Parcialito número 2 – 02/05/2011

Primer Cuatrimestre 2011

Análisis Numérico I (75.12) – Curso nro. 7

Tema C

Ejercicio

Sea la siguiente función $f(x) = x^2 - 9 \cdot x - 9 \cdot \cos(x)$. Se desea calcular el cero en el intervalo [-1;0] mediante:

a) La función de iteración de punto fijo $g_C(x) = \dfrac{x^2}{9} - \cos(x)$. Evaluarla hasta que el error absoluto sea menor que $\varepsilon = 10^{-2}$ utilizando la fórmula de acotación del error.

La fórmula de acotación del error es : $\|x_n - \alpha\| \leq \dfrac{k^n}{1-k} \cdot \|x_1 - x_0\| < \varepsilon$, siendo $k = \max\limits_{a<x<b}\left\{\left|g_C{}'(x)\right|\right\}$, y alfa el punto fijo a calcular. Indicar el número de iteraciones. Indicar también si se debe modificar el intervalo (achicarlo) (40 puntos).

b) Determinar si la función del punto (a) converge bajo las condiciones del Teorema del Punto Fijo. (30 puntos).

c) Determinar el orden de convergencia y la constante asintótica del error en forma analítica. (30 puntos).

Respuestas

a) Lo primero que debemos hacer es verificar si en el intervalo dado ([-1;0]) se satisface la condición de existencia de un cero de la función f(x):

$$f(a) = f(-1) = (-1)^2 - 9\cdot(-1) - 9\cdot\cos(-1) \cong 5{,}14 > 0$$
$$f(b) = f(0) = (0)^2 - 9\cdot(0) - 9\cdot\cos(0) \cong -9 < 0$$

Como se puede apreciar al ser la *f(x)* continua en el intervalo dado y cambiar de signo la función esto nos indica que existe al menos un cero en dicho intervalo.

Lo siguiente a analizar es si la función de iteración de punto fijo posee como punto fijo al cero de la f(x):

$$g_C(x) = \frac{x^2}{9} - \cos(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 9\cdot\cos(x) = 9\cdot x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 9\cdot x - 9\cdot\cos(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Ahora comenzamos con los cálculos. Algo que vi y que está bien es usar el punto medio del intervalo para los cálculos, ya que vamos a estar más cerca con seguridad del punto fijo(esto nos es mandatorio desde ya, pero es bueno):

x(0) = -0.500000	x(1) = -0.849805	x(2) = -0.579889	x(3) = -0.799160
x(4) = -0.626347	x(5) = -0.766584	x(6) = -0.654990	x(7) = -0.745386
x(8) = -0.673093	x(9) = -0.731558	x(10) = -0.684670	x(11) = -0.722542
x(12) = -0.692120	x(13) = -0.716669	x(14) = -0.696929	x(15) = -0.712849
x(16) = -0.700040	x(17) = -0.710365	x(18) = -0.702055	x(19) = -0.708752
x(20) = -0.703360	x(21) = -0.707705	x(22) = -0.704206	x(23) = -0.707025
x(24) = -0.704755	x(25) = -0.706584	x(26) = -0.705111	x(27) = -0.706297
x(28) = -0.705342	x(29) = -0.706111	x(30) = -0.705492	x(31) = -0.705991
x(32) = -0.705589	x(33) = -0.705913	x(34) = -0.705652	x(35) = -0.705862
x(36) = -0.705693	x(37) = -0.705829	x(38) = -0.705719	x(39) = -0.705808
x(40) = -0.705736	x(41) = -0.705794	x(42) = -0.705748	x(43) = -0.705785
x(44) = -0.705755	x(45) = -0.705779	x(46) = -0.705759	x(47) = -0.705775
x(48) = -0.705763	x(49) = -0.705773		

Con el criterio de que la diferencia entre dos valores sucesivos sea menor o igual que 0.005 vemos que nos quedan los términos 17 y 18.

Sin embargo al tener que usar la fórmula nos encontramos con el problema de que para usar la fórmula de acotación del error tenemos que calcular el *k* como $k = \max_{a<x<b}\left\{\left|g_C{}'(x)\right|\right\} = \max_{-1<x<0}\left\{\left|\frac{2\cdot x}{9} + sen(x)\right|\right\} \cong 1{,}06 > 1$, con lo cual debemos achicar el intervalo (incluso para que el número de iteraciones no nos quede tan grande). Si vemos las iteraciones, sería bueno achicar el intervalo y tomar (por ejemplo) [a;b]=[-0,5; -0,85].

$$g_C(b) = \frac{(-0,5)^2}{9} - \cos(-0,5) = -0,8498 \in [-0,85 \quad -0,5]$$

$$g_C(a) = \frac{(-0,85)^2}{9} - \cos(-0,85) = -0,5797 \in [-0,85 \quad -0,5]$$

$$k = \max_{a<x<b}\left\{\left|g_C'(x)\right|\right\} = \max_{-0,85<x<-0,50}\left\{\left|\frac{2\cdot x}{9} + sen(x)\right|\right\} \cong 0,94 < 1$$

Efectuamos la acotación:

$$\left\|x_n - \alpha\right\| \leq \frac{0,94^n}{1-0,94}\cdot\left\|-0,85+0,5\right\| < \varepsilon = 10^{-2}$$

$$\frac{0,94^n}{0,06}\cdot 0,35 < 10^{-2} \Rightarrow 0,94^n < \frac{10^{-2}\cdot 0,06}{0,35} \Rightarrow$$

$$\log\left(0,94^n\right) < \log(0,0017) \Rightarrow n\cdot\log(0,94) < \log(0,0017) \Rightarrow$$

$$n > \frac{\log(0,0017)}{\log(0,94)} = 102,93 \Rightarrow n = 103$$

Como muchos vieron este número es muy grande, entonces podemos achicar aún más el intervalo (ver los valores de la iteración en 3 y 4) y tomar [-0,8;-0,6], con lo cual:

$$g_C(a) = \frac{(-0,8)^2}{9} - \cos(-0,8) = -0,6256 \in [-0,8 \quad -0,6]$$

$$g_C(b) = \frac{(-0,6)^2}{9} - \cos(-0,6) = -0.78534 \in [-0,8 \quad -0,6]$$

$$k = \max_{a<x<b}\left\{\left|g_C'(x)\right|\right\} = \max_{-0,85<x<-0,50}\left\{\left|\frac{2\cdot x}{9} + sen(x)\right|\right\} \cong 0.895 < 1$$

Efectuamos la acotación:

$$\left\|x_n - \alpha\right\| \leq \frac{0,895^n}{1-0,895}\cdot\left\|-0,8+0,6256\right\| < \varepsilon = 10^{-2}$$

$$\frac{0,895^n}{0,105}\cdot 0,1744 < 10^{-2} \Rightarrow 0,895^n < \frac{10^{-2}\cdot 0,105}{0,1744} \Rightarrow$$

$$\log\left(0,895^n\right) < \log(0,0060206) \Rightarrow n\cdot\log(0,895) < \log(0,0060206) \Rightarrow$$

$$n > \frac{\log(0,0060206)}{\log(0,895)} = 46,1 \Rightarrow n = 47$$

Igual el valor obtenido (x(47) = -0.705775) cumple ampliamente con la acotación.

b) Determinar si la función del punto (a) converge bajo las condiciones del Teorema del Punto Fijo. (30 puntos).

Tomaremos el último intervalo calculado (el [-0,8; -0,6])

Las condiciones que debo cumplir son 3:

i) que la g(x) sea continua en el intervalo (ningún problema con eso).

ii) que g vaya de [a;b] en [a;b]. En el punto –a- vimos que en los extremos se cumple, ahora veamos que sucede con la función: las derivadas son negativas en todo el intervalo, esto significa que la función es monótona decreciente, con lo cual va a ir a parar de [a;b] en [a;b]

iii) que las derivadas (k) sean menor en módulo que 1, y eso se cumple por lo que vimos en –a- (el máximo está en el extremo izquierdo del intervalo).

Luego satisface las condiciones del Teorema del Punto Fijo y posee un único punto fijo al cual converge.

c) Determinar el orden de convergencia y la constante asintótica del error en forma analítica. (30 puntos).

Esto es muy simple, evaluamos la derivada en el punto fijo hallado y vemos si el valor que nos da es cero o distinto de cero:

$$\alpha = -0{,}70577$$

$$g_C^{(1)}(\alpha) = \frac{2}{9} \cdot \alpha + sen(\alpha) = -0{,}805$$

$$\Rightarrow \; CA = -0{,}805$$

$$p = 1$$

Como el valor es distinto de cero, podemos concluir que converge al punto fijo linealmente (con orden de convergencia 1) y que la constante asintótica del error es de -0,8 que es un número bastante malo (comparémoslo con bisección por ejemplo).