RESOLUCIÓN TEMA D

Ejercicio 1
Código MATLAB:

```
A=[11 12 11; 2 3 1; 5 -800 5]
b=[10; 0; 810]
x=inv(A)*b
condA=cond(A)
```

Solución MATLAB:

$x^t = [1 \ -1 \ 1]$

$K_{(A)} = 1142.2$

a) Se resuelve el ejercicio en base diez, 2 dígitos de mantisa y redondeo simétrico para las operaciones. Algoritmo de Gauss sin pivoteo.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 11 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -800 & 5 & 810 \end{bmatrix} \rightarrow m_{12} = \frac{2}{11} = 0.18 \quad m_{13} = \frac{5}{11} = 0.45$$

1er iteración:

$a_{22} = 3 - 12 \cdot 0.18 = 3 - 2.2 = 0.8$

$a_{23} = 1 - 11 \cdot 0.18 = 1 - 2 = -1$

$b_2 = 0 - 10 \cdot 0.18 = -1.8$

$a_{32} = -800 - 12 \cdot 0.45 = -800 - 5.4 = -810$

$a_{33} = 5 - 11 \cdot 0.45 = 5 - 5 = 0$

$b_3 = 810 - 10 \cdot 0.45 = 810 - 4.5 = 810$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 11 & 10 \\ (0.18) & 0.8 & -1 & -1.8 \\ (0.45) & -810 & 0 & 810 \end{bmatrix} \rightarrow m_{23} = \frac{-810}{0,8} = -1000$$

2da iteración:

$a_{33} = 0 - 1 \cdot 1000 = -1000$

$b_3 = 810 - (-1000) \cdot (-1.8) = 810 - 1800 = -990$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 11 & 10 \\ (0.18) & 0.8 & -1 & -1.8 \\ (0.45) & (-1000) & -1000 & -990 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.18 & 1 & 0 \\ 0.45 & -1000 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 0 & 0.8 & -1 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix}$$

Finalmente realizando sustitución inversa obtenemos:

$$\tilde{x}_3 = \frac{-990}{-1000} = 0.99$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{-1.8-(-1)\cdot 0.99}{0.8} = \frac{-1.8+0.99}{0.8} = \frac{-0.81}{0.8} = -1$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{10-11\cdot 0.99-12\cdot(-1)}{22} = \frac{10-11+12}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

$\tilde{x}^t$ = [1 -1 0.99]

Notamos que la solución obtenida es cercana a la exacta.

b) Realizamos un paso de refinamiento iterativo; para calcular el residuo utilizamos doble precisión, es decir, mantisa de 4 dígitos.

$$r = b - \tilde{b}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -800 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\cdot 1+12\cdot(-1)+11\cdot 0.99 \\ 2\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 0.99 \\ 5\cdot 1-800\cdot(-1)+5\cdot 0.99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11-12+10.89 \\ 2-3+0.99 \\ 5+800+4.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.89 \\ -0.01 \\ 810 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 810 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.89 \\ -0.01 \\ 810 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora utilizando la descomposición LU que obtuvimos con el algoritmo de Gauss, resuelvo el siguiente sistema:

$$A\cdot\delta x = r \rightarrow L\cdot U\cdot\delta x = r \rightarrow L\cdot y = r$$

Busco y:

$$L\cdot y = r \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.18 & 1 & 0 \\ 0.45 & -1000 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 0.11$$

$$y_2 = 0.01 - 0.18\cdot 0.11 = 0.01 - 0.02 = -0.01$$

$$y_3 = 0 - 0.45\cdot 0.11 + 1000\cdot(-0.01) = 0 - 0.05 - 10 = -10$$

y^t = [0.11 -0.01 -10]

Busco δx:

$$U\cdot\delta x = y \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 12 & 11 \\ 0 & 0.8 & -1 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.11 \\ -0.01 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\delta x_3 = \frac{-10}{-1000} = 0.01$$

$$\delta x_2 = \frac{-0.01+1\cdot(0.01)}{0.8} = \frac{-0.01+0.01}{0.8} = 0$$

$$\delta x_1 = \frac{0.11-11\cdot 0.01-12\cdot 0}{11} = \frac{0.11-0.11}{11} = 0$$

δx^t = [0 0 0.01]

Calculamos los cambios en la solución introducidos por el refinamiento:
$\tilde{x}^t + \delta x^t = x^t = [1\ \text{-}1\ 0.99] + [0\ 0\ 0.01] = [1\ \ -1\ 1]$.

c) Estimamos el número de condición:

$$K_{(A)} \cong \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \cdot 10^t \rightarrow \|\delta x\|_\infty = 0.01 \text{ y } \|x\|_\infty = 1 \rightarrow K_{(A)} \cong 0.01 \cdot 10^2 = 1$$

Es factible el estimador ya que el cociente es menor a 0.05, el sistema está bien condicionado ya que la solución es la real.

Ejercicio 2

a) Para plantear una iteración de punto fijo, buscamos un esquema de las siguientes características: $g_{(x)} = x$. En este caso la función propuesta por el enunciado es $g_{(x)} = \sqrt[6]{2x^4 + 10}$.

Debemos atender a que se cumplan las tres condiciones del Teorema de Punto Fijo para asegurar la existencia y la unicidad del punto fijo.

- $g_{(x)} \in C^0[a,b]$
- $x \in [a,b] / g_{(x)} \in [a,b]$
- $g'_{(x)} \leq k < 1$

Escogemos el intervalo [1,2].

- Es claro que g(x) es continua en este intervalo, ya que se trataría de la raíz de un número positivo.
- $g_{(a)} = 1.513$ y $g_{(b)} = 1.864$ y $g'_{(x)} = \frac{4}{3}\frac{x^3}{\sqrt[6]{(2x^4+10)^5}}$. Si nos olvidamos de la constante 4/3 vemos que la derivada es el cociente entre dos funciones, un polinomio de orden tres y otro polinomio de orden mayor a tres, por lo que la derivada de la función de iteración es monótonamente decreciente en el intervalo elegido. Además no presenta máximo ni mínimo en el intervalo (la raíz se encuentra en el origen). Por lo tanto la imagen se encuentra contenida en el dominio.
- Como se dijo anteriormente, la derivada es siempre positiva y monótonamente decreciente. El módulo de la derivada está acotada por lo tanto por el máximo relativo que es $g'_{(2)} \leq 0.474 < 1$.

Esta función nos garantiza la unicidad del punto fijo. Planteamos la iteración y resulta:

i	x	g(x)	e
1	2,000000	1,864411	0,135589
2	1,864411	1,801350	0,063061
3	1,801350	1,772949	0,028401
4	1,772949	1,760389	0,012560
5	1,760389	1,754884	0,005505
6	1,754884	1,752481	0,002403
7	1,752481	1,751434	0,001047
8	1,751434	1,750978	0,000456
9	1,750978	1,750780	0,000198
10	1,750780	1,750694	0,000086
11	1,750694	1,750656	0,000038
12	1,750656	1,750640	0,000016
13	1,750640	1,750633	0,000007

Con trece iteraciones llegamos a la precisión deseada. El orden de convergencia es uno, y la constante asintótica del error vale: $c = \frac{\left|g'_{(x_{11})}\right|}{1!} = 0.435$.

b) La función de iteración de Newton Raphson resulta

$$f_{NR(x)} = x - \frac{x^6 - 2x^4 - 10}{6x^5 - 8x^3}$$

Escogemos el intervalo [1.6,2]. Con respecto a las condiciones del Teorema del Punto Fijo:

- Continuidad: La función es discontinua cuando se anula el denominador de la fracción, por lo tanto, cuando $6x^5 - 8x^3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Este valor se encuentra fuera del intervalo. Por lo tanto la función es continua en el intervalo.
- La derivada de la función de iteración resulta: $f'_{NR(x)} = \frac{(24x^2 - 30x^4)(2x^4 - x^6 + 10)}{\left(6x^5 - 8x^3\right)^2}$ La función es continua en el intervalo, y presenta un extremo en las raíces de los polinomios del numerador. El primer polinomio tiene la raíz fuera del intervalo $x = \sqrt{\frac{30}{2}}$. El segundo polinomio tiene una raíz en el intervalo y corresponde al punto fijo que estamos buscando, por lo tanto se encuentra en el intervalo. Por lo tanto la cota de la derivada corresponde al valor de la misma en 1.6, resultando: $\left|f'_{NR(1.6)}\right| = \left|-0,941\right| < 1$. Tanto en los extremos como en el máximo, la imagen de la función está incluida en el dominio.

Iteramos y obtenemos:

i	x	NR(x)	e
1	2,000000	1,828125	0,171875
2	1,828125	1,760364	0,067761
3	1,760364	1,750801	0,009563
4	1,750801	1,750627	0,000174
5	1,750627	1,750627	0,000000

Ya en la quinta iteración obtenemos la precisión deseada. En cuanto al orden de convergencia, observamos que $g(x_5)=0$; por lo tanto el orden de derivación siguiente es 2, y corresponde al orden de convergencia de la iteración.

En cuanto a la constante asintótica del error: $c = \frac{\left|f^{II}_{NR(x_5)}\right|}{2!} = 1.867$.

Ejercicio 3

a) Podemos construir un polinomio de Hermite/Osculador de grado 3.

Planteamos la tabla de diferencias divididas resultando:

i	z	orden 0	orden 1	orden 2	orden 3
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	1	
3	1	1	3		
4	2	4			

Por lo que el polinomio resulta:

$$H_{3(x)} = 0 + 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-0)^2 + 0 \cdot (x-0)^2 \cdot (x-1)$$

$$H_{3(x)} = x^2$$

Finalmente: $H_{3(1.5)} = 2.25$