

**Parcial Tema A – Guía para la resolución
Primer Cuatrimestre 2013**

Análisis Numérico I – Curso nro. 6

Se presenta a continuación un detalle de los aspectos principales a tener en cuenta para la resolución del parcial.

Ejercicio nro. 1

En el método sin intercambio de filas, el multiplicador es el siguiente:

$$m_{21} = \frac{10150}{3,261} = 3112,5421 =_{Grilla} \mathbf{3113}$$

La solución es:

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 49,92 \\ -339,3 \end{pmatrix}$$

Mediante un paso de refinamiento iterativo se obtiene la solución:

$$\tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 49,94 \\ -339,3 \end{pmatrix}$$

Para la matriz dada, $K(A) = 24812$ obtenido con MatLab, que es significativamente mayor que 100 y significa que la matriz está mal condicionada.

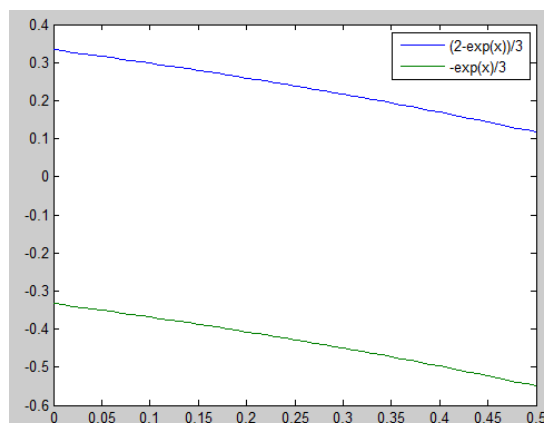
Es factible obtener una estimación de $K(A)$ como $\frac{\|\delta^{(1)}\|}{\|x^{(1)}\|} 10^4 = \frac{0,02320}{\underbrace{339,3}_{0,0000683}} 10^4$ con norma infinito, donde el cociente es menor que 0,05 y el sistema está bien condicionado.

Dependiendo de cómo se haya aplicado la grilla, los errores de redondeo se pueden haber propagado al resto de los cálculos para ambas soluciones llevando a conclusiones erróneas.

Los errores más comunes se relacionan con la aplicación de la grilla y el uso de doble precisión en el proceso de refinamiento iterativo, ya que en algunos casos no se usó doble precisión y en otros, se usó desde el cálculo del residuo hasta la obtención de la solución mejorada.

Ejercicio nro. 2

a) Podemos representar gráficamente la función $g_1(x) = \frac{2-e^x}{3}$ y su derivada $g'_1(x) = \frac{-e^x}{3}$:



Partiendo de $x_0 = 0$, para obtener una nueva iteración mediante el método de Punto Fijo usamos la siguiente expresión:

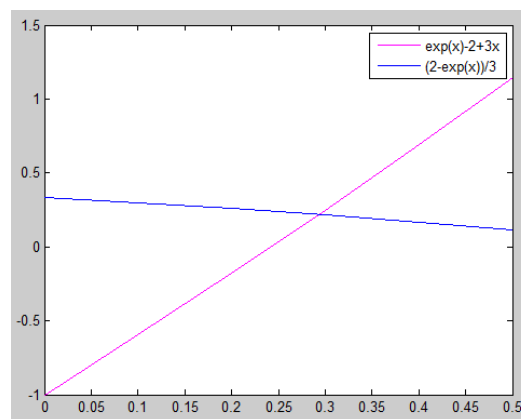
$$x_1 = g_1(x_0) = \frac{2 - e^x}{3} = 0.333333$$

En forma genérica $x_n = g_1(x_{n-1})$

Luego de 14 iteraciones se obtiene la raíz $\alpha = 0.242047$ con una tolerancia de 10^{-5}

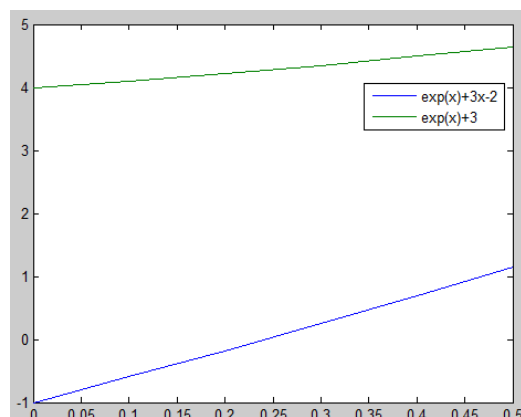
#	x	$g_1(x)$	Δx
1	0	0.333333333333333	0.333333333333333
2	0.333333333333333	0.201462524971303	0.131870808362030
3	0.201462524971303	0.258936534297115	0.057474009325811
4	0.258936534297115	0.234816140290924	0.024120394006190
5	0.234816140290924	0.245107925215636	0.010291784924712
6	0.245107925215636	0.240746930599448	0.004360994616188
7	0.240746930599448	0.242600320027352	0.001853389427904
8	0.242600320027352	0.241813631148529	0.000786688878824
9	0.241813631148529	0.242147726874779	0.000334095726250
10	0.242147726874779	0.242005873216251	0.000141853658528
11	0.242005873216251	0.242066108631027	0.000060235414776
12	0.242066108631027	0.242040531869994	0.000025576761033
13	0.242040531869994	0.242051392292284	0.000010860422290
14	0.242051392292284	0.242046780766052	0.000004611526232

En el siguiente gráfico se puede observar el punto fijo:



A partir de las condiciones del Teorema de Punto Fijo, debe demostrarse que el proceso converge en el intervalo $[0, 0.5]$. También puede considerarse un intervalo más pequeño.

- b) Podemos representar gráficamente la función $f(x) = e^x + 3x - 2$ y su derivada $f'(x) = e^x + 3$:



Aplicando el método de Newton-Raphson, tenemos la siguiente expresión:

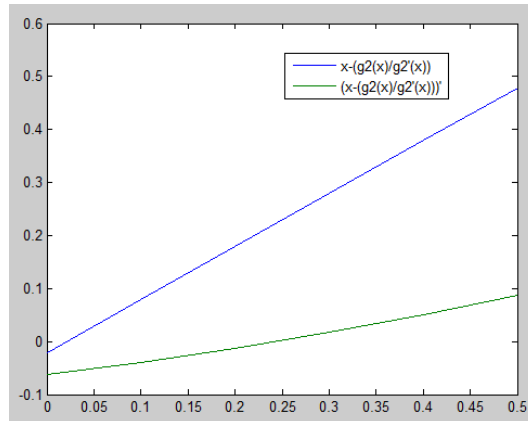
$$g_2(x) = x - \frac{e^x + 3x - 2}{e^x + 3}$$

Partiendo de $x_0 = 0$, para obtener una nueva iteración usamos la expresión anterior:

$$x_1 = g_2(x_0) = x - \frac{e^x + 3x - 2}{e^x + 3} = 0.25$$

En forma genérica $x_n = g_2(x_{n-1})$

Podemos representar gráficamente la función $g_2(x) = x - \frac{e^x + 3x - 2}{e^x + 3}$ y su derivada $g'_2(x) = \frac{e^x + 3x - 2e^x}{(e^x + 3)^2}$:



Nuevamente, deben aplicarse las condiciones del Teorema de Punto Fijo para demostrar que el proceso converge en un intervalo dado.

Luego de 3 iteraciones se obtiene la raíz $\alpha = 0.242057$ con una tolerancia de 10^{-5}

#	x	$g_1(x)$	Δx
1	0	0.2500000000000000	0.2500000000000000
2	0.2500000000000000	0.242057606251541	0.007942393748459
3	0.242057606251541	0	0.000009450969731

Las conclusiones se relacionan con los resultados obtenidos en función del orden de convergencia de cada método.

Para cada método debe indicarse explícitamente el intervalo, no es suficiente con mencionar cuáles son las condiciones del TPF en un intervalo genérico.

En cuanto a las condiciones específicas, además de verificar el comportamiento de las funciones en los extremos del intervalo, también debe analizarse qué ocurre dentro del mismo.

Dependiendo de la cantidad de decimales que se usó en los cálculos, pueden existir pequeñas diferencias con los valores mostrados.

Ejercicio nro. 3

La tabla de Diferencias Divididas es la siguiente:

	x	f	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3	Diferencia 4
x0	1	0,7651977	-0,483705667			
x1	1,3	0,620086	-0,548946	-0,108733889		
x2	1,6	0,4554022	-0,578612	-0,049443333	0,065878395	
x3	1,9	0,2818186	-0,571521	0,011818333	0,068068519	0,001825103
x4	2,2	0,1103623				

A partir de esta tabla se construye el polinomio:

$$P_4(x) = 0,7651977 - 0,483705667(x - 1) - 0,108733889(x - 1)(x - 1,3) + \\ 0,065878395(x - 1)(x - 1,3)(x - 1,6) + \\ 0,001825103(x - 1)(x - 1,3)(x - 1,6)(x - 1,9)$$

Debe comprobarse que el polinomio evaluado en los puntos dados aproxima verifica los valores de la función.

Se evalúa el polinomio en $P_4(1,5) = 0,51181999$

Con respecto al grado del polinomio interpolador de Lagrange, de acuerdo con los puntos que se elijan, se pueden obtener polinomios de grado 2, 3 y 4.

Para esta función y para el valor a evaluar, al menos deben tomarse dos puntos: 1,3 y 1,6.

Referencia: Análisis Numérico, Burden-Faires, 7ma Edición, páginas 113-115

En general, este ejercicio no tuvo inconvenientes.

En algunos casos, hubo errores de cuenta aunque los coeficientes estaban bien calculados y en otros, no se usaron los coeficientes correctos en la construcción del polinomio.

Dependiendo de la cantidad de decimales que se usó en los cálculos, pueden existir pequeñas diferencias con los valores mostrados.