Evaluación integradora de fecha 20/12/2013

Análisis Numérico I (75.12-95.04)

Ejercicio nro. 1

Obtener la aproximación polinomial de tercer grado en el intervalo [-1;+1] para la función $f(x) = e^x$.

Usar los polinomios ortogonales de Legendre para dicha aproximación:

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} \cdot x$.

Respuesta

Debemos tener en cuenta que al aproximar a la función por los polinomios de Legendre lo que estamos obteniendo es la mínima distancia de dicha función con el subespacio generado por los polinomios de grado 3 en el espacio de las C[-1;+1].

El producto interno se define por $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot \bar{g}(x) \cdot dx$. Y si asumimos que los $\{P_k(x)\}_{0 \le k \le n}$ son una BOG en el espacio de las funciones continuas en el intervalo [-1;+1], la función la podemos representar como $f(x) \cong \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P_k(x)$. Sabemos que para el caso en que $n \to \infty$ vale la igualdad por el teorema de Weierstrass.

Realicemos el producto interno de la función con cada uno de los polinomios ortogonales:

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot P_k(x) \Rightarrow \langle f \mid P_j \rangle \cong \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \langle P_k \mid P_j \rangle = a_j \cdot \langle P_j \mid P_j \rangle \Rightarrow a_j = \frac{\langle f \mid P_j \rangle}{\langle P_j \mid P_j \rangle}$$

Ahora calculamos los productos internos (debemos integrar).

$$\langle f \mid P_0 \rangle = \int_{-1}^{+1} e^x \cdot 1 \cdot dx = \left[e^x\right]_{-1}^{+1} = 2{,}350402$$

$$\langle P_0 \mid P_0 \rangle = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot 1 \cdot dx = \left[x\right]_{-1}^{+1} = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{\langle f \mid P_0 \rangle}{\langle P_0 \mid P_0 \rangle} = 1{,}175201$$

$$\langle f \mid P_1 \rangle = \int_{-1}^{+1} e^x \cdot x \cdot dx = \left[(x-1) \cdot e^x\right]_{-1}^{+1} = 0{,}7357589$$

$$\langle P_1 \mid P_1 \rangle = \int_{-1}^{+1} x \cdot x \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{\langle f \mid P_1 \rangle}{\langle P_1 \mid P_1 \rangle} = 1{,}103638$$

$$\langle f \mid P_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} e^x \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot dx = \left[\left(x^2 - 2 \cdot x + 2 - \frac{1}{3}\right) \cdot e^x\right]_{-1}^{+1} = 0{,}095417$$

$$\langle P_2 | P_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \cdot x^2 \cdot dx = \int_{-1}^{+1} \left(x^4 - \frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{9} \right) \cdot dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2 \cdot x^3}{9} + \frac{x}{9} \right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\langle f | P_2 \rangle}{\langle P_2 | P_2 \rangle} = 0{,}536722$$

$$\langle f | P_3 \rangle = \int_{-1}^{+1} e^x \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x \right) \cdot dx = \int_{-1}^{+1} x^3 \cdot e^x \cdot dx - \frac{3}{5} \cdot \int_{-1}^{+1} x \cdot e^x \cdot dx = \left[\left(x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 6 \right) \cdot e^x - \frac{3}{5} \cdot (x-1) \cdot e^x \right]_{-1}^{+1} =$$

$$\langle f | P_3 \rangle = \left[\left(x^3 - 3 \cdot x^2 + \left(6 - \frac{3}{5} \right) \cdot x - \left(6 - \frac{3}{5} \right) \right) \cdot e^x \right]_{-1}^{+1} = 0{,}008052$$

$$\langle P_3 | P_3 \rangle = \int_{-1}^{+1} \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x \right) \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x \right) \cdot x^2 \cdot dx = \int_{-1}^{+1} \left(x^6 - \frac{6}{5} \cdot x^4 + \frac{9}{25} \cdot x^2 \right) \cdot dx = \left[\frac{x^7}{7} - \frac{6 \cdot x^5}{25} + \frac{9 \cdot x^3}{75} \right]_{-1}^{+1}$$

$$\langle P_3 | P_3 \rangle = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{18}{75} = 0{,}045714 \Rightarrow a_3 = \frac{\langle f | P_3 \rangle}{\langle P_3 | P_3 \rangle} = 0{,}176139$$

$$f(x) \cong 1{,}175201 + 1{,}103638 \cdot x + 0{,}536722 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) + 0{,}176139 \cdot \left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x \right)$$

Se ha encontrado la combinación que minimiza la distancia de la función a los polinomios de grado 3 en la métrica dada.

===

Ejercicio nro. 2

Estimar mediante el método de Romberg el área encerrada entre la curva dada en forma paramétrica por $\begin{cases} x(t) = t - sen(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$ y el eje “x”. Iterar hasta una tolerancia de 10^{-4} o un máximo de 5 iteraciones.

Respuesta

Buscamos los valores del parámetro “t” para los cuales y(t) vale “0”. Son los valores para los cuales $0 = 1 - \cos(t)$, o sea que t vale 0 o $2 \cdot \pi$. Vamos a realizar la integral para el parámetro variando entre dichos valores $t \in [0; 2\pi]$.

$$A = \int_0^{2\pi} y(t) \cdot dx = \int_0^{2\pi} y(t) \cdot x'(t) \cdot dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t)) \cdot (1 - \cos(t)) \cdot dt = \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^2 \cdot dt =$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cdot \cos(t) + \cos^2(t) \right) \cdot dt$$

Elaboramos una tabla como para poder calcular 5 veces con el método de trapecios comenzando con un paso $h = 2 \cdot \pi$, y llegando hasta $h = \pi/8$.

Veamos cómo quedan las 5 integrales por trapecios generando los valores de dicha tabla.

t	$f(t)$
0	0
$\pi/8$	0,005794
$\pi/4$	0,085786
$3\pi/8$	0,381080
$\pi/2$	1
$5\pi/8$	1,911813
$3\pi/4$	2,914214
$7\pi/8$	3,701312
π	4
$9\pi/8$	3,701312
$5\pi/4$	2,914214
$11\pi/8$	1,911813
$3\pi/2$	1
$13\pi/8$	0,381080
$7\pi/4$	0,085786
$15\pi/8$	0,005794
2π	0

Ahora calculamos las integrales por trapecios.

$$R_{11} = T(h=2\pi) = \frac{2\pi}{2}\cdot\left(f(0)+f(2\pi)\right) = \pi\cdot(0+0) = 0$$

$$R_{21} = T(h=\pi) = \frac{\pi}{2}\cdot\left(f(0)+f(2\pi)+2\cdot f(\pi)\right) = \frac{\pi}{2}\cdot(0+0+2\cdot 4) = 12{,}566371$$

$$R_{31} = T\left(h=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\left(f(0)+f(2\pi)+2\cdot\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\left(0+0+2\cdot(1+4+1)\right)$$

$$R_{31} = 9{,}424778$$

$$R_{41} = T\left(h=\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}\cdot\left(f(0)+f(2\pi)+2\cdot\left(\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{5\pi}{4}\right)+ \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+f\left(\frac{7\pi}{4}\right) \end{array}\right)\right)$$

$$R_{41} = \frac{\pi}{4}\cdot\left(0+0+2\cdot(0{,}0857861+1+2{,}914214+4+2{,}914214+1+0{,}0857861)\right) = 9{,}424778$$

$$R_{51}=T\left(h=\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}\cdot\left(f(0)+f(2\pi)+2\cdot\left(\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{5\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+ \\ f\left(\frac{7\pi}{8}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{9\pi}{8}\right)+f\left(\frac{5\pi}{4}\right)+f\left(\frac{11\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)+ \\ f\left(\frac{13\pi}{8}\right)+f\left(\frac{7\pi}{4}\right)+f\left(\frac{15\pi}{8}\right) \end{array}\right)\right)=$$

$$R_{41}=\frac{\pi}{8}\cdot\left(0+0+2\cdot\left(\begin{array}{l} 0{,}005794+0{,}0857861+0{,}381080+1+1{,}911813+2{,}914214+3{,}701312+4+ \\ 3{,}701312+2{,}914214+1{,}911813+1+0{,}381080+0{,}0857861+0{,}005794 \end{array}\right)\right)=9{,}424778$$

Ahora aplicamos el método:

$$R_{22}=\frac{4\cdot 12{,}566371-0}{3}=16{,}755161$$

$$R_{32}=\frac{4\cdot 9{,}424778-12{,}566371}{3}=8{,}377580$$

$$R_{42}=\frac{4\cdot 9{,}424778-9{,}424778}{3}=9{,}424778$$

$$R_{52}=\frac{4\cdot 9{,}424778-9{,}424778}{3}=9{,}424778$$

$$R_{33}=\frac{16\cdot 8{,}377580-16{,}755161}{15}=7{,}819075$$

$$R_{43}=\frac{16\cdot 9{,}424778-8{,}377580}{15}=9{,}494591$$

$$R_{53}=\frac{16\cdot 9{,}424778-9{,}424778}{15}=9{,}424778$$

$$R_{44}=\frac{64\cdot 9{,}494591-7{,}819075}{63}=9{,}521186$$

$$R_{54}=\frac{64\cdot 9{,}424778-9{,}494591}{63}=9{,}423670$$

$$R_{55}=\frac{256\cdot 9{,}423670-9{,}521186}{255}=9{,}423288$$

$$\begin{array}{lllll}
R_{11}=0 & & & & \\
R_{21}=12{,}566371 & R_{22}=16{,}755161 & & & \\
R_{31}=9{,}424778 & R_{32}=8{,}377580 & R_{33}=7{,}819075 & & \\
R_{41}=9{,}424778 & R_{42}=9{,}424778 & R_{43}=9{,}494591 & R_{44}=9{,}521186 & \\
R_{51}=9{,}424778 & R_{52}=9{,}424778 & R_{53}=9{,}424778 & R_{54}=9{,}423670 & R_{55}=9{,}423288
\end{array}$$

Notar que el error viene dado por la diferencia entre $\left|R_{55}-R_{44}\right|=0{,}1$ y el valor más probable es $R_{55}=9{,}42$ (Capítulo 4.5 del Burden, pág. 211).
El valor difiere mucho del verdadero $I=9{,}425$.

==

Ejercicio nro. 3

Dada la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:
$y'' + 100 \cdot y = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

a) Demostrar que el valor $(y')^2 + 100 \cdot y^2 = cte$ se mantiene constante.

Respuesta

Lo que vamos a demostrar es muy simple, ya que la ecuación diferencial es la del oscilador armónico. Generemos a partir de la ecuación de la energía del oscilador la demostración:

$$E(t) = (y'(t))^2 + 100 \cdot y(t)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = 2 \cdot y'(t) \cdot y''(t) + 100 \cdot 2 \cdot y(t) \cdot y'(t) = 2 \cdot y'(t) \cdot [y''(t) + 100 \cdot y(t)] = 2 \cdot y'(t) \cdot 0 = 0 \Rightarrow E = cte$$

Con lo cual queda demostrado que el valor que llamamos energía permanece constante en el tiempo.

b) Discretizar la ecuación mediante el método de Nyström:

$$w_{n+1} - 2 \cdot w_n + w_{n-1} = h^2 \cdot f\left(t_n, w_n, \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \cdot h}\right).$$

Respuesta

La ecuación a resolver es $y'' + 100 \cdot y = 0$. Con lo cual la ecuación de Nyström quedará:
$y'' = f(t, y, y') = -100 \cdot y$.

Al aplicar el método a esta ecuación queda:

$$w_{n+1} - 2 \cdot w_n + w_{n-1} = h^2 \cdot f\left(t_n, w_n, \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \cdot h}\right) = h^2 \cdot (-100 \cdot w_n) \Rightarrow$$

$$w_{n+1} = 2 \cdot w_n - w_{n-1} - 100 \cdot h^2 \cdot w_n = (2 - 100 \cdot h^2) \cdot w_n - w_{n-1}$$

Y ya quedó discretizada.

c) Siendo $h = 0{,}1$. Estimar $w_1 = w_0 + h \cdot \beta + \frac{h^2}{2} \cdot f(t_0, w_0, \beta)$ donde $w_0 = y(0)$; $\beta = y'(0)$.

Respuesta

La estimación de y en t=0,1 será:

$$w_1 = y(0) + 0{,}1 \cdot y'(0) + \frac{0{,}1^2}{2} \cdot (-100 \cdot y(0)) = 1 + 0{,}1 \cdot 0 + \frac{0{,}1^2}{2} \cdot (-100 \cdot 1) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Y obtuvimos el valor pedido.

d) Estimar $y'(0{,}2)$, $y'(0{,}3)$, $y'(0{,}4)$ y verificar que se cumple (a).

Respuesta

Para obtener dichos valores debemos calcular hasta el valor de w_5. Los primeros dos valores los tenemos y por ende usamos la ecuación discretizada de (b):

$$w_{n+1} = (2 - 100 \cdot h^2) \cdot w_n - w_{n-1} = (2 - 100 \cdot 0{,}1^2) \cdot w_n - w_{n-1} = w_n - w_{n-1}$$

$$w_2 = w_1 - w_0 = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$$

$$w_3 = w_2 - w_1 = -0{,}5 - 0{,}5 = -1$$

$$w_4 = w_3 - w_2 = -1 + 0{,}5 = -0{,}5$$

$$w_5 = w_4 - w_3 = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$$

Con estos valores estimamos las derivadas también con el mismo orden de consistencia (orden 2).

$$y'(t_n) \cong \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2h} = \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{0{,}2}$$

$$y'(0{,}1) \cong \frac{w_2 - w_0}{0{,}2} = \frac{-0{,}5 - 1}{0{,}2} = -7{,}5$$

$$y'(0{,}2) \cong \frac{w_3 - w_1}{0{,}2} = \frac{-1 - 0{,}5}{0{,}2} = -7{,}5$$

$$y'(0{,}3) \cong \frac{w_4 - w_2}{0{,}2} = \frac{-0{,}5 + 0{,}5}{0{,}2} = 0$$

$$y'(0{,}4) \cong \frac{w_5 - w_3}{0{,}2} = \frac{0{,}5 + 1}{0{,}2} = 7{,}5$$

Ahora aplicamos la fórmula de (a) para verificar que se cumple para todos los casos y cuánto vale la energía:

$$E(t_n) = (y'(t_n))^2 + 100 \cdot y(t_n)^2$$

$$t = 0 \Rightarrow E(0) = (y'(0))^2 + 100 \cdot y(0)^2 = 0^2 + 100 \cdot 1^2 = 100$$

$$E(0{,}1) = (y'(0{,}1))^2 + 100 \cdot y(0{,}1)^2 = (-7{,}5)^2 + 100 \cdot 0{,}5^2 = 81{,}25$$

$$E(0{,}2) = (y'(0{,}2))^2 + 100 \cdot y(0{,}2)^2 = (-7{,}5)^2 + 100 \cdot (-0{,}5)^2 = 81{,}25$$

$$E(0{,}3) = (y'(0{,}3))^2 + 100 \cdot y(0{,}3)^2 = (0)^2 + 100 \cdot (-1)^2 = 100$$

$$E(0{,}4) = (y'(0{,}4))^2 + 100 \cdot y(0{,}4)^2 = (7{,}5)^2 + 100 \cdot (-0{,}5)^2 = 81{,}25$$

Y obtuvimos el valor pedido (se mueve entre 81,25 y 100 pero siempre vale dichos valores).

Veamos ahora para qué valores de h el método resulta estable (esto no es parte del examen).

Calcularemos la estabilidad del método.

$$w_{n+1} = \left(2 - 100 \cdot h^2\right) \cdot w_n - w_{n-1} \Rightarrow \begin{cases} v_{n+1} = w_n \\ w_{n+1} = \left(2 - 100 \cdot h^2\right) \cdot w_n - v_n \end{cases}$$

A este SEDO de ecuaciones de un solo paso lo perturbamos y como la ecuación es lineal en las variables nos queda:

$$\begin{cases} v_n \to v_n + \delta_n \\ w_n \to w_n + \varepsilon_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{n+1} = \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1} = \left(2 - 100 \cdot h^2\right) \cdot \varepsilon_n - \delta_n \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - 100 \cdot h^2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(M - \lambda \cdot Id\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2 - 100 \cdot h^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \left(2 - 100 \cdot h^2 - \lambda\right) \cdot (-\lambda) + 1 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cdot \left(1 - 50 \cdot h^2\right) \cdot \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - 50 \cdot h^2 \pm \sqrt{\left(1 - 50 \cdot h^2\right)^2 - 1}$$

$$\lambda = 1 - 50 \cdot h^2 \pm \sqrt{50^2 \cdot h^4 - 100 \cdot h^2} \Rightarrow 50^2 \cdot h^4 - 100 \cdot h^2 \leq 0 \Rightarrow 50^2 \cdot h^4 \leq 100 \cdot h^2 \Rightarrow h^2 \leq \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow h \leq \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Con lo cual vemos que el *h* del problema resulta estable.