

Expresiones útiles

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot T}$$

velocidad del sonido para gas ideal

$$Ma = \frac{v}{c}$$

número de Mach

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$$

ángulo del cono de Mach

$$h_0 - \left(h + \frac{v^2}{2}\right) = 0$$

entalpía en el punto de estancamiento

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}$$

temperatura de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente divergente para flujo isentrópico en función de T_0 , de estancamiento

$$p \cdot \rho \cdot T = p_0 \cdot \rho_0 \cdot T_0$$

ecuación de estado

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

ecuación de evolución adiabática

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

densidad de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente divergente para flujo isentrópico en función de ρ_0 de estancamiento

$$\frac{p}{p_0} = \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2}\right] \cdot Ma^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

presión de un gas ideal en cualquier punto de un conducto convergente divergente para flujo isentrópico en función de p_0 de estancamiento

$$Ma := 1$$

Para $Ma=1$ se tiene los valores críticos de ρ^ , p^* y T^**

Problema 1

Un avión que vuela a 2000 m de altitud pasa directamente por arriba de un observador. Si el avión se desplaza a un número de Mach igual a 1,5 y la temperatura ambiente es 10°C, ¿cuántos segundos tiene que esperar el observador antes de escuchar el sonido producido por el avión?

$$T := (10 + 273.15)K \quad k = \frac{c_p}{c_v} \quad k := 1.401 \quad Ma := 1.5$$

$$z := 2000m$$

$$c := \sqrt{k \cdot R \cdot T} \quad c = 337.359 \frac{m}{s}$$

$$v := Ma \cdot c$$

$$\alpha := \arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$$

$$d := \frac{z}{\tan(\alpha)} \quad d = v \cdot t$$

$$t := \frac{d}{v}$$

$$t = 4.419 s$$

Problema 2

Por un conducto convergente pasa aire de manera estable de condiciones atmosféricas normales hasta un tubo receptor. El área mínima de la sección transversal de flujo en la garganta del conducto convergente es $1 \cdot 10^{-4} m^2$. determinar el caudal másico a través del ducto si la presión en el receptor es a) 80 kPa (abs) b) 40 kPa (abs). Trazar diagramas temperatura entropía para los casos y compararlos.

$$G_m = \rho_{garganta} \cdot A_{garganta} \cdot v_{garganta}$$

$$p_0 := 1atm \quad T_0 := (15 + 273.15)K \quad \text{parámetros de estancamiento}$$

$$\rho_0 := 1.23 \frac{kg}{m^3} \quad A_g := 10^{-4} \cdot m^2$$

El aire evolucionará subsónico por el conducto. Para un valor de presión en la garganta igual a la presión crítica se tendrá $Ma=1$ en la garganta. Para un valor inferior, la velocidad no puede ser mayor en un conducto convergente por lo que la presión en la garganta sigue siendo la presión crítica. Para una presión superior a la crítica, el valor de $Ma < 1$.

Luego es útil conocer la presión crítica:

$$p_c := p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot 1} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$p_c = 53.511 kPa \quad \frac{p_c}{p_0} = 0.52811$$

a) 80 kPa

entonces, de acuerdo a lo expresado

$$p_g := 80 \text{ kPa} \quad \text{presión en la garganta}$$

$$p_g = p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\text{Ma} = 0.591$$

nº Mach en la garganta

$$T_g := \frac{T_0}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2}$$

$$T_g = 269.305 \text{ K}$$

Temperatura en la garganta

$$c_g := \sqrt{k \cdot R \cdot T_g}$$

$$c_g = 329.008 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidad del sonido en la garganta

$$v_g := \text{Ma} \cdot c_g$$

$$v_g = 194.368 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidad en la garganta

$$\rho_g := p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

densidad en la garganta

$$\rho_g = 1.039 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

luego, el caudal másico

$$G_m := \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$G_m = 0.0202 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

b) $p=40 \text{ kPa}$ valor menor que el crítico, entonces

$$p_g := p_c$$

$$p_g = p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\text{Ma} = 1$$

nº Mach en la garganta

$$T_g := \frac{T_0}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2}$$

$$T_g = 240.025 \text{ K}$$

Temperatura en la garganta

$$c_g := \sqrt{k \cdot R \cdot T_g}$$

$$c_g = 310.608 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidad del sonido en la garganta

$$v_g := \text{Ma} \cdot c_g$$

$$v_g = 310.608 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

velocidad en la garganta

$$\rho_g := p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot \text{Ma}^2} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\rho_g = 0.78 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

luego, el caudal másico

$$G_m := \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$G_m = 0.0242 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Problema 3

Aire proveniente de la atmósfera normal entra subsónicamente y fluye isentrópicamente a través de un conducto convergente-divergente estrangulado cuya área de sección transversal circular, A , varía con la distancia axial a la garganta según: $A = 0.1 + x^2$

donde A está en metros cuadrados y x en metros. el ducto se extiende desde $x=-0.5\text{m}$ hasta $x=0.5\text{m}$. Para esta situación de flujo, trazar la vista lateral del ducto y graficar la variación del número de Mach, la razón de la temperatura a la temperatura de estancamiento T/T_0 , y la razón de la presión estática a la presión de estancamiento p/p_0 , a través del ducto desde $x=-0.5\text{m}$ hasta $x=0.5\text{m}$.

$$A = \pi r^2$$

$$T_0 := (15 + 273.15)\text{K}$$

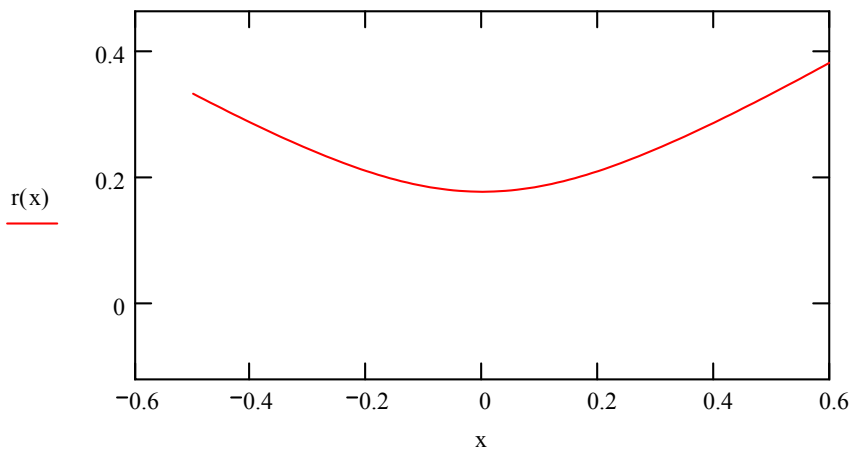
$$\rho_0 := 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{condiciones normales}$$

$$A(x) := 0.1 + x^2$$

$$p_0 := 1\text{atm}$$

$$r(x) := \sqrt{\frac{A(x)}{\pi}}$$

Vista lateral del conducto:



En un conducto convergente divergente donde el flujo se haya estrangulado ($p_{\text{garganta}} = p_{\text{crítica}}$, el área de la garganta es donde se dan las condiciones críticas, y además, por condición de flujo constante a la largo del conducto se cumple:

$$\rho \cdot A \cdot v = \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$A_g := A(0) \text{ m}^2$$

$$\rho_c := \rho_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right]} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

valor crítico de la densidad

$$\rho_g := \rho_c \quad \rho_g = 0.78 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$T_c := \frac{T_0}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right]}$$

$$T_g := T_c$$

$$T_g = 240.025 \text{ K}$$

$$c_g := \sqrt{k \cdot R \cdot T_g}$$

$$c_g = 310.608 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_g := c_g$$

Luego el caudal másico vale:

$$G_m := \rho_g \cdot A_g \cdot v_g$$

$$G_m = 24.222 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

se cumple: $\frac{A}{A_c} = \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right) \cdot \left(\frac{c}{v} \right)$

con lo que dada la relación entre las áreas se puede tener el valor del número de Mach para una evolución isentrópica a lo largo del conducto.

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{\text{Ma}} \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot \text{Ma}^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Se tendrá Mach en función del área que a su vez está en función de x. Por facilidad en el cálculo, conviene tomar valores discretos de x (pej x:-0.5,-0.4,.....,0.6) y luego sus correspondientes áreas en el conducto. Se puede resolver numéricamente la ecuación anterior

ej:

$$x := -0.4 \quad A_1 := A(x) \quad A_g := A(0)$$

$$A_1 = 0.26 \quad A_g = 0.1$$

Ma := 0.1 se propone una solución menor que 1 ya que en el conducto convergente no hay flujo supersónico.

$$\frac{0.26}{0.1} = \frac{1}{\text{Ma}} \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot \text{Ma}^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\text{Ma} = 0.23$$

$$T := \frac{T_0}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2}$$

$$T = 285.134 \text{ K}$$

$$\frac{T}{T_0} = 0.99$$

$$p := p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$p = 97.668 \text{ kPa}$$

$$\frac{p}{p_0} = 0.964$$

¿Qué ocurre para secciones por encima de la crítica? Pueden suceder 2 soluciones. Una, es que el flujo sea subsónico en el conducto divergente. El valor de la presión será mayor que la presión en la garganta y como consecuencia el flujo se desacelerará resultando simétrico respecto a la parte convergente. Otra solución es que el flujo sea supersónico y continúe acelerándose en el conducto.

Por ejemplo, para la posición $x=+0.4 \text{ m}$,

$$A(0.4) = 0.26$$

$$Ma := 2$$

se propone una solución $Ma > 1$ por la hipótesis de flujo supersónico

$$\frac{0.26}{0.1} = \frac{1}{Ma} \cdot \left[\frac{1 + \left(\frac{k-1}{2} \right) \cdot Ma^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$Ma = 2.486$$

$$T := \frac{T_0}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2}$$

$$T = 128.687 \text{ K}$$

$$\frac{T}{T_0} = 0.447$$

$$p := p_0 \cdot \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{(k-1)}{2} \right] \cdot Ma^2} \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{p}{p_0} = 0.06$$

Realizando lo anterior para varios puntos se puede graficar lo pedido.

Es de destacar que lo calculado en todos los casos corresponde a comportamiento isentrópico.

Problema 4

A un conducto aislado de sección transversal constante entra(sección 1) aire con las siguientes propiedades: $T_0 := 15^\circ\text{C} + 273.15^\circ\text{C}$, $T_1 := 10^\circ\text{C} + 273.15^\circ\text{C}$, $p_1 := 1\text{atm}$. Para flujo de Fanno, determinar los valores correspondientes del cambio de temperatura y entropía del fluido a diferentes presiones corriente abajo y graficar la línea de Fanno relacionada.

En flujo de Fanno, flujo adiabático a través de un conducto de área constante con fricción, se cumple:

$\rho \cdot v = \text{cte}$ ya que siendo el Área constante, la anterior resulta de la ecuación de conservación de la masa $\rho \cdot v \cdot A = \text{cte}$ en el conducto.

y por la conservación de la energía

$$h + \frac{v^2}{2} = h_0 \quad \text{siendo } h_0 \text{ entalpía de estancamiento}$$

por tratarse de gas ideal $\Delta h = c_p \Delta T$

$$T + \frac{v^2}{2 \cdot c_p} = T_0 = \text{cte}$$

sustituyendo con la relación de estado se llega a:

$$T + \frac{(\rho v)^2 T^2}{2 c_p \cdot \left(\frac{p^2}{R^2} \right)} = T_0 = \text{cte}$$

y con la relación de la variación de entropía para gas ideal:

$$s - s_1 = c_p \cdot \ln \left(\frac{T}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left(\frac{p}{p_1} \right)$$

Las dos últimas ecuaciones permiten obtener una curva con coordenadas T-s, paramétrica con T_0 , velocidad v y con temperatura, presión y entropía de entrada (T_1 , p_1 , s_1)

$$T_0 = 288.15 \text{ K} \quad c_p := \frac{R \cdot k}{k - 1} \quad c_p = 1002.361 \frac{\text{joule}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

$$T_1 = 283.15 \text{ K} \quad p_1 = 101.325 \text{ kPa}$$

$$v := \sqrt{(T_0 - T_1) \cdot 2 \cdot c_p}$$

$$v = 100.118 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{valor de velocidad a la entrada del conducto}$$

$$\rho_1 := \frac{p_1}{R \cdot T_1}$$

$$v \cdot \rho_1 = 124.877 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \text{valor constante a lo largo del conducto}$$

con la relación: $T + \frac{(pv)^2 T^2}{2c_p \cdot \left(\frac{p^2}{R^2}\right)} = T_0$ se podrá calcular, a partir de valores de presión, la temperatura a lo largo del conducto.

por ej., en un punto 2 en el conducto:

$$p_2 := 90 \text{ kPa}$$

$$T_2 := 100$$

Given

$$T_2 + \frac{124.87^2 \cdot T_2^2}{2 \cdot 1002.36 \cdot \left[\frac{(90 \cdot 1000)^2}{286.9^2} \right]} = 288$$

$$T_2 := \text{Minerr}(T_2) \quad T_2 = 281.727$$

para conocer el valor de la diferencia de entropía de 2 con respecto a 1:

$$T_1 = 283.15 \text{ K}$$

$$\Delta s_2 := c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{283.15}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\Delta s_2 = 0.029 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Para cada valor de presión puede graficarse la evolución en un diagrama T-s.

Problema 5

Una onda de choque normal aparece en un flujo de aire con las siguientes condiciones:

$$p_1 := 70 \text{ Pa} \quad T_1 := 5^\circ\text{C} + 273.15^\circ\text{C} \quad v_1 := 425 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Hallar p_2 , T_2 , v_2 aguas abajo de la onda de choque.

El flujo en la onda de choque puede considerarse adiabático y así, por conservación de la energía:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2c_p(T_1 - T_2) = \frac{2k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$

Planteando la conservación de la cantidad de movimiento:

$$p_2 \cdot A - p_1 \cdot A = \rho_1 \cdot v_1^2 \cdot A - \rho_2 \cdot v_2^2 \cdot A$$

Con ambas ecuaciones se pueden obtener expresiones útiles

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2 \cdot k \cdot \text{Ma}_1^2 - (k-1)}{k+1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2k \cdot \text{Ma}_1^2 - (k-1)] \cdot [2 + (k-1) \cdot \text{Ma}_1^2]}{(k+1)^2 \cdot \text{Ma}_1^2}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(k-1) \cdot \text{Ma}_1^2 + 2}{(k+1) \cdot \text{Ma}_1^2}$$

$$\text{Ma}_2^2 = \frac{2 + (k-1) \cdot \text{Ma}_1^2}{2 \cdot k \cdot \text{Ma}_1^2 - (k-1)}$$

Para resolver el problema bastará conocer Ma_1 , Ma_2 y luego los demás parámetros se obtienen a partir de las expresiones citadas:

$$c_1 := \sqrt{k \cdot R \cdot T_1} \quad c_1 = 334.367 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Ma}_1 := \frac{v_1}{c_1} \quad \text{Ma}_1 = 1.271$$

$$\text{Ma}_2 := \left[\frac{2 + (k-1) \cdot \text{Ma}_1^2}{2 \cdot k \cdot \text{Ma}_1^2 - (k-1)} \right]^{0.5} \quad \text{Ma}_2 = 0.801$$

$$\rho_1 := \frac{p_1}{R \cdot T_1} \quad \rho_1 = 8.772 \times 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_2 := \rho_1 \cdot \left[\frac{(k - 1) \cdot Ma_1^2 + 2}{(k + 1) \cdot Ma_1^2} \right]^{-1}$$

$$\rho_2 = 1.285 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p_2 := p_1 \cdot \frac{2 \cdot k \cdot Ma_1^2 - (k - 1)}{k + 1}$$

$$p_2 = 90 \text{ kPa}$$

$$T_2 := \frac{p_2}{\rho_2 \cdot R}$$

$$T_2 = 326.267 \text{ K}$$

$$T_2 - 273.15 \text{ K} = 53.117^\circ \text{C}$$