

# PARGAL 18/10/2011 - TEMA A

VION

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 1100 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3300 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la solución del SEL mediante Gauss sin pivoteo.

Usando grilla de 2 dígitos significativos y redondeo simétrico ( $\{Gr(10,2,4)\}$ )

Expresamos el SEL como una A ampliada ( $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ )

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 1100 & 3300 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -7 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

Calculamos los multiplicadores del pivote (1,1)  $\Rightarrow m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{10} = 0,1$

$$m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Calculo los valores del primer pivote:

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{12}^{(0)} = 2 - 0,1 \cdot 10 = 1$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{13}^{(0)} = 1 - 0,1 \cdot 1100 = -109 \rightarrow \boxed{-110}$$

$$a_{24}^{(1)} = a_{24}^{(0)} - m_{21} \cdot a_{14}^{(0)} = 8 - 0,1 \cdot 3300 = -322 \rightarrow \boxed{-320}$$

$$a_{32}^{(1)} = a_{32}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{12}^{(0)} = -7 - 0,2 \cdot 10 = -7 - 2 = -9$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{13}^{(0)} = 3 - 0,2 \cdot 1100 = 3 - 220 = -217 \rightarrow \boxed{-220}$$

$$a_{34}^{(1)} = a_{34}^{(0)} - m_{31} \cdot a_{14}^{(0)} = -3 - 0,2 \cdot 3300 = -663 \rightarrow \boxed{-660}$$

(notar que -109 no pertenece a grilla dada. Lo mismo sucede con -322, -217 y -663)

Luego de pivotar obtenemos (entre paréntesis colocamos los multiplicadores por comodidad)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 1100 & 3300 \\ (0,1) & 1 & -110 & -320 \\ (0,2) & -9 & -220 & -660 \end{array} \right]$$

Calculamos ahora los multiplicadores del pivote (2,2)  $\Rightarrow m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-9}{1} = -9$

Notar también que como el método es sin pivoteo no intercambiamos las filas 2 y 3.

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{23}^{(1)} = -220 - (-9) \cdot (-110) = -1210 \rightarrow \boxed{-1200}$$

$$a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{24}^{(1)} = -660 - (-9) \cdot (-320) = -660 - 2880 = -3540 \rightarrow \boxed{-3600}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 1100 & 3300 \\ (0,1) & 1 & -110 & -320 \\ (0,2) & (-9) & -1200 & -3600 \end{array} \right]$$

→ Ahora que puede efectuar la triangulación revuelto en forma inversa (de abajo hacia arriba).

$$x_3 = \frac{-3600}{-1200} = 3 ; x_2 = \frac{(-320 - 3 \cdot (-110))}{1} = \frac{10}{1} = 10$$

$$x_1 = \frac{(3300 - 1100 \cdot 3 - 10 \cdot 10)}{10} = \frac{(3300 - 3300 - 100)}{10} = \boxed{-10}$$



$$\tilde{x} = (-10; +10; 3)$$

NOTA

b) Utilizamos la solución de (a) con la  $\{Gr(10, 2, 4), rd\}$

Sim embargo primero calculamos el  $r = b - A\tilde{x}$  pero con doble precisión, es decir con una grilla  $\{Gr(10, 4, 4), rd\}$

$$r = \begin{pmatrix} 3300 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10 & 1100 \\ 1 & +2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ +10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3300 - 3300 \\ 8 - 13 \\ -3 + 81 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 2 \times 2 \end{matrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 78 \end{pmatrix} \rightarrow \text{paso a la grilla de dos dígitos} \Rightarrow r = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 78 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0,2 & -9 & 1 \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 1100 \\ 0 & 1 & -110 \\ 0 & 0 & -1200 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } \begin{cases} Ly = r \\ U\delta x = y \end{cases}$$

$$Ly = r; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0,2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 78 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 0; y_2 = -5; y_3 = 78 + 9(-5) = 33 \Rightarrow y = (0; -5; 33)$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 1100 \\ 0 & 1 & -110 \\ 0 & 0 & -1200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 33 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta x_3 = \frac{33}{-1200} = \boxed{-0,028}$$

$$\delta x_2 = (-5 + 110(-0,028)) / 1$$

$$\delta x_2 = (-5 - 3,1) / 1 = \boxed{-8,1}$$

$$\delta x_1 = (0 - 1100 * (-0,028) - 10(-8,1)) / 10$$

$$\delta x_1 = (31 + 81) / 10 = 110 / 10 = \boxed{11} \quad \boxed{\delta x = (11; -8,1; -0,028)}$$

$$\Rightarrow x = \tilde{x} + \delta x = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -8,1 \\ -0,028 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notar que se obtuvo una solución muy cercana.

c) La estimación del KCA) sería  $KCA) \approx \frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|\tilde{x}\|_{\infty}} 10^2$

$KCA) \approx \frac{11}{10} \times 10^2 = 110$ ; Sin embargo no es válida esta estimación

porque  $\frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} = 1,1 \gg 0,05$ . El KCA) verdadero es de  $\boxed{300}$

Solución para poder estimar correctamente el  $K(A)$ : Aumentar el nro de dígitos de la grilla. El SEL está mal condicionado ya que  $K(A) > 100$ .  
 Fuera del parcial estimaremos la solución con 4 dígitos (es para corroborar lo dicho anteriormente).

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 1100 & 3300 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -7 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = 1/10 = 0,1 ; m_{31} = 2/10 = 0,2$$

$$a_{22}^{(1)} = 2 - 0,1 \cdot 10 = 2 - 1 = 1 \quad a_{23}^{(1)} = 1 - 0,1 \cdot 1100 = -109$$

$$a_{24}^{(1)} = 8 - 0,1 \cdot 3300 = -322 \quad a_{32}^{(1)} = -7 - 0,2 \cdot 10 = -9$$

$$a_{33}^{(1)} = 3 - 0,2 \cdot 1100 = -217 \quad a_{34}^{(1)} = -3 - 0,2 \cdot 3300 = -663$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 1100 & 3300 \\ (0,1) & 1 & -109 & -322 \\ (0,2) & -9 & -217 & -663 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = -9/1 = -9$$

$$a_{33}^{(2)} = -217 - (-9)(-109) = -1198$$

$$a_{34}^{(2)} = -663 - (-9)(-322) = -3561$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 1100 & 3300 \\ (0,1) & 1 & -109 & -322 \\ (0,2) & (-9) & -1198 & -3561 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{-3561}{-1198} = 2,972$$

$$x_2 = \frac{-322 - (-109) \cdot 2,972}{1} = 1,9$$

$$x_1 = \frac{3300 - 1100 \cdot 2,972 - 10 \cdot 1,9}{10} = 1,2$$

$$\tilde{x} = (1,2 ; 1,9 ; 2,972) \text{ en la } \{Gr(10,4,4), rd\} \quad \begin{matrix} 3268 \\ 19 \end{matrix} \text{ en } Gr(10,8,4)$$

$$r = \begin{pmatrix} 3300 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10 & 1100 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,9 \\ 2,972 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3300 - 3300,2 \\ 8 - 7,972 \\ -3 + 1,984 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,028 \\ -1,016 \end{pmatrix} \rightarrow \text{en la } Gr(10,4,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0,2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,028 \\ -1,016 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = -0,2 ; y_2 = 0,048 \\ y_3 = -1,016 - 0,2 \cdot (-0,2) + 9 \cdot 0,048 = -0,544 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 1100 \\ 0 & 1 & -109 \\ 0 & 0 & -1198 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,048 \\ -0,544 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \delta x_3 = 0,0004541 \\ \delta x_2 = 0,048 + 109 \cdot 0,0004541 = 0,0975 \\ \delta x_1 = (-0,2 - 1100 \cdot 0,0004541 - 10 \cdot 0,0975) / 10 = -0,1675 \end{matrix}$$

$$\delta x = (-0,1675 ; 0,0975 ; 0,0004541)$$

$$\|\delta x\|_{\infty} = 0,1675 \quad \|\tilde{x}\|_{\infty} = 2,972 \quad x \approx \tilde{x} + \delta x = (1,2 - 0,1675 ; 1,9 + 0,0975 ; 2,972 + 0,0004541)$$

$$x \approx \tilde{x} + \delta x = (1,2 - 0,1675 ; 1,9 + 0,0975 ; 2,972 + 0,0004541)$$

$$x \approx (1,033 ; 1,998 ; 2,972)$$

$$K(A) \approx \frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|\tilde{x}\|_{\infty}} 10^4 = 0,066 \times 10^4$$

Ahora la grilla es casi adecuada (5 dígitos hubiera sido mejor)

$$K(A) \approx 660$$



## Ejercicio nro 2

VLON

Aplicar los dos métodos de iteración de punto fijo que se enuncian a continuación para hallar un cero de  $f(x) = x^4 - 2x - 10$  con una exactitud de  $10^{-6}$ . Determine el intervalo de convergencia de ambos métodos para que se satisfagan las condiciones del TPF. Utilizar  $x_0 = 2$  y a partir de los datos determinar el intervalo de convergencia.

a) Mediante la función de iteración de punto fijo  $g(x) = \sqrt[4]{2x+10}$

Resolución: Como primer paso verificamos si  $g(x) = x$  posee la misma solución que  $f(x) = 0$ .

$$f(x) = x^4 - 2x - 10 = 0 \Rightarrow x^4 = 2x + 10 \Rightarrow x = \sqrt[4]{2x+10} = g(x) \quad \checkmark$$

Aplicaremos el método. ~~g(x)~~  $x_{n+1} = g(x_n)$

$$x_1 = g(x_0) = g(2) = 1,934336 \quad // \quad x_2 = g(x_1) = g(1,934336) = 1,929784$$

$$x_3 = g(x_2) = 1,929467 \quad // \quad x_4 = g(x_3) = 1,929445 \quad // \quad x_5 = g(x_4) = 1,929444$$

$$x_6 = 1,929444 \dots$$

$$x^* = 1,929443609$$

A lo que llegamos en 5 iteraciones fue a que  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon = 10^{-6}$

Veamos ahora el intervalo de convergencia del método.

Por de pronto el intervalo será aquel que incluya al 2 y a los puntos de la sucesión. Por ejemplo el  $[1,8; 2]$ . Todos los puntos de la sucesión caen en dicho intervalo.

$$g(1,8) = 1,920369 \in [1,8; 2,0] \quad // \quad \text{Verifiquemos que } f(1,8) \cdot f(2) < 0$$

$$g(2) = 1,934336 \in [1,8; 2,0] \quad // \quad f(1,8) = -3,1024 < 0 \quad // \quad f(2) = 2 > 0 \quad \checkmark$$

Veamos ahora si la  $g$  en el intervalo  $[1,8; 2,0]$  satisface todas las condiciones del TPF. No hay problema con la continuidad en dicho intervalo ya que no hay puntos de discontinuidad en dicho intervalo.

Para ver si  $g$  va de  $[a; b]$  en  $[a; b]$  podemos ver que la  $g(x)$  es monótona creciente en dicho intervalo. Alcanza el mínimo en 1,8 ( $g$  vale 1,920369) y su máximo en 2,0 ( $g$  vale 1,934336).

$$\text{Analicemos la derivada } g'(x) = \frac{1}{4} (2x+10)^{\frac{1}{4}-1} \cdot 2 = \frac{1}{2} (2x+10)^{-\frac{3}{4}}$$

Vemos que  $g'(x) > 0 \quad \forall x \in [1,8; 2,0] \Rightarrow g$  es monótona creciente.

$g'(1,8) = 0,0706$  ;  $g'(2) = 0,0691$  se puede ver que la  $g'(x)$  es monótona decreciente analizando la  $g''(x)$  (que es negativa).

$$\text{Por otro lado } L = \max_{1,8 \leq x \leq 2} \{ |g'(x)| \} = 0,0706$$



$$\Rightarrow |x_{m+1} - x^*| \leq \frac{L^{(m+1)}}{(1-L)} |x_1 - x_0| < \varepsilon = 10^{-4}$$

$$|x_{m+1} - x^*| \leq \frac{0.0706^{(m+1)}}{1-0.0706} |1.834336 - 2| < 10^{-4}$$

$$0.0706^{(m+1)} < \frac{10^{-4} \cdot 0.9294}{0.065664} \Rightarrow (m+1) \log(0.0706) < \log\left(\frac{10^{-4} \cdot 0.9294}{0.065664}\right)$$

$$(m+1) \cdot (-2.6507) < -6.56035 \Rightarrow m+1 > 2.47 \Rightarrow m+1 \geq 3$$

No dijimos nada acerca de  $g'(x)$  (3ª cond)  $\boxed{m \geq 3} \Leftrightarrow m+1 \geq 4$   
pero vemos claramente que  $|g'(x)| < 1$   
en todo el  $[1.8; 2.0]$ .

¿Cuál será el orden de convergencia? Veamos cuánto vale  $g'(x^*)$   
y cuánto  $g'(x^*) \Rightarrow x^* = 1.929443608$ ;  $g'(x^*) = 0.06961$   
 $\Rightarrow$  orden de convergencia  $\textcircled{1}$  y CA del error  $CA = \frac{g'(x^*)}{1!} = \boxed{0.06961}$

b) Mediante el método de Newton-Raphson. Ya sabemos cuál es un posible intervalo, construyamos la  $g_{NR}$ .

$$g_{NR}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x^4 - 2x - 10)}{(4x^3 - 2)}$$

$$g_{NR}(1.8) = 1.945461 \quad // \quad g_{NR}(2) = 1.933333$$

Hagamos las cuentas:

$$g_{NR}(x_1) = x_2 = 1.929456 \quad ; \quad g_{NR}(x_2) = x_3 = 1.929444 \rightarrow \text{finalizar}$$

$$g_{NR}(x_3) = x_4 = 1.929444$$

Aquí  $4x^3 - 2$  en el intervalo  $[1.8; 2]$  va entre  $[21; 30]$  con lo cual nunca se hace 0 el denominador.

Sim embargo hay extremos locales. Veamos  $g'_{NR}(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$   
 $g'_{NR}(x) = \frac{(x^4 - 2x - 10)(12x^2)}{(4x^3 - 2)^2}$ ; veamos que posee un cero en  $x^*$  (se anula  $f(x)$ )

También podemos ver que  $x^* \in [1.8; 2.0]$  y que es un mínimo de  $g_{NR}(x) \Rightarrow g_{NR}: [1.8; 2.0] \rightarrow [1.92; 1.95] \subset [1.8; 2.0]$  ✓  
veamos si cumple la 3ª condición:  $g'_{NR}(1.8) = -0.2652$   
la  $g'$  es creciente y  $g'_{NR}(2.0) = +0.1067$

$$L = \max_{1.8 \leq x \leq 2} \{ |g'(x)| \} = 0.2652 < 1$$

El orden de convergencia será 2 ya que  $g'(x^*)=0$  y  $g''(x^*) \neq 0$  y  $g''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$

$$g''(x^*) = \frac{12x^{*2}}{(4x^{*3}-2)} = 1.671$$

$$\Rightarrow CA = \frac{g''(x^*)}{2!} = \underline{0.8356}$$

y orden de convergencia 2.

Ej 3 (TA)

| x | f(x) | f'(x) |
|---|------|-------|
| 0 | 1    | no    |
| 1 | 0    | 1     |
| 2 | 1    | no    |

Plantearnos el método de Newton (o diferencias divididas).

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad \searrow \frac{0-1}{1-0} = -1 \\ 1 \quad 0 \quad \searrow 1 \\ 2 \quad 1 \quad \searrow \frac{1-0}{2-1} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \frac{1-(-1)}{1-0} = 2 \\ \searrow \frac{1-1}{2-1} = 0 \\ \searrow \frac{0-2}{2-0} = -1 \end{array} \end{array}$$

$$P(x) = 1 - (x-0) + 2(x-0)(x-1) - 1 \cdot (x-0)(x-1)(x-1)$$

$$P(x) = 1 - x + 2(x^2 - x) - (x^3 - 2x^2 + x) = 1 - x + 2x^2 - 2x - x^3 + 2x^2 - x$$

$$P(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 1 \quad // \text{ Ahora verifiquemos: } P(0) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(1) = -1 + 4 - 4 + 1 = 0 \quad \checkmark ; P(2) = -8 + 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$P'(x) = -3x^2 + 8x - 4 \Rightarrow P'(1) = -3 + 8 - 4 = 1 \quad \checkmark$$

Ej 3 (TA) Ahora calculamos  $P(0.5) = -0.125$