

75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO IFACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**Primer Parcial – Primera Fecha***2do. Cuatrimestre 2014**15/Octubre/2014***Problema 1**

Se pide calcular la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Jacobi iterando hasta que la cota del error relativo sea inferior a 0.05 medida utilizando la norma infinita. Justificar las acciones adoptadas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ayuda: Aplicando el método de Jacobi, tal como está planteado el sistema, no se obtiene convergencia.

Problema 2

Se desea evaluar la raíz cúbica de 7 utilizando una calculadora que no tiene funciones científicas (solamente cuenta con las 4 operaciones elementales).

Para ello se propone plantear un esquema iterativo basado en el método de aproximaciones sucesivas y se pide que el mismo tenga un orden de convergencia lineal.

- Calcular $7^{1/3}$ iterando hasta obtener 6 dígitos significativos correctos usando el esquema propuesto.
- Verificar que el orden de convergencia es lineal a través del cálculo de la constante asintótica de convergencia λ mediante un ajuste efectuado a partir de los resultados del proceso iterativo.

Ayuda: Cuando hay convergencia lineal resulta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lambda$ siendo e el error de truncamiento.

Pregunta 1

Describe una metodología general para estimar el error de una solución numérica de una ecuación no lineal escalar.

Pregunta 2

Describe una metodología para estimar el error de una solución numérica de un sistema de ecuaciones lineales obtenida por un método de tipo directo.

Problema 1 Primero que nada tenemos que hacer que el sistema converja. Recordamos uno de los teoremas de convergencia que dice que si A es diagonal dominante entonces Jacobi y Gauss Seidel convergen.

$$A \text{ es diagonal dominante si } |a_{ii}| > \sum_{\forall j \neq i} |a_{ij}|$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ahora que A es diagonal dominante procedemos aplicar el método de Jacobi:

$$\begin{cases} x_2^{(k+1)} = \frac{2 - x_2^{(k)}}{5} \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_4^{(k+1)} = \frac{4 - 2x_4^{(k)}}{3} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{3 - 2x_4^{(k)}}{2} \end{cases}$$

Ahora tenemos que meter una semilla e iterar hasta que

$$\frac{\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|}{\|\vec{x}^{(k)}\|} < 0,05$$

Algoritmo 1 Ejercicio 1 resuelto en Octave. Están ordenados según $\vec{x} = [x_2, x_1, x_4, x_3]$.

k=1	x_k=	0.400	0.250	1.333	1.500	ERR_k=	1
k=2	x_k=	0.350	0.150	0.333	0.833	ERR_k=	1.24
k=3	x_k=	0.370	0.163	0.778	1.333	ERR_k=	0.42
k=4	x_k=	0.367	0.158	0.444	1.111	ERR_k=	0.318
k=5	x_k=	0.368	0.158	0.593	1.278	ERR_k=	0.152
k=6	x_k=	0.368	0.158	0.481	1.204	ERR_k=	0.0984
k=7	x_k=	0.368	0.158	0.531	1.259	ERR_k=	0.0522
k=8	x_k=	0.368	0.158	0.494	1.235	ERR_k=	0.0321

Solucion exacta: 0.34211 0.28947 0.50000 1.25000

Ejercicio 2 Primero que nada buscamos la forma de convertir el problema en una ecuación no lineal para usar alguno de los métodos vistos en clase. Planteamos

$$\sqrt[3]{7} = x \Rightarrow x^3 - 7 = 0$$

Ahora podemos utilizar alguno de los métodos para la obtención de raíces de ecuaciones no lineales. Probamos con alguno de los métodos iterativos, como punto fijo. Definimos entonces

$$g(x) = x - x^3 + 7$$

Dado que $1^3 = 1$ y que $2^3 = 8$ entonces $\sqrt[3]{7} \in (1, 2)$. Probamos los teoremas de punto fijo, en particular aquel que dice que es necesario que $g(x) \in [1, 2] \forall x \in [1, 2]$. Es fácil ver que $g(1) = 7 \notin [1, 2] \Rightarrow$ el método no converge. Vamos entonces con un método que funciona siempre: bisección. Empezamos con el intervalo

$$I_0 = [1, 2]$$

y comenzamos a iterar como se muestra a continuación.

Algoritmo 2 Ejercicio 2 resuelto en Octave. En el paso número 18 se alcanzó la condición de obtener 6 dígitos significativos ✓.

k	Intervalo	Medio	f(intervalo)	f(medio)
1	(1.00000 2.00000)	1.50000	(-6.00000 1.00000)	-3.62500
2	(1.50000 2.00000)	1.75000	(-3.62500 1.00000)	-1.64062
3	(1.75000 2.00000)	1.87500	(-1.64062 1.00000)	-0.40820
4	(1.87500 2.00000)	1.93750	(-0.40820 1.00000)	0.27319
5	(1.87500 1.93750)	1.90625	(-0.40820 0.27319)	-0.07309
6	(1.90625 1.93750)	1.92188	(-0.07309 0.27319)	0.09864
7	(1.90625 1.92188)	1.91406	(-0.07309 0.09864)	0.01243
8	(1.90625 1.91406)	1.91016	(-0.07309 0.01243)	-0.03042
9	(1.91016 1.91406)	1.91211	(-0.03042 0.01243)	-0.00902
10	(1.91211 1.91406)	1.91309	(-0.00902 0.01243)	0.00170
11	(1.91211 1.91309)	1.91260	(-0.00902 0.00170)	-0.00366
12	(1.91260 1.91309)	1.91284	(-0.00366 0.00170)	-0.00098
13	(1.91284 1.91309)	1.91296	(-0.00098 0.00170)	0.00036
14	(1.91284 1.91296)	1.91290	(-0.00098 0.00036)	-0.00031
15	(1.91290 1.91296)	1.91293	(-0.00031 0.00036)	0.00002
16	(1.91290 1.91293)	1.91292	(-0.00031 0.00002)	-0.00014
17	(1.91292 1.91293)	1.91293	(-0.00014 0.00002)	-0.00006
18	(1.91293 1.91293)	1.91293	(-0.00006 0.00002)	-0.00002
19	(1.91293 1.91293)	1.91293	(-0.00002 0.00002)	0.00000
20	(1.91293 1.91293)	1.91293	(-0.00002 0.00000)	-0.00001

Entre el paso 17 y el 18 los primeros 6 dígitos significativos no cambian, por lo que se ha alcanzado la condición de corte.

FALTA DETERMINAR EL ORDEN DE COVERGENCIA!

Pregunta 1 Para estimar el error de una solución numérica no lineal escalar se puede utilizar

$$\varepsilon_k = \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right|$$

ya que a medida que la solución se comienza a aproximar al valor verdadero entonces x_k y x_{k-1} cada vez se diferencian menos y ε_k nos habla de cuánto nos acercamos al valor verdadero entre el paso k y el $k-1$.

Pregunta 2 Para estimar el error de una solución obtenida por un método directo se puede introducir dicha solución en el sistema que atina a resolver y proceder de la siguiente manera

$$A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow \text{obtengo } \vec{x}_1 \rightarrow A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b} - \vec{b}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\vec{b}$$

A su vez

$$\vec{b} - \vec{b}_1 = A\vec{x} - A\vec{x}_1 = A\Delta\vec{x}$$

por lo tanto

$$A\Delta\vec{x} = \Delta\vec{b} \rightarrow \text{obtengo } \Delta\vec{x}$$

y de esta forma puedo estimar $\Delta\vec{x}$.