Análisis Dimensional y Semejanza

Mecánica de Fluidos 67.18

October 21, 2004

1 Análisis Dimensional

1.1 Introducción

análisis dimensional es un proceso mediante el cual se examinan las dimensiones de los fenómenos físicos y de las ecuaciones asociadas, para tener una nueva visión de sus soluciones.
A partir de este análisis surge la importancia que tienen el uso de distintos parámetros adimensionales. Las ventajas de ello son:

1. Reducir el número de variables
2. Dar una guía de como realizar experiencias sobre modelos a escala.

1.2 Objetivos

Identificar los parámetros adimensionales importantes que describen un flujo y la interacción del mismo con un cuerpo sólido.

1.3 Variables y Parámetros

En general adaptamos algunas variables en el problema en estudio como variables independientes. Las que habitualmente consideramos son las coordenadas del punto considerado (x, y, z) y el instante t.
Existen algunas *variables dependientes*, o funciones de campo, que dependerán de cada problema considerado.
En los problemas de mecánica de fluidos tenemos generalmente:
v Velocidad
p Presión
ρ Masa por unidad de volumen

Se suelen tambin considerar algunas variables como *parámetros físicos* y otras como *datos* del problema.
Ejemplos:
Parámetros Físicos:

- μ viscosidad dinámica
- c velocidad de propagación del sonido
- ......

Datos:

- L Longitud característica
- L Velocidad característica
- L presión de referencia
- ...

1.4 Magnitudes dimensionales y magnitudes adimensionales

Magnitudes Dimensionales son aquellas cuyos valores numricos dependen de las escalas elegidas.
Las *Magnitudes Adimensionales* son en cambio independientes del sistema de unidades adoptado.
Ejemplos de de cada una ellas son:

- $aceleración$ → dimensional

- $\dfrac{aceleración}{g}$ → adimensional

- $densidad$ → dimensional

- $\dfrac{densidad}{densidaddelagua}$ → adimensional

- ...

1.4.1 Unidades de medidas de base y unidades derivadas

Las diferentes magnitudes físicas ($\vec{v}$, L, $tiempo$, $masa$, etc) estn vinculadas entre s por relaciones determinadas. Sobre algunas de ellas, que denominamos fundamentales, pueden adoptarse unidades de medida. Por ejemplo, en MKS, la longitud se expresa en metros, el tiempo en segundos, ... Las demás magnitudes físicas pueden expresarse entonces en función de las fundamentales. Se distinguen entonces entre unidades de medida fundamentales y unidades de medidas de magnitudes derivadas. En la práctica de mecánica de fluidos de problemas de flujo incompresible, alcanza con establecer las unidades de medida para 3 magnitudes fundamentales. Habitualmente se adoptan:

- unidades de longitud

- unidades de tiempo

- unidades de masa

1.4.2 Fórmulas de Dimensión

Las fórmulas de dimensión de toda magnitud física tiene la forma de un monomio de potencias. En el caso de mecánica de fluidos, esta es en general del tipo:

$$[L]^l[M]^m[T]^t$$

Un ejemplo de ello podría aplicarse en la siguiente ecuación:

$$\Delta p = \rho g \Delta z$$

$$MT^{-2}L^{-1} = ML^{-3} \cdot LT^{-2} \cdot L$$

1.5 Teorema Π de Buckingham

"Dada una ecuación de k variables homegénea en forma dimensional, se puede reducir a una relación entre $k - r$ productos adimensionales independientes, donde r es el número mínimo de dimensiones de referencia necesarias para describir las variables."
Es decir, dado

$$u_1 = f(u_2, u_3, \dots, u_k)$$
$$\exists \Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$$

Las consecuencias del teorema pueden apreciarse con un ejemplo. Sea Δp_L la caída de presión por unidad de longitud en un conducto bajo un régimen de escurrimiento incompresible y laminar. Ésta puede expresarse en función de las variables D, μ, ρ , V, Diámetro, viscosidad dinámica, densidad y velocidad respectivamente. A priori puede pensarse un problema de $k = 5$ variables. En el mismo hay 3 dimensiones independientes ($[L]$, $[M]$, $[T]$. Con la aplicación del teorema, se asegura que el problema puede expresarse mediante una relación entre $k - r = 2$ parámetros adimensionales.
Para la generación de cada uno de los términos Π en un problema pueden seguirse los siguientes pasos

1. Enumerar las k variables que aparecen en el problema. Debe incluirse cualquier cantidad que participe en el fenómeno bajo investigación. Estas podrán ser del tipo:

   - geométricas.
   - propiedades del fluido
   - efectos externos

   y deben ser independientes. Por ejemplo si se hallan incluídas μ y ρ no debe incluirse ν.

2. Expresar cada variable en términos de cada una de las r dimensiones bsicas. Para flujo newtoniano, incompresible es comn utilizar $r = 3$, M, L, T.

3. El número de términos Π es $n = k - r$

4. Se elige un conjunto de r variables independientes en cuanto a sus dimensiones. (por ejemplo, no deben incluirse 2 variables que sean longitudes).

5. Un término Π se forma aadiendo una de las variables restantes (por ejemplo u_m) a las r escogidas en el punto anterior

6. Se resuelve el problema algebraico:

$$([u_1]^{a_1}[u_2]^{a_2} \dots [u_r]^{a_r})[u_m]^{a_m} = L^0 T^0 M^0$$

7. Se repite hasta formar los n términos Π

8. Se expresa $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_{k-r})$

Volviendo al ejemplo del cálculo de la caída de presión en una caería lisa, podemos repetir cada uno de los pasos enunciados:

1. Se eligen μ, ρ, U, D y Δp_L. k=5.
2. $r = 3$, M, L, T.
3. El número de términos Π es $n = k - r = 2$
4. Se elige el conjunto de variables independientes: ρ, U, D.
5. El primer término Π será función de $(\rho, U, D)\mu$.
6. Se resuelve el problema algebraico:

$$([\rho]^{a_1}[U]^{a_2}[D]^{a_3})[\mu]^1 = L^0T^0M^0$$

$$M^{a_1}L^{-3a_1}L^{a_2}T^{-a_2}L^{a_3}M^1L^{-1}T^{-1} = L^0T^0M^0$$

   se tiene el sistema:

$$a_1 + 1 = 0$$

$$-3a_1 + a_2 + a_3 - 1 = 0$$

$$-a_2 - 1 = 0$$

   Resulta $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $\Rightarrow \Pi_1 = [\rho]^{-1}[U]^{-1}[D]^{-1}\mu = 1/Re$
   Por comodidad se adopta $\Pi_1 = Re$ pues el requisito sobre Π_1 es que sea un número adimensional.
7. Π_2 se forma a partir de $(\rho, U, D)\Delta p_L$
8. Se resuelve el problema algebraico:

$$([\rho]^{a_1}[U]^{a_2}[D]^{a_3})[\Delta p_L]^1 = L^0T^0M^0$$

$$M^{a_1}L^{-3a_1}L^{a_2}T^{-a_2}L^{a_3}M^1L^{-2}T^{-2} = L^0T^0M^0$$

   se tiene el sistema:

$$a_1 + 1 = 0$$

$$-3a_1 + a_2 + a_3 - 2 = 0$$

$$-a_2 - 2 = 0$$

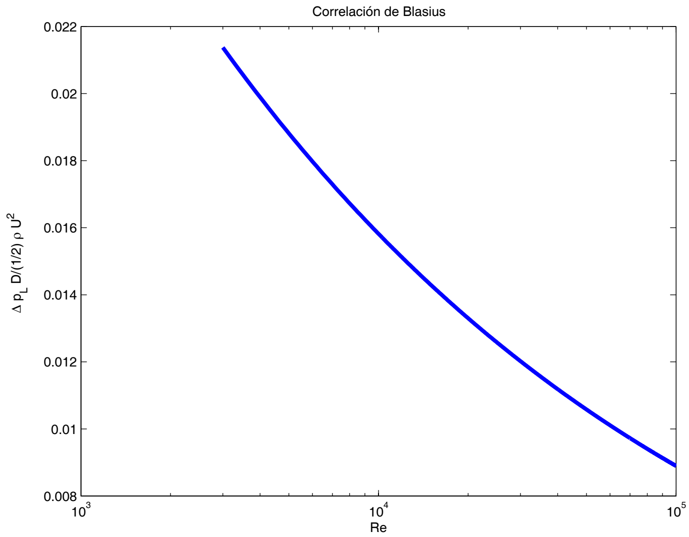
   Resulta $a_1 = -1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1$, $\Rightarrow \Pi_2 = [\rho]^{-1}[U]^{-2}[D]^1\Delta p_L = \dfrac{\Delta p_L D}{\rho U^2}$
   El término adimensional puede ser afectado por una constante adimensional, entonces, para darle una forma más frecuente: $\Pi_2 = \dfrac{\Delta p_L D}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

9. Se tiene finalmente $\Pi_2 = \Phi(\Pi_1)$

$$\frac{\Delta p_L D}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \Phi(Re)$$

La función Φ puede provenir de datos experimentales. Para el ejemplo de la caería lisa, en el rango de $310^3 < Re < 10^5$ la correlación de Blasius es:

$$\frac{\Delta p_L D}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0.1582 * Re^{-1/4}$$



1.6 Problema propuesto

Una delgada placa de ancho w y alto h está en posición paralela a un flujo incompresible. Supóngase que el arrastre D que el fluido ejerce sobre la placa es función de w y h, de la viscosidad y densidad del fluido y de la velocidad U del flujo que se aproxima a la placa. Determinar un conjunto de términos Π apropiados para estudiar experimentalmente el problema.

1.7 Números adimensionales

Según los tipos de problemas existen distintos números adimensionales asociados. Sucede a menudo que, para el tipo de planteo presentado, es necesaria cierta experiencia previa para incluir las variables que verdaderamente interesan y excluir aquellas superfluas.

El planteo puede ser más riguroso si se analizan las ecuaciones que rigen los fenómenos en estudio. Por ejemplo, para un flujo incompresible newtoniano en 2 dimensiones se tendrá:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{1}{\rho} + \nu(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{1}{\rho} + \nu(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}) - g \end{cases}$$

Se define un conjunto de variables adimensionales. Para ello, deben elegirse cantidades de referencia para cada variable dimensional que aparece en la ecuación.

$$U\begin{cases} u \\ v \end{cases} \qquad L\begin{cases} x \\ y \end{cases} \qquad p_0\{\ p \qquad \tau\{\ t$$

Luego, las variables adimensionales quedan:

$$\begin{cases} u^* = \dfrac{u}{U} \\ \\ v^* = \dfrac{v}{U} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^* = \dfrac{x}{L} \\ \\ y^* = \dfrac{y}{L} \end{cases} \qquad \begin{cases} p^* = \dfrac{p}{-p_0} \\ \\ t^* = \dfrac{t}{\tau} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u^*}{\partial x^*}\dfrac{U}{L} \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial u^*}{\partial x^*}\dfrac{U}{L}) = \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}\dfrac{U}{L^2} \end{cases}$$

Las ecuaciones adimensionales quedan:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\begin{cases} (\dfrac{\mathbf{L}}{\tau\mathbf{U}})\dfrac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^*\dfrac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\dfrac{\partial u^*}{\partial y^*} = -(\dfrac{\mathbf{p_0}}{\rho\mathbf{u^2}})\dfrac{\partial p^*}{\partial x^*} + (\dfrac{\nu}{\mathbf{UL}})(\dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}) \\ \\ (\dfrac{L}{\tau U})\dfrac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^*\dfrac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\dfrac{\partial v^*}{\partial y^*} = -(\dfrac{p_0}{\rho u^2})\dfrac{\partial p^*}{\partial y^*} + (\dfrac{\nu}{UL})(\dfrac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \dfrac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}) - (\dfrac{\mathbf{gL}}{\mathbf{U^2}}) \end{cases}$$

Los términos entre paréntesis son números adimensionales que se forman y son conocidos como:

$(\dfrac{\nu}{UL}) = \dfrac{1}{Re} = \dfrac{fzas.viscosas}{fzas.inercia}$ Número de Reynolds.

$(\frac{L}{\tau U}) = \frac{Lf}{U} = \frac{fzas.inercia.convectivas}{fzas.inercia.local} = St$ Número de Strouhal, frecuencia de oscilación adimensional
$(\frac{p_0}{\rho U^2}) = \frac{fzas.presion}{fzas.inercia} = Eu$ El número de Euler es de utilidad ante p y Δp importantes en un flujo. $(\frac{gL}{U^2}) = \frac{fzas.gravitacion}{fzas.inercia} = \frac{1}{Fr}$ El número de Froude se utiliza allí donde las fuerzas volumétricas debidas a la gravedad son importantes. En Flujos con superficies libres en canales, barcos.
Otro número muy utilizado, que aparece en flujos compresibles y no puede deducirse de Navier Stokes, es el número de Mach, $Ma = U/c$ donde c es la velocidad del sonido a la temperatura del flujo. Podemos resumir un conjunto de ecuaciones de las que pueden derivarse números adimensionales:

- conservación de la masa
- conservación de la cantidad de movimiento
- conservación de la energía
- función de estado (termodinámica) p, ρ.
- Ley de Fourier (calor).

1.7.1 Otras cantidades adimensionales típicas

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_f} \qquad C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U^2 R_T}$$

(Fuerza) (Torque)

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad Nu = \frac{q_w L}{\lambda \Delta T}$$

(friccion) (Calor)

Donde: F_D : fuerza de arrastre A_f : Área frontal T : Torque R_T : τ_w : tensión de corte en la pared Nu : Número de Nusselt q_w : flujo de calor en la pared λ : coeficiente de conducción del calor

2 Semejanza

Con las herramientas del análisis dimensional pueden establecerse criterios de *semejanza*, muy útiles a la hora de realizar experimentos. En efecto, los prototipos de flujos que se disean y estudian -por ejemplo en una válvula de muy grandes dimensiones, en turbinas hidráulicas, en autos, en la circulación sanguínea, etc- tienen a menudo condiciones geométricas o físicas que dificultan su ensayo desde un punto de vista técnico.
Es posible llevar estas condiciones de flujos reales a condiciones de laboratorio más manejables. Para ello, la condición de semejanza es que los números adimensionales que gobiernan las leyes del fenómeno en estudio de un prototipo deberán ser los mismos que en un modelo de laboratorio. En símbolos: $\Pi_{mi} = \Pi_{p_i}$.
La condición de semejanza asegurará semejanza geométrica, cinemática y dinámica, esto es:

- Semejanza Geométrica: Modelo y prototipos son semejantes, uno es la escala de otro. Esta relación deberá respetarse también en el caso de valores rugosidad, radios, etc.
- Semejanza Cinemática: Las líneas de corriente Ψ son iguales y la razón entre los módulos de velocidad entre prototipo y modelo debe ser constantes en todo el campo.
- Semejanza Dinámica: La razón entre los módulos de las fuerzas presentes en el flujo del prototipo y del modelo debe ser constantes en todo el campo.

2.1 Ejemplo

Se piensa realizar pruebas en un modelo para estudiar el flujo a través de una gran válvula que tiene una sección de entrada de 24 pulgadas de diámetro permite el paso de agua a un caudal de 850 l/s. El fluido de trabajo y su temperatura en el modelo es el mismo que en el prototipo. Entre el modelo y el prototipo hay completa semejanza geométrica y el diámetro en el modelo es de 3 pulgadas. Determinar el caudal requerido en el modelo.

Solución: Para asegurar semejanza, es suficiente aquí que $Re_m = Re_p$.

$$\frac{U_m D_m}{\nu_m} = \frac{U_p D_p}{\nu_p}$$
$$\rightarrow U_m = U_p \frac{D_p}{D_m}$$
$$Q_m = U_m A_m = U_p \frac{D_p}{D_m} A_m = \frac{Q_p}{A_p} \frac{D_p}{D_m} A_m$$
$$\frac{A_m}{A_p} = \frac{D_m^2}{D_p^2}$$
$$Q_m = Q_p \frac{D_m}{D_p} = \frac{3}{24} 850 l/s = 106.25 l/s$$

2.2 Ejemplo

Se busca conocer a partir de las experiencias hechas sobre un modelo, el arrastre (Drag) sobre un auto prototipo. Como ejercicio adicional puede verificarse la obtención de Π_1, Π_2 Solución:
$D = f(U, L, \rho, \mu)$

$\Pi_1 = Re \qquad \Pi_2 = C_D = \dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_f}$
$\rightarrow C_D = f(Re)$
Si usamos en el túnel de viento aire atmosférico $\begin{cases} \rho_m = \rho_p \\ \mu_m = \mu_p \end{cases}$
$\dfrac{U_m D_m}{\nu_m} = \dfrac{U_p D_p}{\nu_p}$
$U_m = \frac{U_p}{(SR)}$
SR la relación de escala geométrica no debe ser muy pequeo ya que ante una U_p grande la $U_m \rightarrow c$ con lo que parecen efectos de compresibilidad.
$C_{Dm} = C_{Dp}$
$\left(\dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_f}\right)_m = \left(\dfrac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_f}\right)_p$
$\Rightarrow D_p = D_m \left(\dfrac{U_p}{U_m}\right)^2 \dfrac{(A_f)_p}{(A_f)_m} \qquad \Rightarrow D_p = D_m (SR)^2 \dfrac{1}{(SR)^2}$
$\Rightarrow \mathbf{D_p = D_m}$

2.3 Ejemplo

La resistencia al avance en barcos puede calcularse descomponiendo la parte del drag por fricción y la parte debida a la acción de las olas.
$D = D_w + D_F$
$D = f(U, L, \rho, \mu, g)$

Se trabaja con 3 números adimensionales: Re_L $\quad C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2}$ $\quad Fr = \dfrac{U}{\sqrt{gL}}$

$C_D = f(Re, Fr)$

Froude supuso (y luego verificó en forma experimental) que D_w y D_F están desacoplados siendo $D_w(Fr)$ y $D_F = f(Re)$. De modo que:

$$\frac{D_w}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_w} = (C_D)_{placaplana}\left(Re, \frac{\epsilon}{L}\right)$$

$$\frac{D_F}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_w} = (C_D)_{froude}(Fr)$$

A_w: área mojada del barco

Mostrar que no es posible una similitud total entre modelo y prototipo para este problema

Calcular:

(a) U_p

(b) D_p

(c) *Potencia consumida*

Con datos:

$L_p = 100m$ $\quad SR = 1/50$ $\quad V_m = 1.1m/s$ $\quad D_m = 2.66N$ $\quad (A_w)_m = 0.9m^2$

$\rho_m = 1000Kg/m^3$ $\quad \rho_p = 1030Kg/m^3$