

Primer parcial – Tema C - 03/11/2010

Segundo Cuatrimestre 2010

Análisis Numérico I (75.12) – Curso nro. 7

Ejercicio nro. 1

Dado el siguiente sistema lineal $Ax=b$. Se pide lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 12 & 2,3 & 2,5 \\ 2,3 & 6800 & 6,8 \\ 4,7 & 6,8 & 4,8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,3 \\ 6800 \\ 1,9 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar la solución del sistema mediante el método de Gauss sin pivoteo utilizando una grilla de punto flotante de 2 dígitos significativos y redondeo. (15 puntos).
- b) Utilizar la solución de (a) con la misma grilla para aplicar refinamiento iterativo. (15 puntos).
- c) Con los resultados de (a) y (b) indicar si es factible obtener una estimación del $K(A)$. Comparar los resultados de (a) y (b) con la solución exacta $x = (1 \ 1 \ -2)^t$ ¿Está el sistema mal condicionado? Explique. (10 puntos).

Efectuar todos los cálculos en forma explícita cuando se opere con la grilla.

Ejercicio nro. 2

Aplice el método de iteración de punto fijo para hallar el cero de $f(x) = \cos(4 * x^2)$ con una exactitud de 10^{-4} en el intervalo $[0;1]$. Utilice en ambos casos $p_0 = 0$:

- a) Mediante una función de iteración de punto fijo a determinar. (20 puntos).
- b) Mediante el método de Newton-Raphson. (15 puntos).

Verifique en ambos casos si las funciones de iteración de punto fijo satisfacen las condiciones del TPF. Calcule, asimismo, el orden de convergencia y la constante asintótica del error en forma analítica para las mismas.

Ejercicio nro. 3

- a) Dadas las siguientes 4 condiciones, se pide hallar el polinomio interpolante de menor grado que las satisface, calculando con dicho polinomio $P(0,5)$. (15 puntos).

x	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$
0	1	0
1	- 0.65364	6,05442

- b) Sabiendo que $f(x) = \cos(4 * x^2)$, calcular el error verdadero y la acotación del error. (10 puntos).

RESOLUCIÓN TEMA A

Ejercicio 1

Código MATLAB:

```
A=[12 2300 2.5; 2.3 4.7 6.8; 4.7 6.8 4.8]
b=[-4600; -0.3; -4.1]
x=inv(A)*b
condA=cond(A)
```

Solución MATLAB:

```
x' = [1.00718090276384 2.00634393943497 1.00195594690991]
K(A) = 1057.393497545522
```

a) Se resuelve el ejercicio en base diez, 2 dígitos de mantisa y redondeo simétrico para las operaciones. Algoritmo de Gauss sin pivoteo.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2.3 & 2.5 & 9.3 \\ 2.3 & 6800 & 6.8 & 6800 \\ 4.7 & 6.8 & 4.8 & 1.9 \end{bmatrix} \rightarrow m_{12} = \frac{2.3}{12} = 0.19 \quad m_{13} = \frac{4.7}{12} = 0.39$$

1er iteración:

$$a_{22} = 6800 - 2.3 \cdot 0.19 = 6800 - 0.44 = 6800$$

$$a_{23} = 6.8 - 2.5 \cdot 0.19 = 6.8 - 0.48 = 6.3$$

$$b_2 = 6800 - 9.3 \cdot 0.19 = 6800 - 1.8 = 6800$$

$$a_{32} = 6.8 - 2.3 \cdot 0.39 = 6.8 - 0.9 = 5.9$$

$$a_{33} = 4.8 - 2.5 \cdot 0.39 = 4.8 - 0.98 = 3.8$$

$$b_3 = 1.9 - 9.3 \cdot 0.39 = 1.9 - 3.6 = -1.7$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 12 & 2.3 & 2.5 & 9.3 \\ (0.19) & 6800 & 6.3 & 6800 \\ (0.39) & 5.9 & 3.8 & -1.7 \end{bmatrix} \rightarrow m_{23} = \frac{5.9}{6800} = 8.7 \cdot 10^{-4}$$

2da iteración:

$$a_{33} = 3.8 - 8.7 \cdot 10^{-4} \cdot 6.3 = 3.8 - 5.5 \cdot 10^{-5} = 3.8$$

$$b_3 = -1.7 - 8.7 \cdot 10^{-4} \cdot 6800 = -1.7 - 5.9 = -7.6$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 12 & 2.3 & 2.5 & 9.3 \\ (0.19) & 6800 & 6.3 & 6800 \\ (0.39) & (8.7 \cdot 10^{-4}) & 3.8 & -7.6 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.19 & 1 & 0 \\ 0.39 & 8.7 \cdot 10^{-4} & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad U = \begin{bmatrix} 12 & 2.3 & 2.5 \\ 0 & 6800 & 6.3 \\ 0 & 0 & 3.8 \end{bmatrix}$$

Finalmente realizando sustitución inversa obtenemos:

$$\tilde{x}_3 = \frac{-7.6}{3.8} = -2$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{6800 - 6.3 \cdot (-2)}{6800} = \frac{6800 + 12.6}{6800} = \frac{6800}{6800} = 1$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{9.3 - 2.5 \cdot (-2) - 2.3 \cdot 1}{12} = \frac{9.3 + 5 - 2.3}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\tilde{x}' = [1 \ 1 \ -2]$$

Notamos que la solución obtenida ya es casi exacta.

b) Realizamos un paso de refinamiento iterativo; para calcular el residuo utilizamos doble precisión, es decir, mantisa de 4 dígitos.

$$r = b - \tilde{b}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 12 & 2.3 & 2.5 \\ 2.3 & 6800 & 6.8 \\ 4.7 & 6.8 & 4.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 2.3 - 5 \\ 2.3 + 6800 - 13.6 \\ 4.7 + 6.8 - 9.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.300 \\ 6789 \\ 1.900 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 9.3 \\ 6800 \\ 1.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.300 \\ 6789 \\ 1.900 \end{bmatrix}$$

Ahora utilizando la descomposición LU que obtuvimos con el algoritmo de Gauss, resuelvo el siguiente sistema:

$$A \cdot \delta x = r \rightarrow L \cdot U \cdot \delta x = r \rightarrow L \cdot y = r$$

Busco y:

$$L \cdot y = r \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.19 & 1 & 0 \\ 0.39 & 8.7 \cdot 10^{-4} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 11$$

$$y_3 = -8.7 \cdot 10^{-4} \cdot 11 = -9.6 \cdot 10^{-3}$$

$$y' = [0 \ 11 \ -9.6 \cdot 10^{-3}]$$

Busco δx :

$$U \cdot \delta x = y \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 2.3 & 2.5 \\ 0 & 6800 & 6.3 \\ 0 & 0 & 3.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -9.6 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\delta x_3 = -2.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta x_2 = \frac{11 + 6.3 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3}}{6800} = \frac{11 + 16 \cdot 10^{-3}}{6800} = 1.6 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta x_1 = \frac{2.5 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} - 2.3 \cdot 1.6 \cdot 10^{-3}}{12} = \frac{6.3 \cdot 10^{-3} - 3.7 \cdot 10^{-3}}{12} = \frac{2.6 \cdot 10^{-3}}{12} = 2.2 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta x' = [-2.5 \cdot 10^{-3} \ 1.6 \cdot 10^{-3} \ 2.2 \cdot 10^{-4}]$$

Vemos que el refinamiento no produce cambios en la solución, ya que en la grilla no permite contemplar el cambio en x , por lo tanto:

$$\tilde{x}^t + \delta x^t = x^t = [1 \ 1 \ -2].$$

c) Estimamos el número de condición:

$$K_{(A)} \simeq \frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \cdot 10^t \rightarrow \|\delta x\|_{\infty} = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ y } \|x\|_{\infty} = 2 \rightarrow K_{(A)} \simeq \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 10^2 = 0.125$$

Vemos que este estimador no es bueno ya que el número de condición debe ser mayor a uno. Vamos a probar con otro estimador visto en la práctica:

$$K_{(A)} \simeq \frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \cdot \frac{\|b\|_{\infty}}{\|\delta b\|_{\infty}} \rightarrow \|\delta b\|_{\infty} = 11 \text{ y } \|b\|_{\infty} = 6800 \rightarrow K_{(A)} = \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot \frac{6800}{11} = 0.77$$

Tampoco llegamos a un resultado coherente con el segundo estimador.

Sucede que como la solución obtenida en la primera iteración es muy buena, el refinamiento produce un vector de corrección con norma muy pequeña. La matriz está bien condicionada ya que la solución es buena.

Ejercicio 2

a) Para plantear una iteración de punto fijo, buscamos un esquema de las siguientes características: $g_{(x)} = x$. Como se deben buscar las raíces de $f_{(x)} = \cos(4 \cdot x^2)$, se debe cumplir $0 = \cos(4 \cdot x^2)$, si sumamos x a ambos miembros obtenemos el esquema que buscábamos: $x = x + \cos(4 \cdot x^2)$, es decir, $g_{(x)} = x$ con $g_{(x)} = x + \cos(4 \cdot x^2)$.

Debemos atender a que se cumplan las tres condiciones del Teorema de Punto Fijo para asegurar la existencia y la unicidad del punto fijo.

- $g_{(x)} \in C^0[a, b]$
- $x \in [a, b] / g_{(x)} \in [a, b]$
- $g'_{(x)} \leq k < 1$

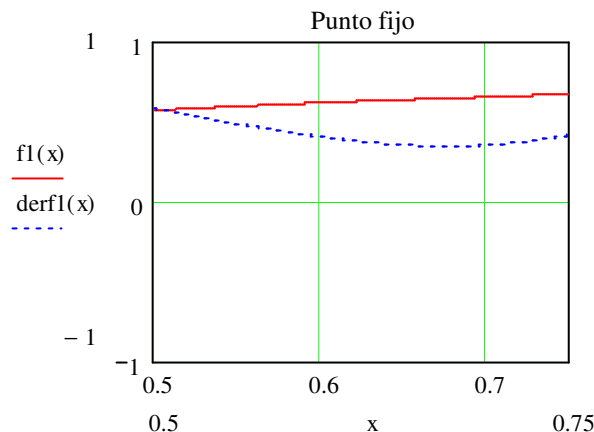
Escogemos el intervalo $[0.6, 0.7]$.

- Es claro que $g(x)$ es continua en este intervalo.
- $g_{(a)} = 0.73$ y $g_{(b)} = 0.321$ y $g'_{(x)} = 1 - 8 \cdot x \cdot \sin(4 \cdot x^2)$. La derivada es siempre negativa por lo que la función es decreciente en este intervalo.
- La derivada no está acotada por uno, ya que $g'_{(a)} = -3.759$ y $g'_{(b)} = -4.181$.

Buscamos otra función que nos garantice la unicidad del punto fijo:

$$g_{(x)} = x + \frac{\cos(4 \cdot x^2)}{8}$$

- Es claro que $g(x)$ es continua en este intervalo.
- $g_{(a)} = 0.616$ y $g_{(b)} = 0.653$ y $g'_{(x)} = 1 - x \cdot \sin(4 \cdot x^2)$. La derivada es siempre positiva por lo que la función es creciente en este intervalo. Presenta un mínimo en 0.678 . Su valor es 0.346 .
- La derivada está acotada por uno, ya que $g'_{(a)} = 0.405$ y $g'_{(b)} = 0.352$.



Esta función nos garantiza la unicidad del punto fijo. Planteamos la iteración y resulta:

i	x_k	x_{k+1}	Δ
0	0,6	0,61630296	0,01630296
1	0,61630296	0,62273499	0,00643203
2	0,62273499	0,62518494	0,00244995
3	0,62518494	0,62610637	0,00092143
4	0,62610637	0,62645132	0,00034495
5	0,62645132	0,62658023	0,00012891
6	0,62658023	0,62662838	4,8148E-05

Con siete iteraciones llegamos a la precisión deseada. El orden de convergencia es uno, y la constante asintótica del error vale: $c = \frac{g'(x_7)}{1!} = 0.373$.

b) La función de iteración de Newton Raphson resulta

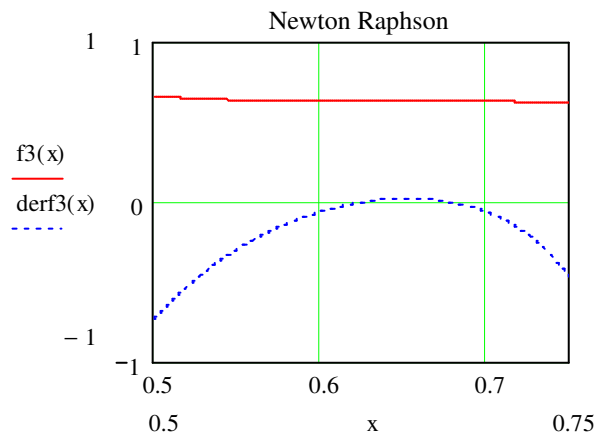
$$f_{NR(x)} = x + \frac{1}{8 \cdot x \cdot \tan(4 \cdot x^2)}$$

Escogemos el intervalo [0.6,0.7]. Con respecto a las condiciones del Teorema del Punto Fijo:

- Es claro que la función es continua en este intervalo.
- $f_{NR(a)} = 0.627406$ y $f_{NR(b)} = 0.626764$ y $f'_{NR(x)} = \frac{-1}{\tan(4 \cdot x^2)^2} \left(1 + \frac{1}{8 \cdot \tan(4 \cdot x^2) \cdot x^2} \right)$.

La derivada presenta un máximo en 0.653 y su valor es 0.021. El valor en los extremos es -0.063 y -0.064 respectivamente.

- La derivada está acotada por uno, como se desprende de lo anterior.



Iteramos y obtenemos:

i	x_k	x_{k+1}	Δ
0	0,6	0,6274057	0,0274057
1	0,6274057	0,62665751	-0,00074818
2	0,62665751	0,62665707	-4,4312E-07

Ya en la tercer iteración obtenemos la precisión deseada. En cuanto al orden de convergencia, observamos que $g(x_3) = 0$; por lo tanto el orden de derivación siguiente es 2, y corresponde al orden de convergencia de la iteración.

En cuanto a la constante asintótica del error: $c = \frac{f''_{NR(x_3)}}{2!} = 0.798$.

Ejercicio 3

a) Podemos construir un polinomio de Hermite/Osculador de grado 3.

Planteamos la tabla de diferencias divididas resultando (a 5 decimales):

z	orden 0	orden 1	orden 2	orden 3
0,00000	1,00000	0,00000	-1,65364	9,36170
0,00000	1,00000	-1,65364	7,70806	
1,00000	-0,65364	6,05442		
1,00000	-0,65364			

Por lo que el polinomio resulta:

$$H_{3(x)} = 1 + 0 \cdot x - 1.65364 \cdot x^2 + 9.3617 \cdot x^2(x-1)$$

$$\text{Finalmente: } H_{3(0.5)} = -0.584$$

b) Calculamos los errores

El error verdadero es:

$$e_{(x)} = H_{3(x)} - f_{(x)} \rightarrow e_{(0.5)} = H_{3(0.5)} - f_{(0.5)} = -0.584 - 0.54 = 1.124$$

Buscamos una cota del error:

Se realizó una aproximación con un polinomio de grado 3. Si desarrollamos la función con un polinomio de Taylor, el orden 4 de dicho polinomio se calcula de la siguiente manera:

$$O_{IV(x)} = \frac{f^{(IV)}(x)}{4!} \cdot \prod_{i=0}^3 (x - x_i) \text{ resultando en este caso una cota del error para el polinomio}$$

de grado 3 encontrado por Hermite. Por lo tanto, en el caso de $x = 0.5$ resulta:

$$|O_{IV(0.5)}| = 1.773. \text{ Vamos que el error verdadero se encuentra incluido en esta cota.}$$

