



66.75 Procesos Estocásticos

Trabajo Práctico N° 4

Figueroa, Gonzalo	84255
Mello, Ariel	84853
Tempone, Nicolás	84548
Borgatello, José María	67758

Índice

1. Desarrollo del trabajo Práctico - Ejercicios	2
1.1. Parte A	2
1.2. Parte B	8
1.2.1. Análisis de un proceso ARMA	8
1.2.2. Ejercicio 2	13
2. Anexo I	17
2.1. Parte A	17
2.2. Parte B	18
2.2.1. Filtros.m	18
2.2.2. MAverage.m	20

1. Desarrollo del trabajo Práctico - Ejercicios

1.1. Parte A

Sea $X(n)$ un proceso autorregresivo de orden 1, $X(n) = aX(n-1) + W(n)$, se pide simular:

- $E[X]$
- $R_X[k]$
- $S_X[\omega]$
- f_{dp}

para distintos valores de a ($-0,9, 0,1$ y $0,98$)

Sea un proceso autorregresivo de primer orden dado por

$$X(n) = aX(n-1) + W(n)$$

donde W es ruido blanco, la transferencia del sistema está dada por

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Por lo que

$$|H(z)|^2 = H(z)H\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1 - a^2 - a\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{1 - a^2 - 2a \cos(\omega)}$$

de lo cual se extrae, siendo $S_X(\omega) = \sigma_W^2 |H(z)|^2$

$$= \frac{\sigma_W^2}{1 - a^2 - 2a \cos(\omega)}$$

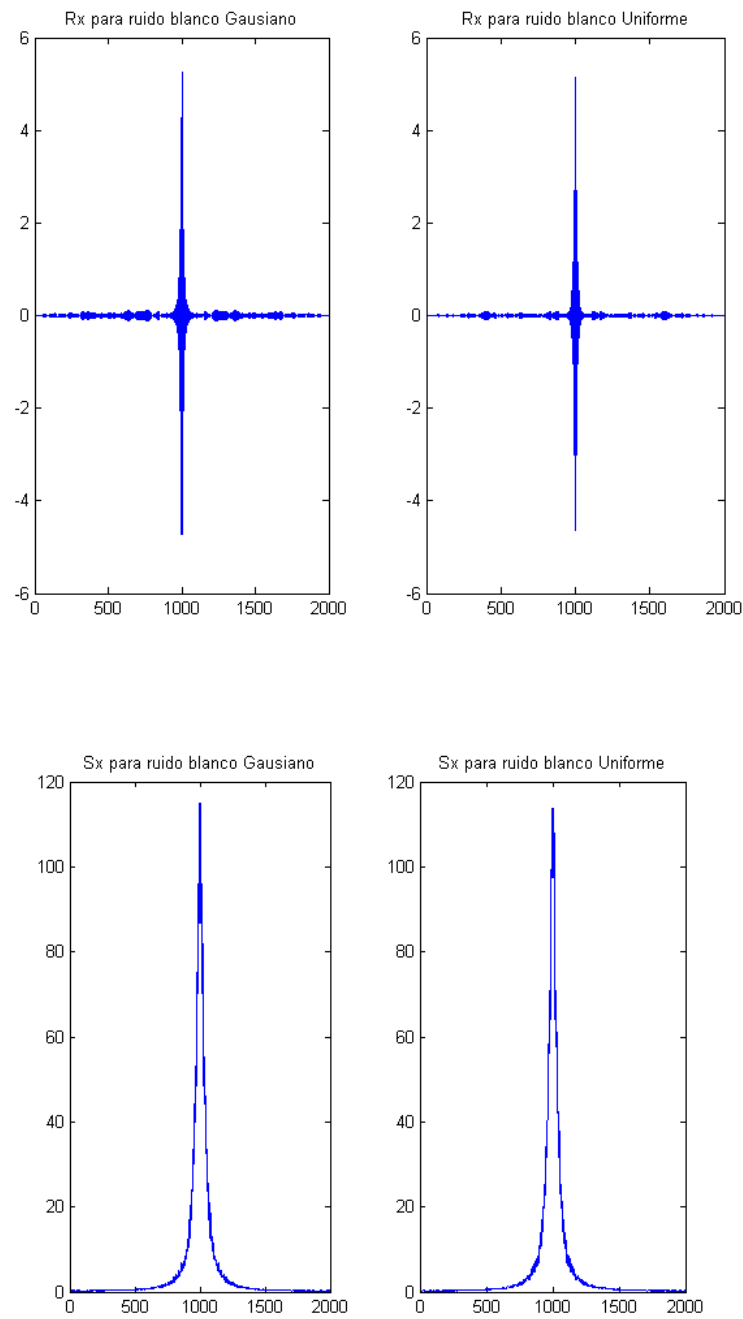
se calcula su autocorrelación R_X como la antitransformada de $S_X(\omega)$

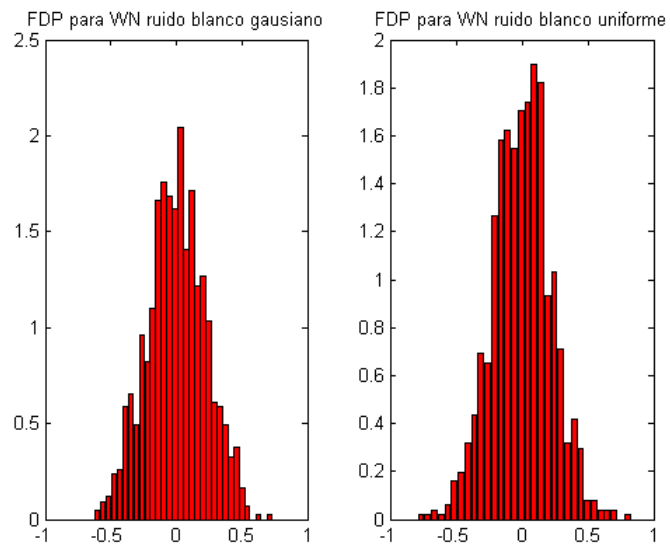
$$R_X = \sigma_W^2 \frac{a^{|k|}}{1 - a^2}$$

Luego se procede a simular con el Matlab:

$$a = -0,9$$

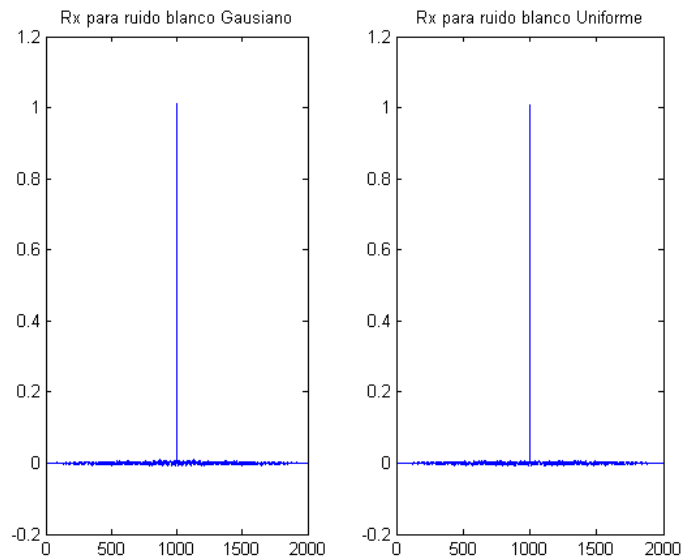
$$E[X] = 0,0017$$

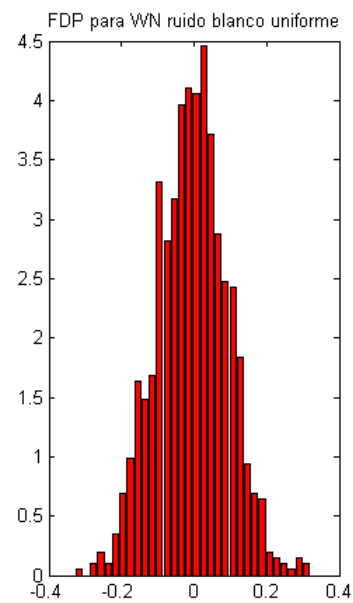
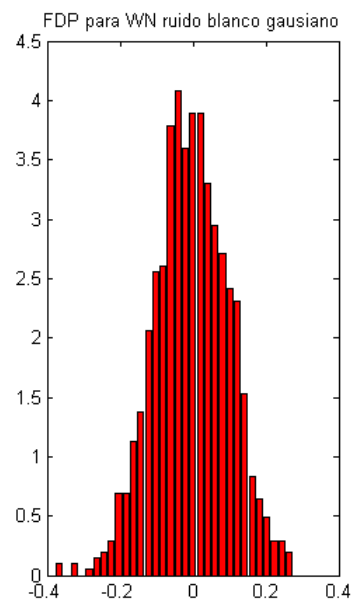
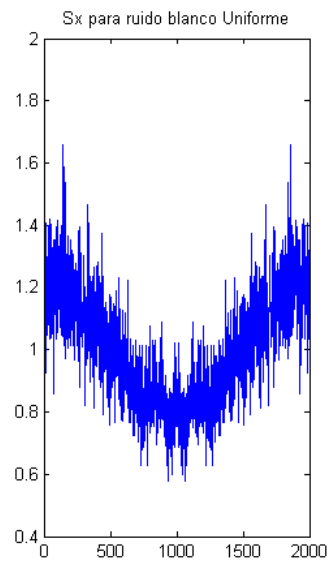
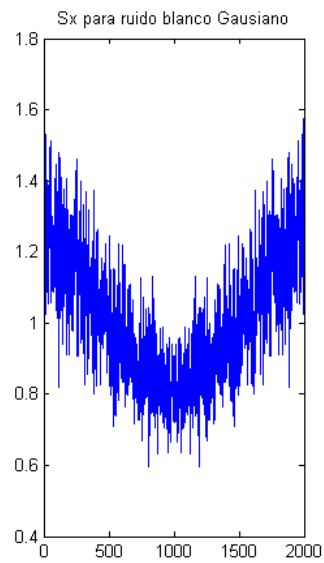




$$a = 0,1$$

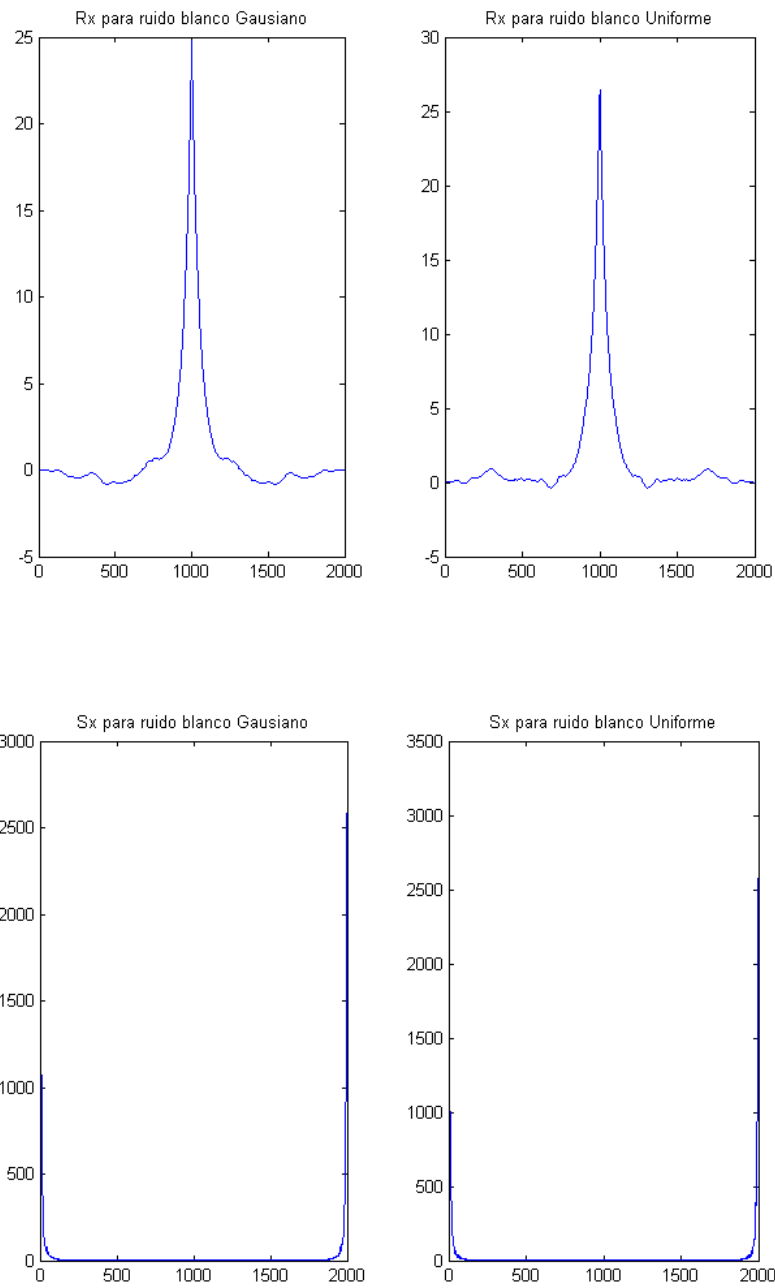
$$E[X] = -0,0013$$

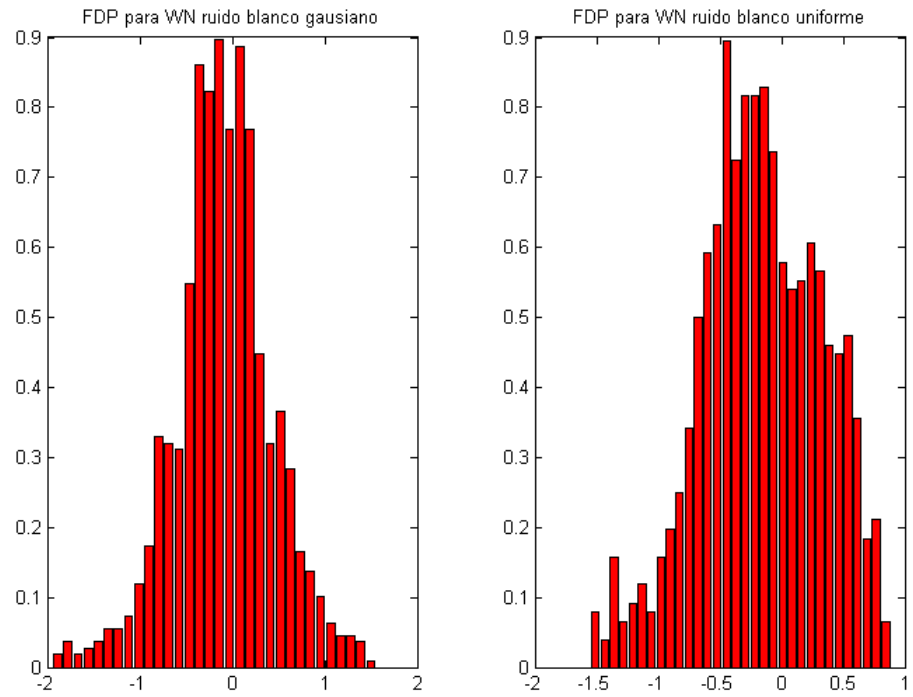




$$a = 0,98$$

$$E[X] = -0,1$$





1.2. Parte B

1.2.1. Análisis de un proceso ARMA

En esta oportunidad se analizará la diversidad de filtros que se pueden generar utilizando un filtro ARMA.

Introducción:

Sea un filtro autorregresivo de orden N , la ecuación en diferencias que lo describe es:

$$X(n) = a_1 \cdot X(n-1) + a_2 \cdot X(n-2) + \dots + a_N \cdot X(n-N) + W(n)$$

Donde $W(n)$ es la señal de entrada. Aplicando la transformada Z a ambos miembros de la ecuación se determina la función del sistema correspondiente:

$$X(z) (1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_N \cdot z^{-N}) = W(z)$$

$$H_{AR}(z) = \frac{1}{1 - a_1 \cdot z^{-1} - a_2 \cdot z^{-2} - \dots - a_N \cdot z^{-N}}$$

$$H_{AR}(z) = \frac{z^N}{z^N - a_1 \cdot z^{N-1} - a_2 \cdot z^{N-2} - \dots - a_N} \quad ROC : |z| > P_{max}$$

Es decir, un filtro autorregresivo de orden N coloca N ceros en el origen y distribuye N polos en el plano z según los valores de los coeficientes a_i . P_{max} es el polo de módulo mayor.

Ahora analicemos por un momento un filtro moving average de orden N , el cual se describe por la ecuación en diferencias:

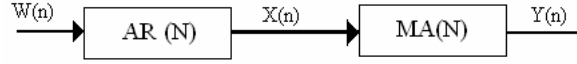
$$Y(n) = X(n) - a_1 \cdot X(n-1) - a_2 \cdot X(n-2) - \dots - a_N \cdot X(n-N)$$

Nuevamente, tras transformar ambos miembros de la ecuación, se despeja la función de sistema asociada.

$$Y(z) = X(z) (1 - b_1 \cdot z^{-1} - b_2 \cdot z^{-2} - \dots - b_N \cdot z^{-N})$$

$$H_{MA}(z) = \frac{z^N - b_1 \cdot z^{N-1} - b_2 \cdot z^{N-2} - \dots - b_N}{z^N} \quad ROC : |z| > 0$$

Esto significa que un filtro moving average coloca N polos en el origen y N ceros distribuidos en el plano z de acuerdo a los coeficientes b_i .



Mediante la conexión en cascada de ambos filtros, se puede obtener un filtro con la siguiente función de transferencia.

$$H_T(z) = H_{AR}(z)H_{MA}(z)$$

$$H_T(z) = \frac{z^N}{z^N - a_1 \cdot z^{N-1} - a_2 \cdot z^{N-2} - \dots - a_N} \frac{z^N - b_1 \cdot z^{N-1} - b_2 \cdot z^{N-2} - \dots - b_N}{z^N}$$

$$H_T(z) = \frac{z^N - b_1 \cdot z^{N-1} - b_2 \cdot z^{N-2} - \dots - b_N}{z^N - a_1 \cdot z^{N-1} - a_2 \cdot z^{N-2} - \dots - a_N} \quad ROC : |z| > P_{max}$$

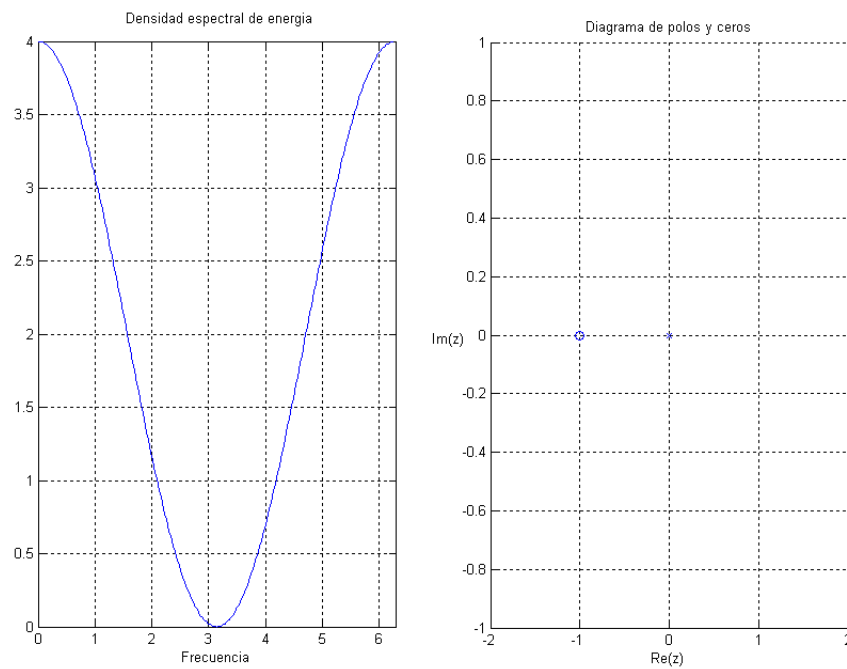
Como conclusión se puede ver que asignando valores adecuados de b_i y a_i , se puede obtener cualquier tipo de configuración de filtro.

Filtros:

Ahora se mostrarán ejemplos de implementaciones de filtros con sus correspondientes ecuaciones en diferencias.

Pasabajos

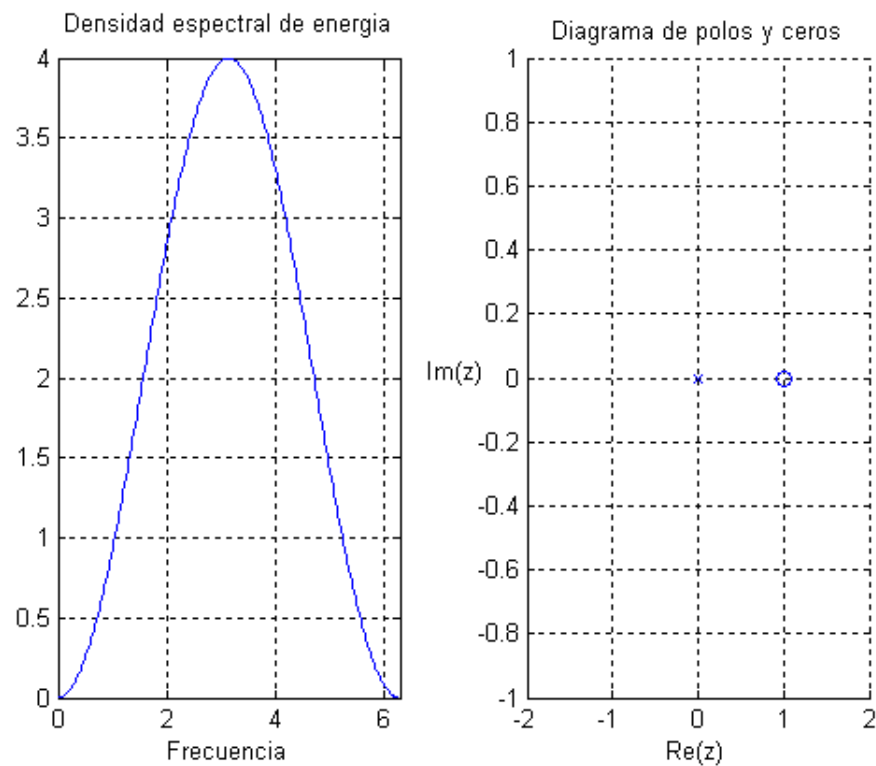
Colocando ceros en $z = -1$ se obtiene un pasabajos. Esta configuración puede obtenerse con un filtro $ARMA(1, 1)$, aunque también con un filtro moving average de orden 1. Se muestra a continuación el diagrama de polos y ceros y su densidad espectral de energía:



Ecuación $MA(1) : Y(n) = X(n) + X(n - 1)$

Pasaaltos:

Colocando ceros en $z = 1$ se obtiene un pasaaltos. Esta configuración puede obtenerse también con un filtro $ARMA(1,1)$, aunque también con un filtro moving average de orden 1. Nuevamente se muestran los gráficos asociados a este filtro:

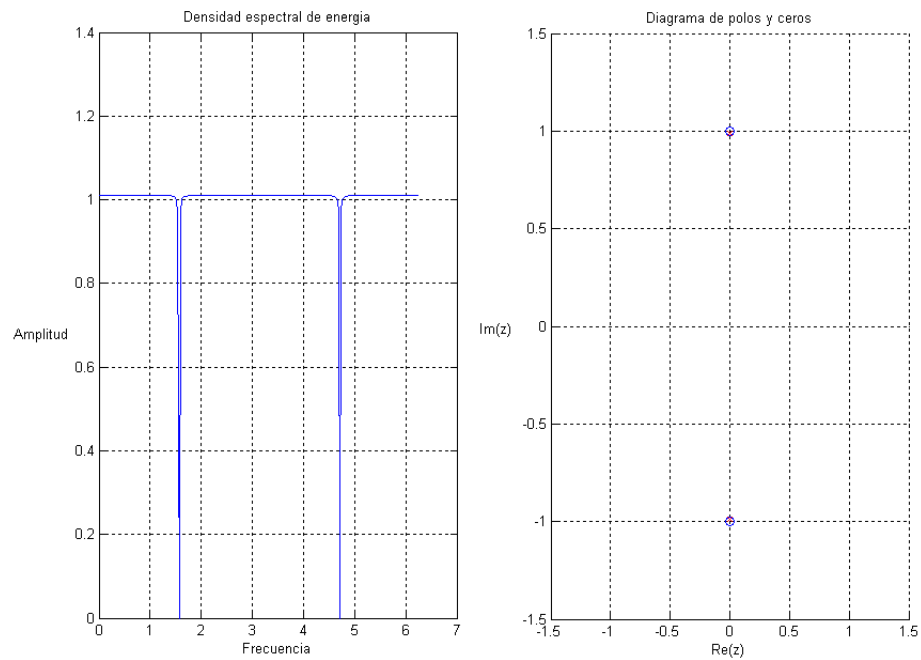


Ecuación $MA(1) : Y(n) = X(n) - X(n - 1)$

Notch Filter

La implementación de este filtro se realizó con un filtro $ARMA(2, 2)$ para generar polos y ceros complejos conjugados y eliminar una "banda" que no sea $z = 1$ ni $z = -1$ correspondientes a las bajas frecuencias y las altas respectivamente.

Los gráficos de la implementación se muestran a continuación:

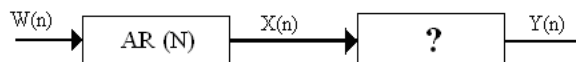


Ecuación $AR(2)$: $Y(n) = -0,99X(n-2) + W(n)$

Ecuación $MA(2)$: $Y(n) = X(n) + X(n-2)$

Los polos se ubicaron muy cerca de los ceros, de manera de que se compense su efecto para frecuencias alejadas a las del cero.

1.2.2. Ejercicio 2



1) Defina el bloque designado como "?" de tal manera que $Y(n) = W(n)$

Según lo analizado en las hojas anteriores el filtro inverso es un filtro moving average con sus coeficientes b iguales a los coeficientes a del filtro autorregresivo.

2) Halle la expresión de $R_{XY}(k)$ en un proceso MA de orden 1.

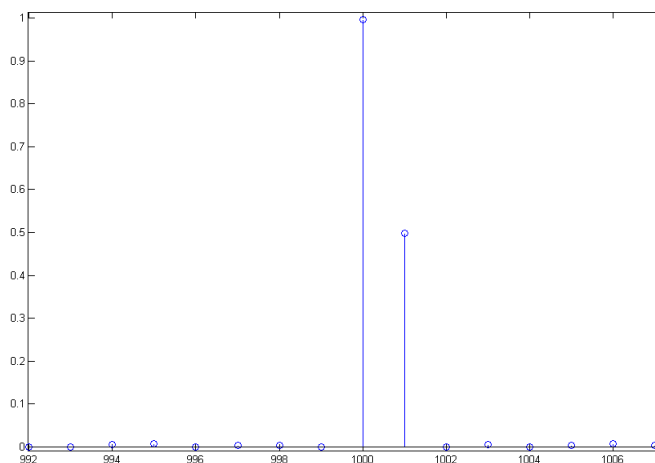
Para hallar el valor de la correlación cruzada R_{XY} , se supone que el sistema es ESA y se realiza el cálculo por definición:

$$R_{XY}(k) = E[X(n)Y(n+k)] = E[X(n)(X(n+k) + bX(n+k-1))]$$

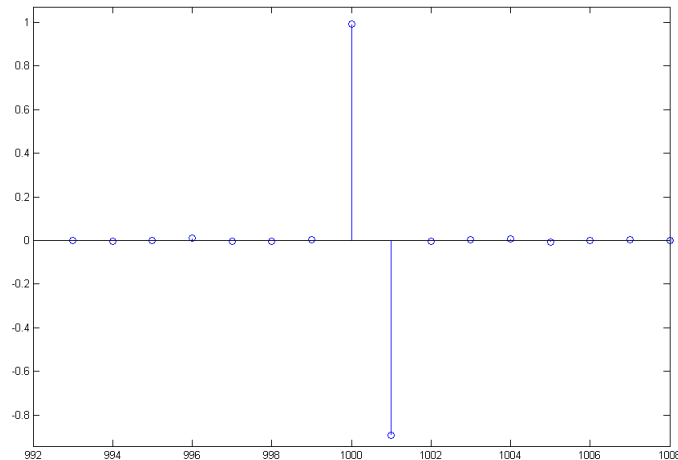
$$R_{XY}(k) = E[X(n)X(n+k)] + bE[X(n)X(n+k-1)] = R_{XX}(k) + bR_{XX}(k-1)$$

En la siguiente gráfica se puede apreciar la autocorrelación para distintos valores de k , donde se simuló con $M(100)$ realizaciones de un proceso de $N(1000)$ muestras de ruido blanco:

b1 = 0.5



b1 = -0.9



Para un filtro moving average de orden N , la correlación cruzada $R_{XY}(k)$ resulta:

$$R_{XY}(k) = R_{XX}(k) + \sum_{i=1}^N b_i R_{XX}(k - i)$$

3) Si $X(n)$ es ruido blanco, halle:

- $E[Y(n)]$
- $R_Y(k)$
- $S_Y(\omega)$

Esperanza:

Sea $H(\omega)$ la respuesta en frecuencia del filtro moving average

$$E[Y(n)] = |H(\omega)|^2 E[X(n)] = |H(\omega)|^2 0 = 0$$

Es inmediato, porque la media de $X(n) = 0$.

Autocorrelación:

Para hallar esta función, se extenderá el resultado a un filtro MA de segundo orden:

$$R_{YY}(k) = E[Y(n)Y(n+k)]$$

$$R_{YY}(k) = E[(X(n) + b_1 X(n-1) + b_2 X(n-2)) (X(n+k) + b_1 X(n+k-1) + b_2 X(n+k-2))]$$

$$R_{YY}(k) = E[X(n) + X(n+k)] + b_1 [E[X(n) + X(n+k-1)] + E[X(n+k) + X(n-1)]] + \dots$$

$$\dots + b_2 [E[X(n-2) + X(n+k)] + E[X(n) + X(n+k-2)]] + \dots$$

$$\dots + b_1 b_2 [E[X(n-1) + X(n+k-2)] + E[X(n-2) + X(n+k-1)]] + \dots$$

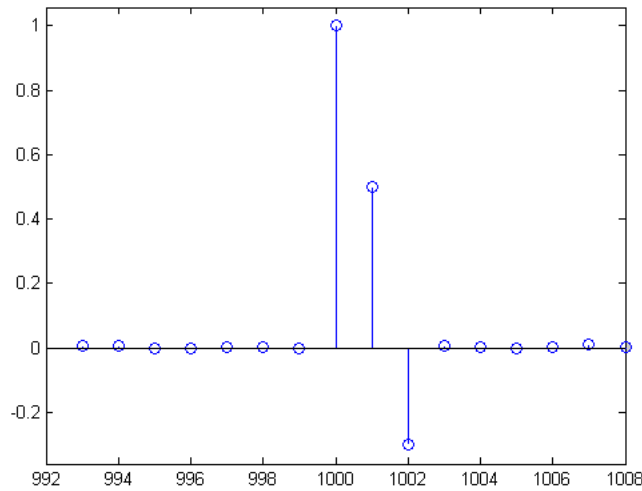
$$\dots + b_1^2 E[X(n-1) + X(n+k-1)] + b_2^2 E[X(n-2) + X(n+k-2)]$$

Haciendo factores comunes, la expresión resulta:

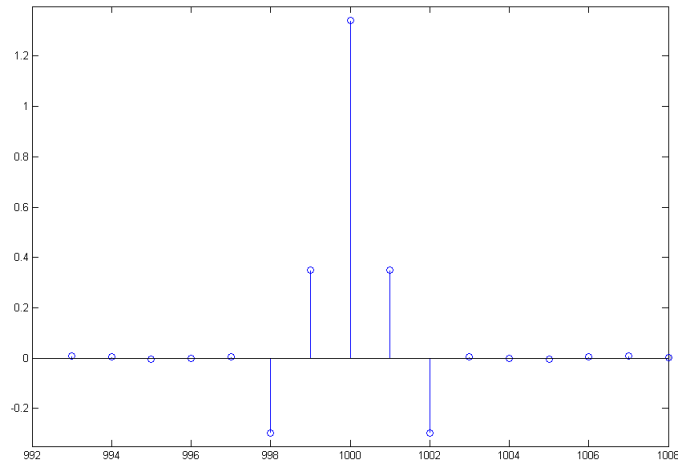
$$R_{YY}(K) = R_{XX}(K)(1 + b_1^2 + b_2^2) + (R_{XX}(K+1)R_{XX}(K-1))(b_1(1 + b_2)) + \dots$$

$$\dots + (R_{XX}(K+2)R_{XX}(K-2))b_2$$

Para el caso en que $X(n)$ es W_N , se deberá reemplazar $R_{XX}(K) = \sigma_N \delta(k)$.
Nuevamente se muestra la simulación asociada para $b_1 = 0,54$ y $b_2 = -0,3$:
 $R_{XY}(K)$



$R_{YY}(K)$

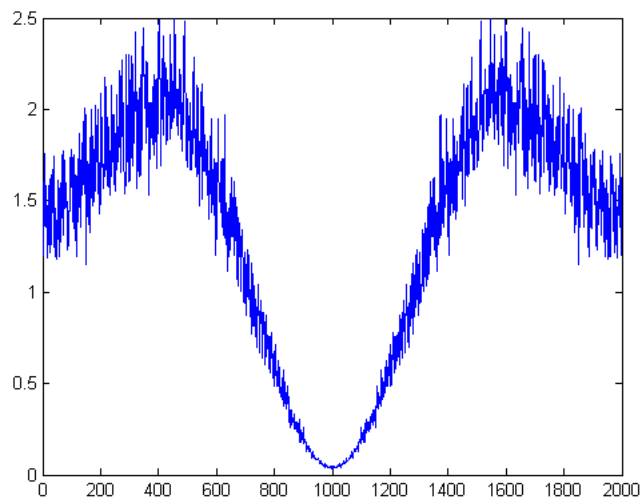


Densidad espectral de Potencia:

Haciendo la transformada de Fourier de la Autocorrelación del filtro se obtendrá:

$$S_Y(\omega) = \mathcal{F}[R_{YY}(K)] = S_X(\omega) [(1 + b_1^2 + b_2^2) + (e^{j\omega} + e^{-j\omega})(b_1(1 + b_2)) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})b_2]$$

Para el caso en que $X(n)$ es W_N , se deberá reemplazar $S_X(\omega) = \sigma_N$.
La simulación para $b_1 = 0,5$ y $b_2 = -0,3$ arroja:



2. Anexo I

A continuación se presentan los programas en Matlab mencionados en este informe.

2.1. Parte A

```
close all;
clear all;

M=100;

N=1000;

%ruido blanco gaussiano
WN1=randn(M,N);
%ruido blanco uniforme
WN2=rand(M,N)*sqrt(12);
WN2=WN2-sqrt(12)/2;
%parametro 'a'
a=input('ingrese a: ');
%AR(1)
A=[1 -a];
B=[1 0];

for (i=1:M)
    X1(i,:)=filter(B,A,WN1(i,:));
    X2(i,:)=filter(B,A,WN2(i,:));
end;

Ex1=mean(X2');
Ex2=mean(X2');

%Media Ex
Ex1=mean(Ex1)
Ex2=mean(Ex2)

%Calculo de Rx
Rx1=zeros(M,2*N-1);
Rx2=zeros(M,2*N-1);
for (i=1:M)
    Rx1(i,:)=xcorr(X1(i,:), 'biased');
    Rx2(i,:)=xcorr(X2(i,:), 'biased');
end;
```

```

Rx1=mean(Rx1);
Rx2=mean(Rx2);

%Calculo de Sx
Sx1=fft(Rx1);
Sx2=fft(Rx2);

%Graficos
figure
subplot(1,2,1);
plot(Rx1);
title('Rx para ruido blanco Gausiano')
subplot(1,2,2);
plot(Rx2);
title('Rx para ruido blanco Uniforme')

figure
subplot(1,2,1);
plot(abs(Sx1));
title('Sx para ruido blanco Gausiano');
subplot(1,2,2);
plot(abs(Sx2));
title('Sx para ruido blanco Uniforme');

figure
bins = ceil(sqrt(N)); %Numero de bins a utilizar en el histograma
subplot(1,2,1);
histo(mean(X1),bins)
title('FDP para WN ruido blanco gausiano')
subplot(1,2,2)
histo(mean(X2),bins)
title('FDP para WN ruido blanco uniforme')

```

2.2. Parte B

2.2.1. Filtros.m

```

%-----
%El presente Script aborda la implementacion de filtros de distintos
%tipos utilizando filtros autorregresivos y filtros moving average
%-----

%Pasabajos
B= [1 1];
A= [1 0];
[HLP WLP]= freqz(B,A,256,'whole');

```

```
hold on;
subplot(1,2,1)
plot(WLP,abs(HLP).^2)
xlabel('Frecuencia');
ylabel('Amplitud');
title('Densidad espectral de energia');
subplot(1,2,2)
hold on;
plot(-1,0,'o')
plot(0,0,'x')
xlabel('Re(z)');
ylabel('Im(z)');
title('Diagrama de polos y ceros')
```

```
figure;
%Pasaaaltos
B= [1 -1];
A= [1 0];
[HLP WLP]= freqz(B,A,256,'whole');
hold on;
subplot(1,2,1)
plot(WLP,abs(HLP).^2)
xlabel('Frecuencia');
ylabel('Amplitud');
title('Densidad espectral de energia');
subplot(1,2,2)
hold on;
plot(1,0,'o')
plot(0,0,'x')
xlabel('Re(z)');
ylabel('Im(z)');
title('Diagrama de polos y ceros')
```

```
figure;
%Notch Filter
B= [1 0 1];
A= [1 0 .99];
[HLP WLP]= freqz(B,A,256,'whole');
hold on;
subplot(1,2,1)
plot(WLP,abs(HLP).^2)
xlabel('Frecuencia');
ylabel('Amplitud');
title('Densidad espectral de energia');
subplot(1,2,2)
hold on;
```

```

plot(0,1,'o')
plot(0,-1,'o')
plot(0,0.99,'rx')
plot(0,-0.99,'rx')
xlabel('Re(z)');
ylabel('Im(z)');
title('Diagrama de polos y ceros')

```

2.2.2. MAverage.m

```

%-----
%El presente script aborda el analisis de las funciones de
%autocorrelacion y correlacion cruzada para un proceso MA(2) a su vez
%como tambien ilustra las DD.EE.PP.
%-----

N= 1000;
M=100;
b1 = input('Ingrese el valor de "b1": ');
b2 = input('Ingrese el valor de "b2": ');
A= [1 0 0];
B= [1 b1 b2];
X = randn(M,N);
Y = zeros(M,N);
R = zeros(M,2*N-1);

%Filtrado
%-----
for(i=1:M)
    Y(i,:) = filter(B,A,X(i,:));
end

%Funciones de Correlacion
%-----
%Correlacion cruzada
for(i=1:M)
    Rc(i,:) = xcorr(Y(i,:),X(i,:), 'biased');
end
%Autocorrelacion
for(i=1:M)
    Ra(i,:) = xcorr(Y(i,:), 'biased');
end
Cc =mean(Rc);
Ca =mean(Ra);

stem(Cc)

```

```
figure  
stem(Ca)
```

```
%Densidad Espectral de Potencia  
figure  
plot(abs(fft(Ca)));
```