



66.75 Procesos Estocásticos

Trabajo Práctico N° 3

Figuerola, Gonzalo	84255
Mello, Ariel	84853
Tempone, Nicolás	84548
Borgatello, José María	67758

Índice

1. Desarrollo del trabajo Práctico - Ejercicios	2
1.1. Parte A	2
1.2. Parte B	9
1.3. Parte C	15
1.4. Parte D	16
1.4.1. Función de autocorrelación del proceso $Y(n)$	16
1.4.2. Calculo de $e = Y - X$	17
1.4.3. Calculo de varianza de $e(n)$	17
2. Anexo I	19
2.1. tp3-a.m	19
2.2. tp3-b.m	20

1. Desarrollo del trabajo Práctico - Ejercicios

1.1. Parte A

Sea un sistema LTI descrito por la ecuación en diferencias:

$$Y(n) = \frac{X(n) + X(n - \alpha)}{\alpha}$$

El cual es aplicado a un proceso aleatorio de ruido blanco. El mismo es estacionario en sentido amplio y tiene las siguientes características:

- $\mu_X = E[X(n)] = 0$
- $\sigma_X^2 = 1$
- $R_{XX}(k) = E[X(n) \cdot X(n + k)] = \sigma_X^2 \cdot \delta(k)$

Se pretende obtener, para el proceso $Y(n)$, las funciones de autocorrelación y densidad espectral de potencia.

Media

$$E[Y(n)] = E\left[\frac{X(n) + X(n - \alpha)}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha} [E[X(n)] + E[X(n - \alpha)]]$$

Y como tanto $X(n)$ como $X(n - \alpha)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media nula: $E[Y(n)] = 0$

Autocorrelación:

$$R_{YY}(n_1, n_2) = E[Y(n_1) \cdot Y(n_2)] = E\left[\frac{X(n_1) + X(n_1 - \alpha)}{\alpha} \frac{X(n_2) + X(n_2 - \alpha)}{\alpha}\right]$$

Como el operador esperanza es lineal, se realiza la distribución del producto y se aplica el operador a cada uno de los sumandos:

$$\begin{aligned} R_{YY}(n_1, n_2) &= \frac{1}{\alpha^2} [E[X(n_1) \cdot X(n_2)] + E[X(n_1) \cdot X(n_2 - \alpha)] + \dots \\ &\quad \dots + E[X(n_2) \cdot X(n_1 - \alpha)] + E[X(n_1 - \alpha) \cdot X(n_2 - \alpha)]] \end{aligned}$$

Suponiendo que el proceso es estacionario en sentido amplio, se realiza el cambio de variable $n_2 = n_1 + k$, y se continúa trabajando sobre la expresión:

$$R_{YY}(k) = \frac{1}{\alpha^2} (E[X(n) \cdot X(n+k)] + E[X(n) \cdot X(n+k-\alpha)] \dots \\ \dots + E[X(n+k) \cdot X(n-\alpha)] + E[X(n-\alpha) \cdot X(n+k-\alpha)])$$

Puede observarse que en esta última expresión aparece $E[X(n) \cdot X(n+k)]$ que es la autocorrelación de $X(n)$. De esta manera, resulta:

$$R_{YY}(n) = \frac{1}{\alpha^2} [R_{XX}(k) + R_{XX}(k-\alpha) + R_{XX}(k+\alpha) + R_{XX}(k)]$$

Como $R_{XX}(k) = \sigma_X^2 \cdot \delta(k)$, la autocovarianza resulta:

$$R_{YY}(k) = \frac{\sigma_X^2}{\alpha^2} [2\delta(k) + \delta(k-\alpha) + \delta(k+\alpha)]$$

Esto significa, que para un instante n dado, $X(n)$ sólo está correlacionado con el valor del instante anterior y el siguiente.

Densidad espectral de potencia:

La densidad espectral se calcula aplicando la transformada de Fourier a la función de autocorrelación.

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{F}[R_{YY}(k)]$$

Por propiedades elementales de la transformada de Fourier de tiempo discreto:

$$S_{YY}(\omega) = \left(\frac{\sigma_X}{\alpha}\right)^2 (2 - e^{-j\Omega\alpha} - e^{j\Omega\alpha}) = 2 \left(\frac{\sigma_X}{\alpha}\right)^2 [1 + \cos(\Omega\alpha)]$$

Se ve entonces que la forma de la D.E.P. depende directamente del valor de α .

Simulación en Matlab:

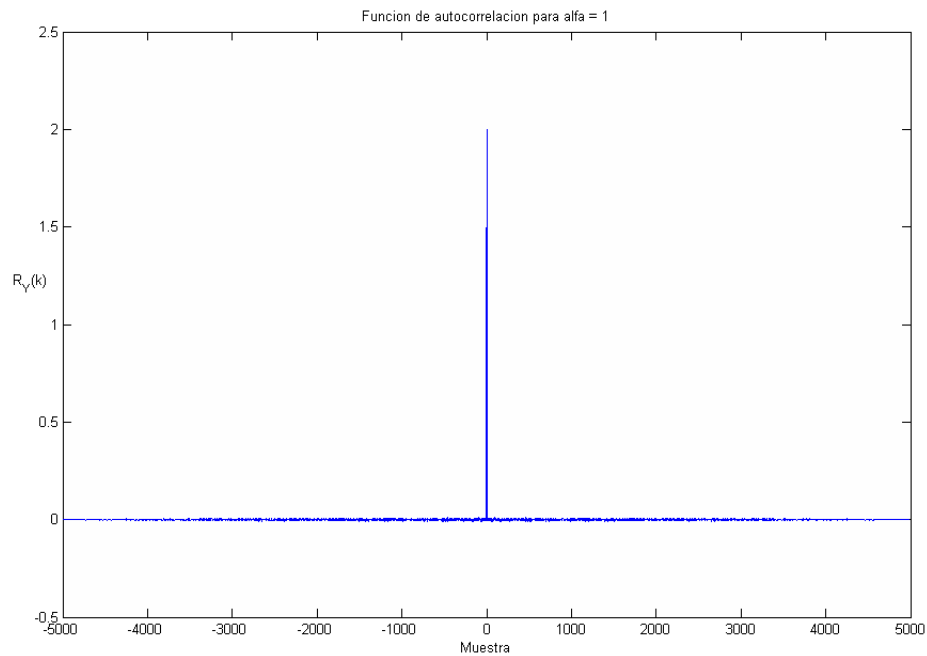
Para la simulación del proceso se genera un arreglo de M realizaciones del proceso estocástico $X(n)$. A continuación, para cada realización se realiza el filtrado utilizando la función `filter(B,A,X)`, donde los vectores B y A son tales que corresponden a la ecuación en diferencias:

$$A(1) \cdot Y(n) = B(1) \cdot X(n) + B(2) \cdot X(n-1) + \dots + B(n_B+1) \cdot X(n-n_B) - \dots \\ \dots A(2) \cdot Y(n-1) - \dots - A(n_A+1) \cdot Y(n-n_A)$$

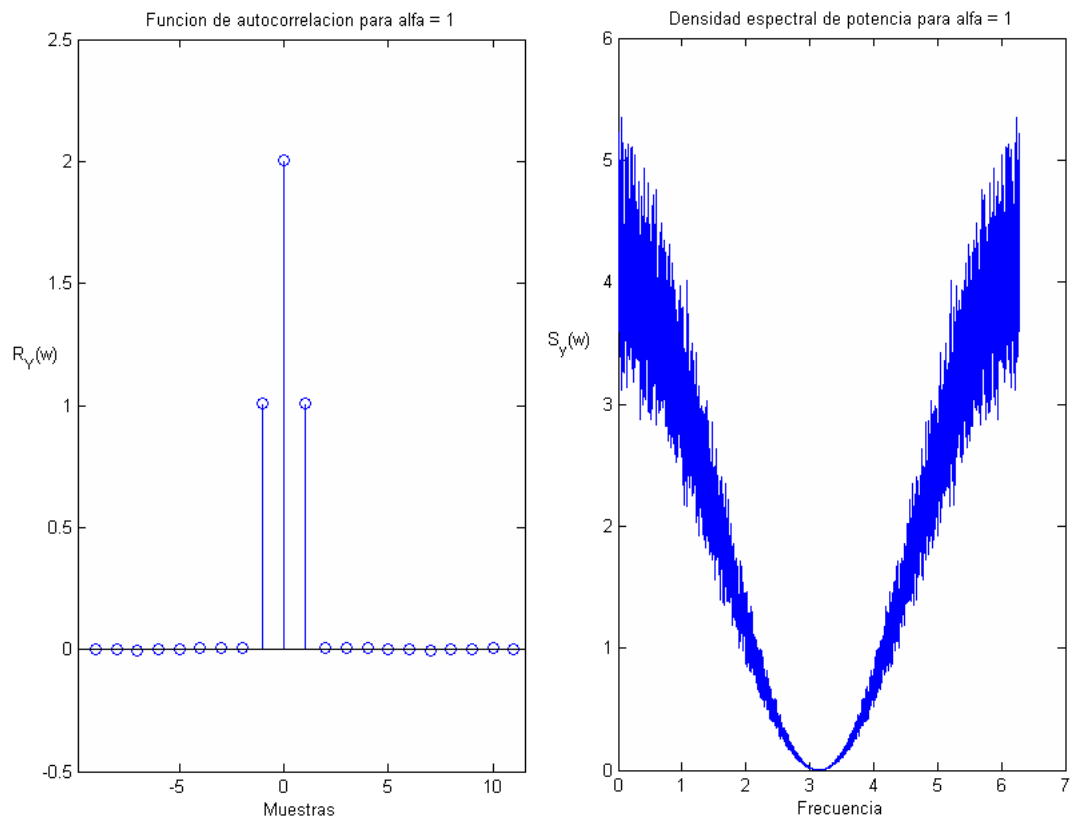
Luego de filtrar cada una de las realizaciones de $X(n)$, se le calcula la función de autocorrelación sesgada a cada una de ellas. Finalmente se obtiene un promedio entre las M funciones de autocorrelación para obtener una función más parecida a la ideal.

$$R_{X_M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M R_{Y_i}$$

En el siguiente gráfico se muestra la función de autocorrelación para $\alpha = 1$:



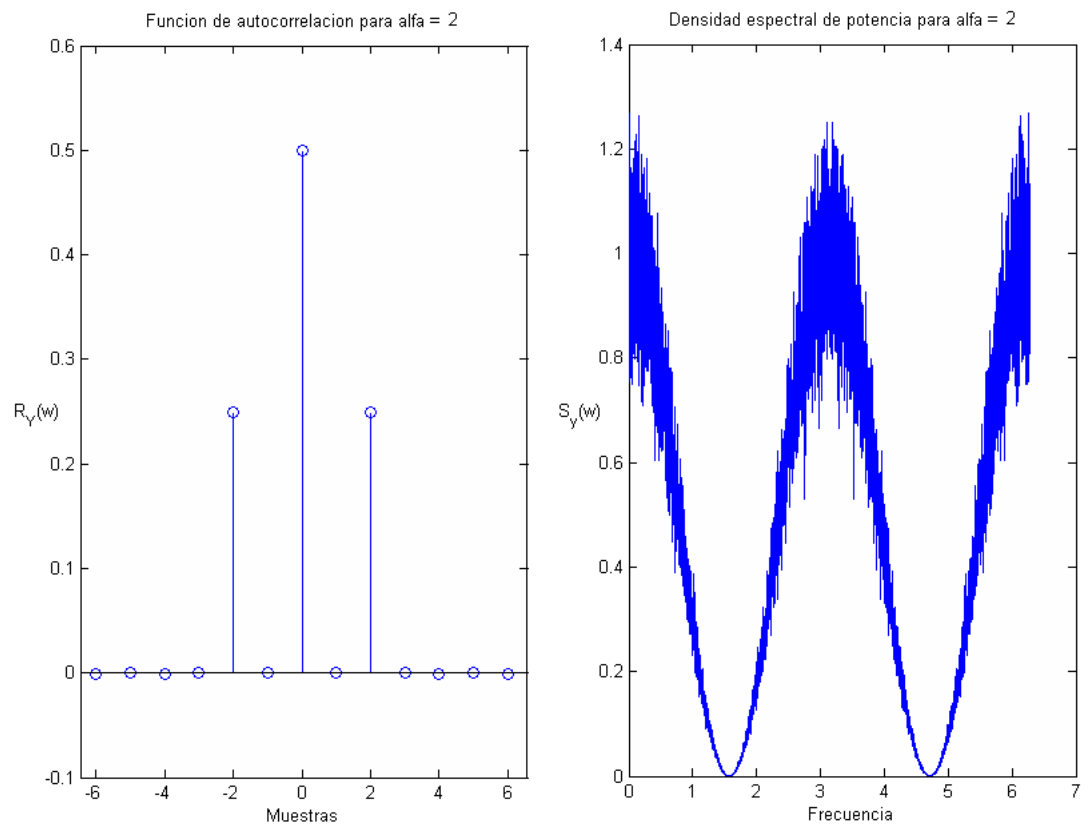
Realizando una ampliación sobre la zona central para observar la función de autocorrelación para valores cercanos al corriente:



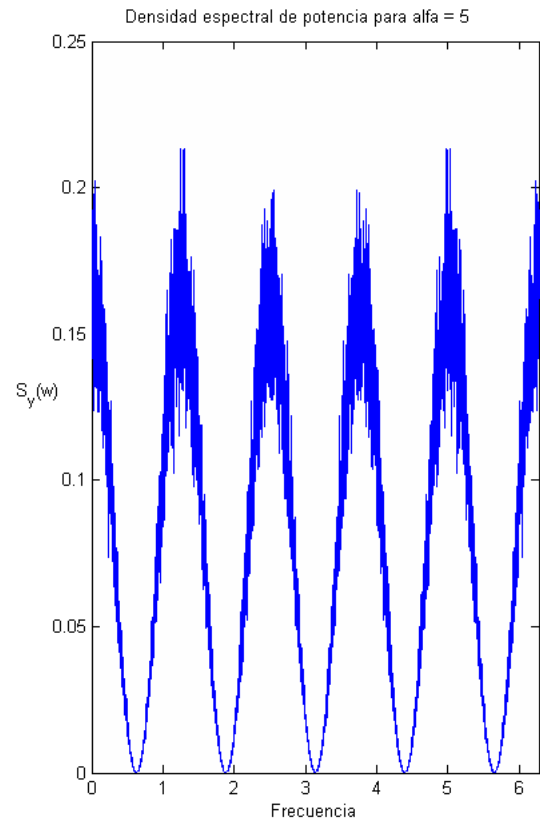
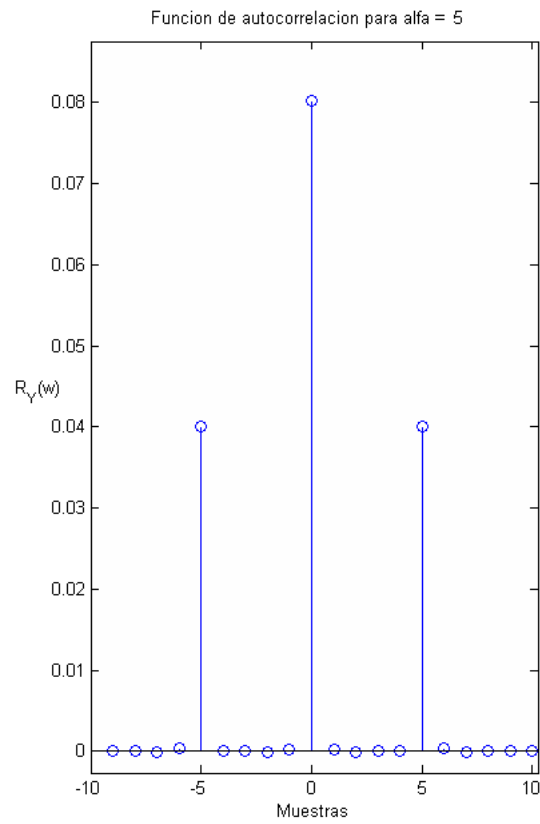
Se pueden observar las 3 deltas correspondientes a los valores $k = 0$, $k = \alpha$ y $k = -\alpha$. También se puede apreciar en la D.E.P la presencia de α ceros ubicados en forma equidistante.

A continuación se muestran los gráficos correspondientes a distintos valores de α :

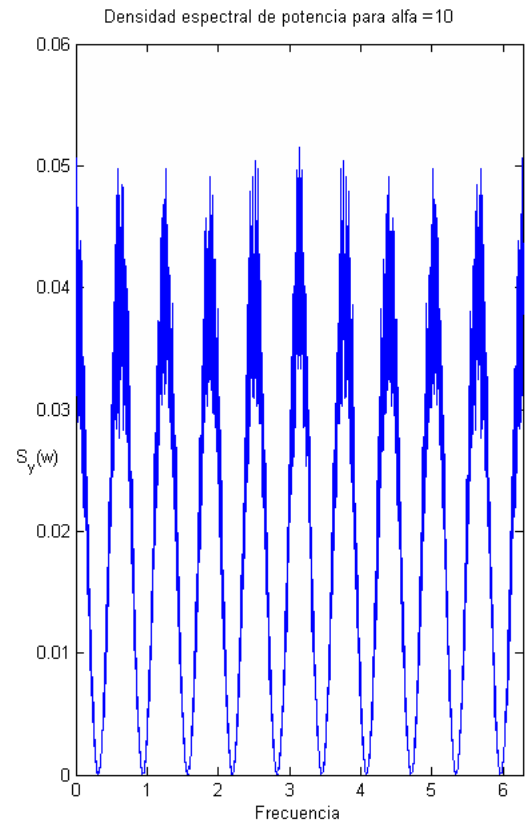
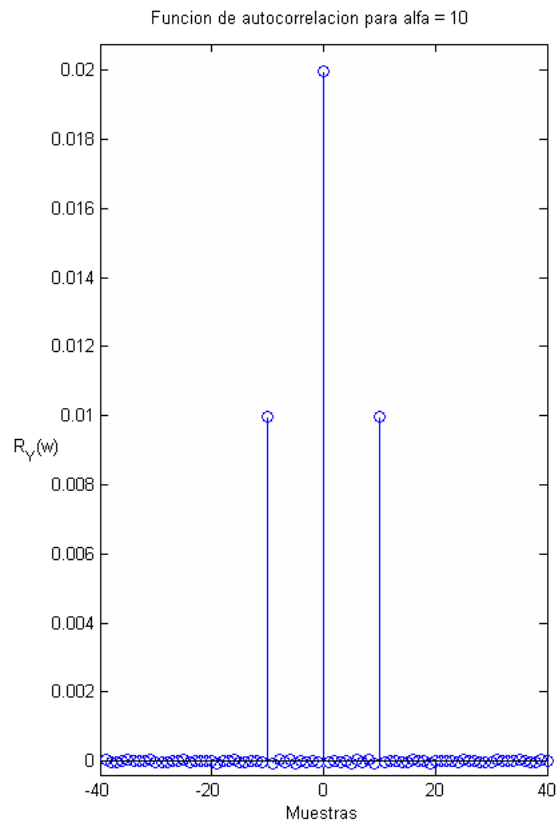
$$\alpha = 2$$



$$\alpha = 5$$



$$\alpha = 10$$



1.2. Parte B

Sea un sistema LTI descrito por la ecuación en diferencias:

$$Y(n) = \frac{X(n) - X(n - \alpha)}{\alpha}$$

El cual es aplicado nuevamente a un proceso aleatorio de ruido blanco. El mismo es nuevamente E.S.A., con media nula y varianza unitaria.

Se pretende obtener, para el proceso $Y(n)$, las funciones de autocorrelación y densidad espectral de potencia.

Media

$$E[Y(n)] = E\left[\frac{X(n) - X(n - \alpha)}{\alpha}\right] = \frac{1}{\alpha} [E[X(n)] - E[X(n - \alpha)]]$$

Y como tanto $X(n)$ como $X(n - \alpha)$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media nula: $E[Y(n)]$

Autocorrelación:

$$R_{YY}(n_1, n_2) = E[Y(n_1) \cdot Y(n_2)] = E\left[\frac{X(n_1) - X(n_1 - \alpha)}{\alpha} \frac{X(n_2) - X(n_2 - \alpha)}{\alpha}\right]$$

Como el operador esperanza es lineal, se realiza la distribución del producto y se aplica el operador a cada uno de los sumandos:

$$\begin{aligned} R_{YY}(n_1, n_2) &= \frac{1}{\alpha^2} [E[X(n_1) \cdot X(n_2)] - E[X(n_1) \cdot X(n_2 - \alpha)] + \dots \\ &\quad \dots - E[X(n_2) \cdot X(n_1 - \alpha)] + E[X(n_1 - \alpha) \cdot X(n_2 - \alpha)]] \end{aligned}$$

Suponiendo que el proceso es estacionario en sentido amplio, se realiza el cambio de variable $n_2 = n_1 + k$, y se continúa trabajando sobre la expresión:

$$\begin{aligned} R_{YY}(k) &= \frac{1}{\alpha^2} (E[X(n) \cdot X(n + k)] - E[X(n) \cdot X(n + k - \alpha)] \dots \\ &\quad \dots - E[X(n + k) \cdot X(n - \alpha)] + E[X(n - \alpha) \cdot X(n + k - \alpha)]) \end{aligned}$$

Puede observarse que en esta última expresión aparece $E[X(n) \cdot X(n + k)]$ que es la autocorrelación de $X(n)$. De esta manera, resulta:

$$R_{YY}(n) = \frac{1}{\alpha^2} [R_{XX}(k) - R_{XX}(k - \alpha) - R_{XX}(k + \alpha) + R_{XX}(k)]$$

Como $R_{XX}(k) = \sigma_X^2 \cdot \delta(k)$, la autocovarianza resulta:

$$R_{YY}(k) = \frac{\sigma_X^2}{\alpha^2} [2\delta(k) - \delta(k - \alpha) - \delta(k + \alpha)]$$

Esto significa, que para un instante n dado, $X(n)$ sólo está correlacionado con el valor del instante anterior y el siguiente.

Densidad espectral de potencia:

La densidad espectral se calcula aplicando la transformada de Fourier a la función de autocorrelación.

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{F}[R_{YY}(k)]$$

Por propiedades elementales de la transformada de Fourier de tiempo discreto:

$$S_{YY}(\omega) = \left(\frac{\sigma_X}{\alpha}\right)^2 (2 - e^{-j\Omega\alpha} - e^{j\Omega\alpha}) = 2 \left(\frac{\sigma_X}{\alpha}\right)^2 [1 - \cos(\Omega\alpha)]$$

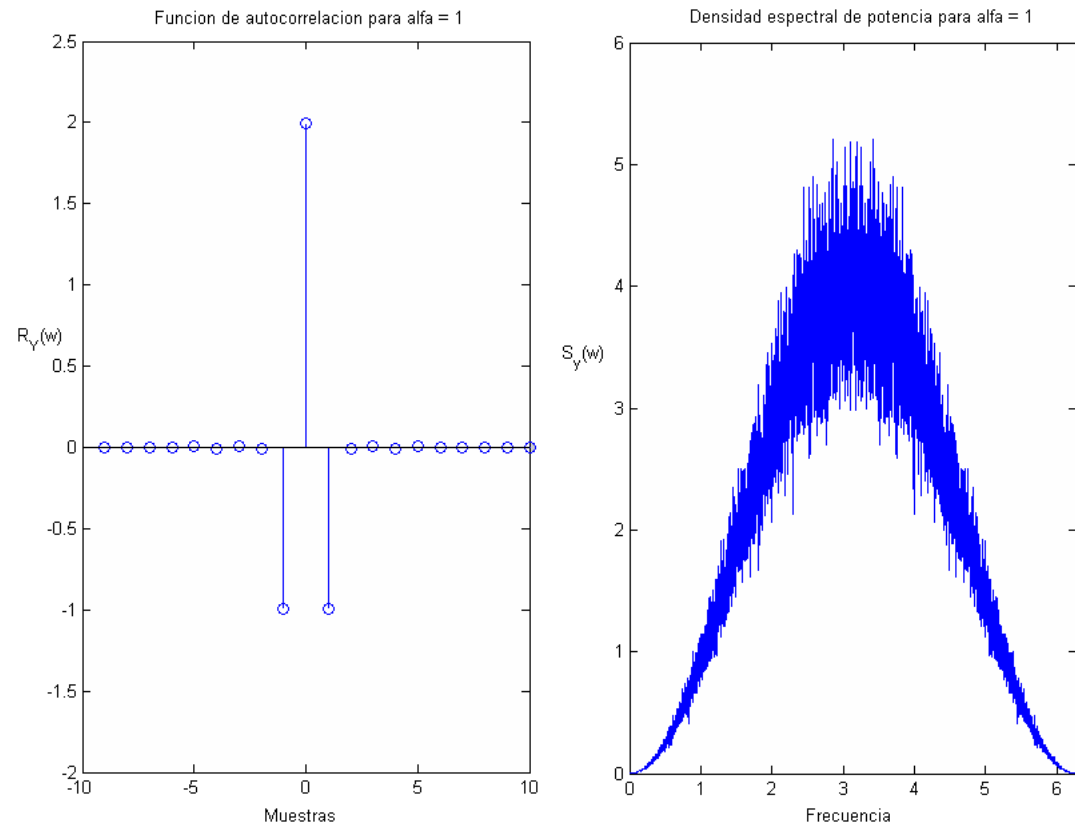
Se ve entonces que la forma de la D.E.P. depende nuevamente del valor de α .

Simulación en Matlab:

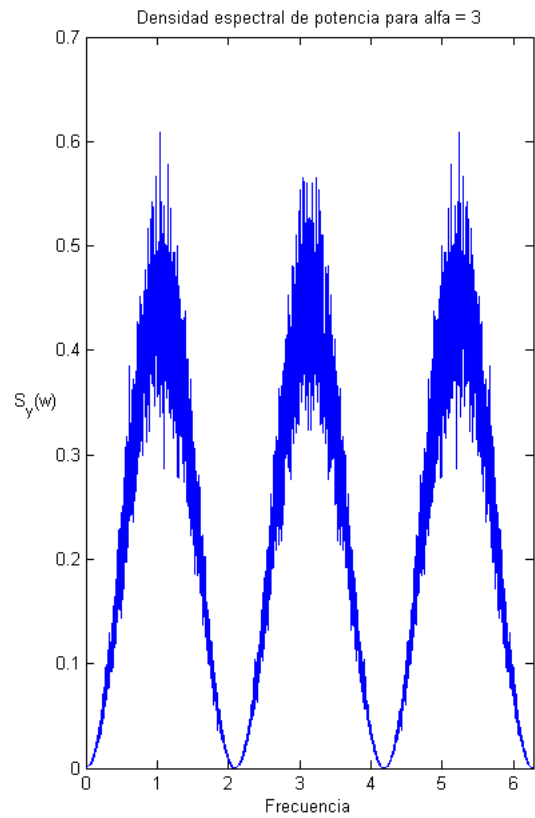
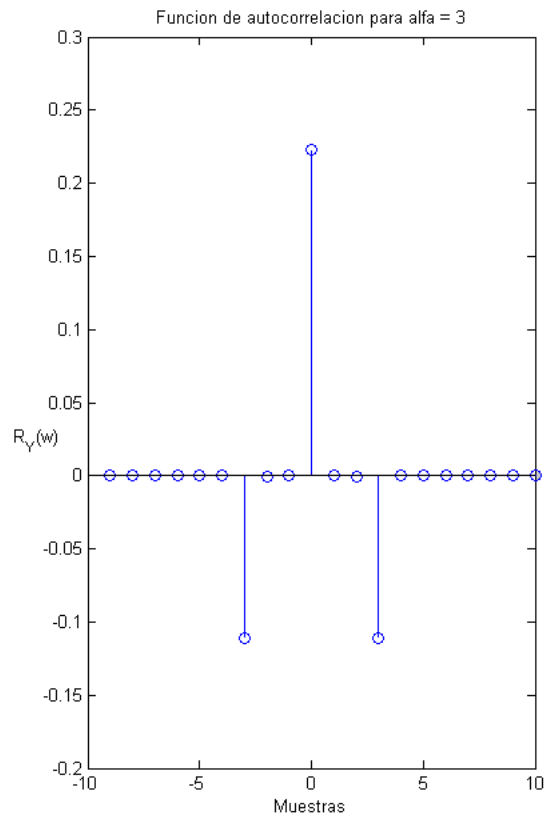
Se procede de la misma manera que en el punto anterior, pero para esta oportunidad, los vectores que ingresan a la función `filter` cambian en un signo. Nuevamente se realiza un promedio sobre las funciones de autocorrelación de las M realizaciones para dar lugar a una última función de autocorrelación con bajo efecto de borde.

Se grafican a continuación las funciones de autocorrelación para los distintos valores de α :

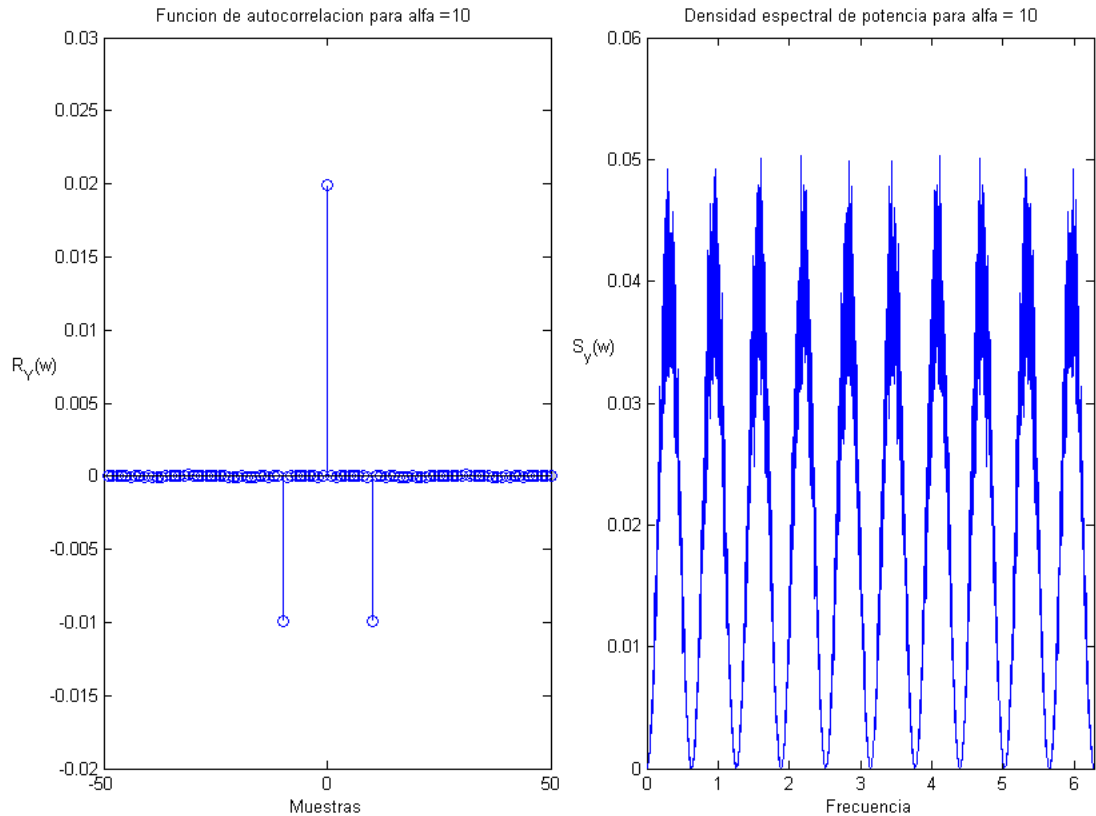
$$\alpha = 1$$



$$\alpha = 3$$



$$\alpha = 10$$



Se observa la presencia de ceros en la densidad espectral de potencia asociada a el sistema diferenciador.

Análisis en el dominio transformado:

La razón de la presencia de los ceros en las DD.EE.PP. se asocian tras analizar la función de sistema correspondiente a cada uno de los sistemas.

$$Y(n) = \frac{X(n) + X(n - \alpha)}{\alpha}$$

$$Y(z) = \frac{X(z) + z^{-\alpha} X(z)}{\alpha}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\alpha} X(z) [1 + z^{-\alpha}]$$

$$Y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\alpha} [1 + z^{-\alpha}]$$

Como se ve, la presencia del término $[1 + z^{-\alpha}]$ indica que se producen ceros para los valores:

$$z = e^{-j\Omega} \quad \text{con} \quad \Omega = \frac{(2r+1)\pi}{\alpha} \quad \text{con} \quad r \in Z$$

Lo mismo ocurre para el sistema diferenciador, solo que los ceros estarán en:

$$z = e^{-j\Omega} \quad \text{con} \quad \Omega = \frac{2\pi r}{\alpha} \quad \text{con} \quad r \in Z$$

1.3. Parte C

Sea una variable aleatoria

$$Z(t) = X(t) \cos(\omega_o t) + Y(t) \sin(\omega_o t)$$

con $X(t)$ e $Y(t)$ ruido blanco, calcular R_{ZZ} y $S_Z(\omega)$.

Como $X(t)$ e $Y(t)$ son ruido blanco, tienen media $m_X = m_Y = 0$ y varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 respectivamente.

$$\begin{aligned} R_{ZZ} = E[Z(t_1)Z(t_2)] &= E[X(t_1)X(t_2) \cos(\omega_o t_1) \cos(\omega_o t_2) + Y(t_1)Y(t_2) \sin(\omega_o t_1) \sin(\omega_o t_2) + \dots \\ &\quad \dots + X(t_1)Y(t_2) \cos(\omega_o t_1) \sin(\omega_o t_2) + Y(t_1)X(t_2) \sin(\omega_o t_1) \cos(\omega_o t_2)] \end{aligned}$$

y dado que la esperanza es un operador lineal, y la esperanza de una constante es la misma constante, se tiene

$$\begin{aligned} R_{ZZ} &= E[X(t_1)X(t_2)] \cos(\omega_o t_1) \cos(\omega_o t_2) + E[Y(t_1)Y(t_2)] \sin(\omega_o t_1) \sin(\omega_o t_2) + \dots \\ &\quad \dots + E[X(t_1)Y(t_2)] \cos(\omega_o t_1) \sin(\omega_o t_2) + E[Y(t_1)X(t_2)] \sin(\omega_o t_1) \cos(\omega_o t_2) \end{aligned}$$

Donde por definición $E[X(t_1)X(t_2)] = R_{XX}$ y $E[Y(t_1)Y(t_2)] = R_{YY}$, y $E[X(t_1)Y(t_2)] = E[Y(t_1)X(t_2)] = 0$ ya que al ser X e Y variables independientes, $E[XY] = E[X]E[Y] = 0$ en este caso ya que $m_X = m_Y = 0$ por ser ruido blanco.

Por ser ruido blanco también se tiene que $R_{XX} = \sigma_X^2 \delta(\tau)$ y $R_{YY} = \sigma_Y^2 \delta(\tau)$.

Con estas relaciones y reescribiendo los términos de cosenos y senos en función de $\tau = t_1 - t_2$ se obtiene

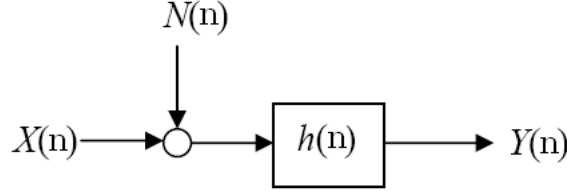
$$R_{XX} = \sigma_X^2 \delta(\tau) \left[\frac{\cos(\omega_o \tau)}{2} + \frac{\cos(\omega_o(t_1 + t_2))}{2} \right] + \sigma_Y^2 \delta(\tau) \left[\frac{\cos(\omega_o \tau)}{2} - \frac{\cos(\omega_o(t_1 + t_2))}{2} \right]$$

Por lo que, si $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_Z^2$,

$$R_{XX}(\tau) = \sigma_Z^2 \delta(\tau)$$

1.4. Parte D

Considere el siguiente sistema LTI



donde $X(n)$ y $N(n)$ son procesos ESA descorrelacionados entre sí. La varianza de $N(n)$ es σ_N^2 y la de $X(n)$ es σ_X^2

- 1 Hallar la función de autocorrelación del proceso $Y(n)$
- 2 Defina el error $e(n) = Y(n) - X(n)$. Determine la autocorrelación de $e(n)$
- 3 Si $h(n) = a \cdot \delta(n)$, elija el valor de a que minimice la varianza de $e(n)$

1.4.1. Función de autocorrelación del proceso $Y(n)$

Sea $Y(n) = (X(n) + N(n)) * h(n)$ y considerando que se trata de un sistema LTI, se define:

$$S_{YY}(\omega) = [S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)] \cdot |H(\omega)|^2 = S_{XX}(\omega) |H(\omega)|^2 + S_{NN}(\omega) |H(\omega)|^2$$

Con $S_{NN}(\omega) = \sigma_N^2$.

Por otra parte

$$R_{YY}(k) = \mathcal{F}^{-1}[S_{YY}(\omega)]$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow R_{YY}(k) &= \mathcal{F}^{-1} [S_{XX}(\omega) |H(\omega)|^2] + \mathcal{F}^{-1} [S_{NN}(\omega) |H(\omega)|^2] = \dots \\
 \dots &= \mathcal{F}^{-1} [S_{XX}(\omega) H(\omega) H^*(\omega)] + \sigma_N^2 \mathcal{F}^{-1} [H(\omega) H^*(\omega)] = \dots \\
 \dots &\stackrel{(1)}{=} [R_{XX}(k) * h(k) * h^*(-k)] + \sigma_N^2 h(k) * h^*(-k)
 \end{aligned}$$

La igualdad plateada en (1) surge de:

$$\begin{aligned}
 H(\Omega) &= \sum_n h(k) e^{-j\Omega n} \\
 H^*(\Omega) &= \sum_n h^*(k) e^{j\Omega n} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[H^*(\omega)] = h^*(-k)
 \end{aligned}$$

1.4.2. Cálculo de $e = Y - X$

Sea

$$Y(n) = (X(n) + N(n)) * h(n)$$

se define

$$R_{ee}(k) = E[e(n)e(n+k)] = E[Y(n) - X(n)Y(n+k) - X(n+k)]$$

$$R_{ee}(k) = E[Y(n)Y(n+k)] - E[X(n)Y(n+k)] - E[Y(n)X(n+k)] + E[X(n)X(n+k)]$$

$$R_{ee}(k) = E[Y(n)Y(n+k)] - 2E[X(n)Y(n+k)] + E[X(n)X(n+k)]$$

$$\Rightarrow E[X(n)Y(n+k)] = E[X(n) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} (X(n+k-l) + N(n+k-l)) * h(l)] =$$

$$= E[X(n)Y(n+k)] = E \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} X(n) * X(n+k-l) + N(n+k-l) * h(l) \right] =$$

$$= E \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} (X(n) * X(n+k-l) + X(n) * N(n+k-l)) * h(l) \right] =$$

$$\Rightarrow E[X(n)Y(n+k)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) * (R_{XX}(k-l))$$

Finalmente

$$R_{ee}(k) = R_{XX}(k) + R_{YY}(k) - 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) * (R_{XX}(k-l))$$

1.4.3. Cálculo de varianza de $e(n)$

Si $h(n) = a\delta(n)$ entonces la autocorrelación calculada en el inciso anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$R_{ee}(k) = R_{XX}(k) + R_{YY}(k) - 2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a\delta(l) * (R_{XX}(k-l)) = R_{XX}(k) + R_{YY}(k) - 2aR_{XX}(k)$$

Dado que $VAR(e) = R_{ee}(0)$ se calcula

$$VAR(e) = R_{ee}(0) = R_{YY}(0) + VAR(x) - 2a VAR(x) = a^2(1 + VAR(x)) - 2a VAR(x) + VAR(x)$$

Se deriva $VAR(e)$ respecto de a y se iguala a 0 para obtener el mínimo de la función:

$$2a(1 + VAR(x)) - 2VAR(x) = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{VAR(x)}{1 + VAR(x)}$$

Se concluye que a debe tomar dicho valor para minimizar la varianza de $e(n)$

2. Anexo I

A continuación se presentan los programas en Matlab mencionados en este informe.

2.1. tp3-a.m

```
%-----%  
%          COMENTAR          %  
%-----%  
hold off;  
clear;  
clc;  
N=10000  
M=100;  
alfa = input('Ingrese el valor de alfa')  
X=randn(M,N);  
F=zeros(M,N)  
B=zeros(1,alfa+1);  
A=zeros(1,alfa+1);  
B(1)=1;  
B(alfa+1)=1;  
A(1)=1;  
for(i=1:M)  
    F(i,:)=filter(B,A,X)  
end
```

2.2. tp3-b.m

```
%-----%
%El presente script de Matlab es la implementacion de un filtro
% de potencia generado a partir de un diferenciador.
%
%-----%
hold off;
clear;
clc;

N=5000;                                %Muestras del proceso de W.N.
M=100;                                %Realizaciones del proceso de W.N.
alfa = input('Ingrese el valor de alfa: ');
X=randn(M,N);                          %Se generan las M realizaciones
                                       %del proceso de ruido blanco de
                                       %longitud N cada una de ellas

F=zeros(M,2*N-1);

B=zeros(1,alfa+1);                    %Se generan los vectores que
A=zeros(1,alfa+1);                    %Permiten utilizar la funcion
B(1)=1;                               %Filter, de acuerdo a la ecuacion
B(alfa+1)=-1;                         %en diferencias que describe
A(1)=1;                               %al filtro.
Z=zeros(1,alfa);                      %Vector de condiciones iniciales.

%A continuacion se filtra y se computa la autocorrelacion sesgada para cada
%realizacion del proceso X(n)
for(i=1:M)
    F(i,:)=xcorr(filter(B,A,X(i,:),Z)/alfa,'biased');
end

%Se obtiene el promedio entre las M funciones de autocorrelacion
Y=mean(F);

plot(-N+1:1:N-1,Y)
title(['Funcion de autocorrelacion para alfa = ',int2str(alfa)]);
xlabel('Muestras');

figure
subplot(1,2,1)
stem(-N+1:1:N-1,Y)
title(['Funcion de autocorrelacion para alfa = ',int2str(alfa)]);
xlabel('Muestras');
```

```
ylabel('R_Y(w)');  
subplot(1,2,2)  
plot(0:pi/N:2*pi-2*pi/N,abs(fft(Y)))  
title(['Densidad espectral de potencia para alfa = ',int2str(alfa)]);  
xlabel('Frecuencia');  
ylabel('S_y(w)');
```