en el punto fijo:

$$g'_{NR}(\alpha) = \frac{(\alpha^2 - \ln(\alpha^2) - 2) \cdot \left(2 + \frac{2}{\alpha^2}\right)}{\left(2 \cdot \alpha - \frac{2}{\alpha}\right)^2} = 0 \quad \text{con lo cual el orden de convergencia es}$$

al menos "2" y la constante asintótica del error vale

$$CA = \frac{g''_{NR}(\alpha)}{2} = \frac{\left(2 + \frac{2}{\alpha^2}\right)}{2 \cdot \left(2 \cdot \alpha - \frac{2}{\alpha}\right)} = 0,545.$$

Ejercicio nro. 3

- a) Dadas las siguientes 4 condiciones, se pide hallar el polinomio interpolante de menor grado que las satisface, calculando con dicho polinomio $P(0,5)$. (15 puntos).

x	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$
0	0	0
1	-2	-5

Resp:

Planteamos la solución mediante el método de las diferencias divididas, para lo cual tomamos $x_1 = x_2 = 0$ y $x_3 = x_4 = 1$. Se usará 5 dígitos decimales para las cuentas. Entonces las diferencias divididas serán $f[x_1] = f[x_2] = 0$, $f[x_3] = f[x_4] = -2$, $f[x_1, x_2] = f'(x_1) = 0$ y $f[x_3, x_4] = f'(x_3) = -5$. Ahora hago

los cálculos:
$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} = -2,$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} = -2,$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{-5 - (-2)}{1 - 0} = -3 \quad \text{y} \quad \text{por} \quad \text{último}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{-3 - (-2)}{1 - 0} = -1. \quad \text{Con estos valores}$$

calculados podemos expresar el polinomio interpolante como:

$$P_3(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2] \cdot (x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + f[x_1, x_2, x_3, x_4] \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

$$P_3(x) = 0 + 0 \cdot (x - 0) + (-2) \cdot (x - 0) \cdot (x - 0) + (-1) \cdot (x - 0) \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) = -2 \cdot x^2 - x^2 \cdot (x - 1) = -x^3 -$$

Calculamos $P(0,5) = -0,5^3 - 0,5^2 = -0,375$. Y esto es todo lo pedido en la parte (a). Deberíamos chequear que el polinomio satisface las 4 condiciones. Se deja como parate del ejercicio.

b) Sabiendo que $f(x) = x^4 - 3 \cdot x^3$, calcular el error verdadero y la acotación del error para el punto $x=0,5$. (10 puntos).

Resp:

El error verdadero es tan solo plantear

$$Err = |f(0,5) - P_3(0,5)| = |-0,375 - (-0,3125)| = 0,0625.$$

Para la cota del error planteamos la fórmula:

$$Err = |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \prod_{k=1}^4 (x - x_k) \quad \text{y calculamos las 4 derivadas de la } f(x):$$

$$f(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2, \quad \text{seguimos calculando}$$

$$f^{(2)}(x) = 12 \cdot x^2 - 18 \cdot x \Rightarrow f^{(3)}(x) = 24 \cdot x - 18 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 24 \Rightarrow f^{(4)}(\xi) = 24.$$

Ahora especializamos la fórmula en $x=0,5$, con lo que nos quedará:

$$Err = |f(0,5) - P_3(0,5)| \leq \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \prod_{k=1}^4 (x - x_k) \leq \frac{24}{24} \cdot \prod_{k=1}^4 (0,5 - x_k) = (0,5 - 0)^2 \cdot (0,5 - 1)^2 = 0,0625$$

Notar que coinciden el error verdadero y la cota del error, esto debido a que la derivada cuarta de la $f(x)$ es constante en todo el intervalo.

