

SISTEMAS DE CORRIENTE ALTERNA TRIFÁSICOS

3.1 Introducción

La generación, transmisión y distribución de energía eléctrica se efectúa a través de sistemas trifásicos de corriente alterna.

Las ventajas que se obtienen en los sistemas trifásicos con respecto a los monofásicos son:

- Ahorro de materiales en equipos, líneas de transmisión y distribución.
- Generación de campos magnéticos rotantes (Principio de funcionamiento de los motores)
- Potencia instantánea constante.

3.2 Fuentes trifásicas

Un generador trifásico de tensión está compuesto por:

- Una parte fija o estator, constituido por un paquete de chapas magnéticas que conforman un cilindro con una serie de ranuras longitudinales, que en el caso que analizaremos presenta la cantidad mínima que es de 6 ranuras. Sobre cada par de ranuras opuestas se colocan los lados de una bobina, cuyos principios y fin tienen la siguiente designación:

Bobina 1:	u - x
Bobina 2:	v - y
Bobina 3:	w - z

Las bobinas son constructivamente iguales, con el mismo número de espiras y con una distribución geométrica tal que sus ejes magnéticos forman un ángulo de 120° .

- Una parte móvil o rotor, que está ubicada dentro del estator y que consiste de un electroimán alimentado por corriente continua. El giro de dicho rotor se produce mediante una máquina impulsora (Motor diesel, turbina de vapor, de gas, hidráulica, eólica) que mantiene una velocidad angular constante.

La figura 3.1 muestra el corte perpendicular a eje de un generador elemental en el cual se ha dibujado solo un par de ranuras por fase, y la forma de una de las espiras.

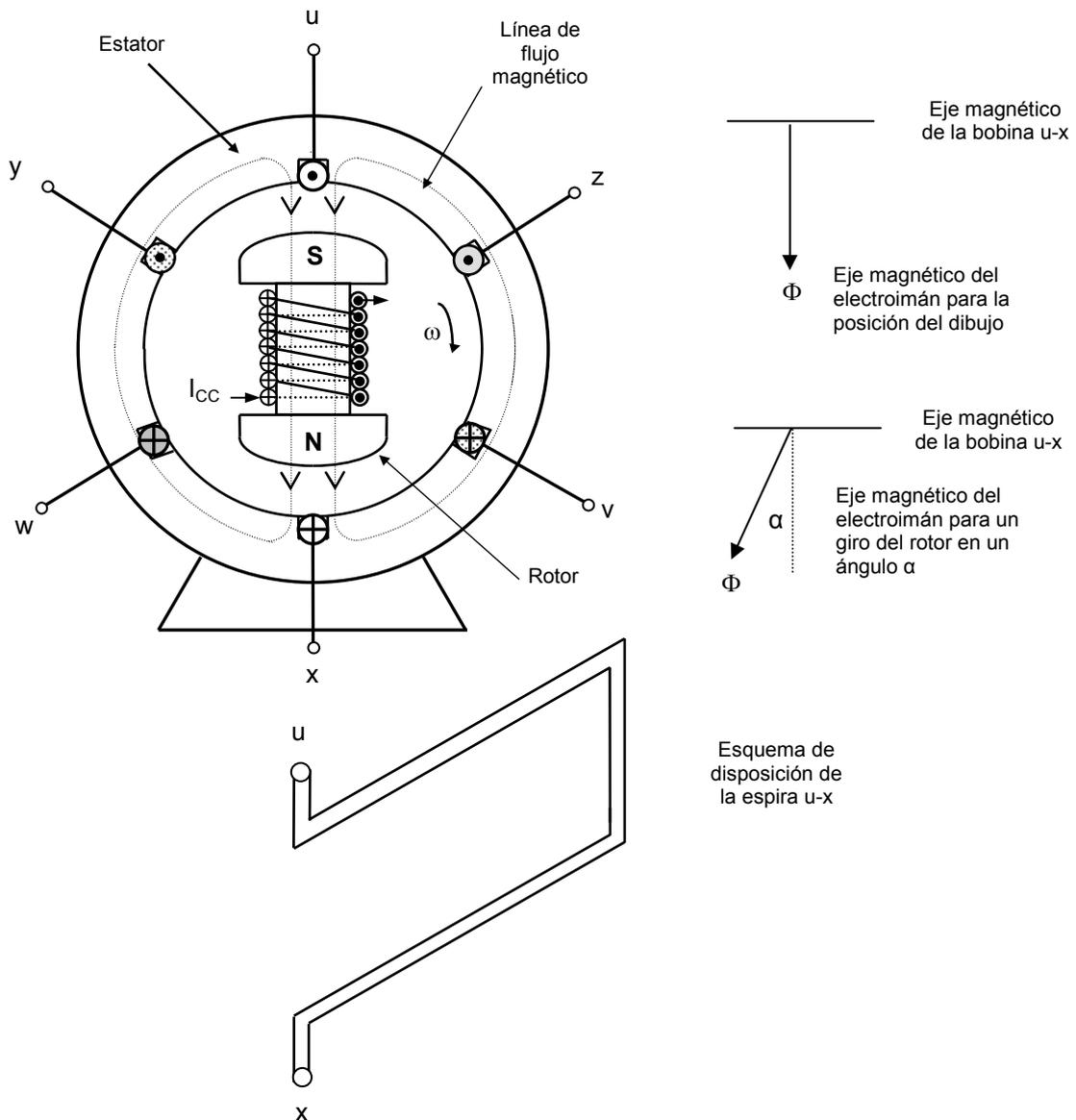


Figura 3.1 Generador de tensiones alternas trifásico

Dado que el electroimán produce un flujo $[\Phi]$ de valor constante, las bobinas concatenarán un valor de flujo de acuerdo a la posición instantánea del rotor.

Si tomamos la bobina u - x de "N" espiras (La cual en el esquema anterior está representada por una sola espira por razones de simplicidad del dibujo), y llamamos " α " al ángulo entre el eje magnético del electroimán y el eje vertical, el flujo concatenado por la bobina para ese instante es:

$$\phi = \Phi \text{ sen } \alpha$$

Dependiendo el ángulo α de la velocidad angular del rotor y del tiempo transcurrido, o sea; $\alpha = \omega t$, con lo cual:

$$\phi = \Phi \text{ sen } \omega t$$

De acuerdo a la Ley de Faraday-Lenz, entre los terminales de las bobinas se inducirá una

fuerza electromotriz cuyo valor es:

$$e_{ux} = N \frac{d\phi}{dt} = N \Phi \omega \cos \omega t \quad \text{Siendo } E_{\max} = N \Phi \omega$$

$$e_{ux} = E_{\max} \text{ sen } \omega t$$

Si analizamos la bobina v - y, vemos que el fenómeno se repite pero con un atraso de 120°, debido a la disposición geométrica de ambas, o sea que:

$$e_{vY} = E_{\max} \text{ sen } \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Lo mismo sucede con la bobina w - z:

$$e_{wZ} = E_{\max} \text{ sen } \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

De esta manera se ha logrado tener un sistema de tres tensiones alternas desfasadas 120° en el tiempo, una de otra.

Si no hay circulación de corriente la fuerza electromotriz inducida y la tensión en bornes de cada bobina son iguales. Esto no es así en el caso de que haya circulación de corriente, ya que la tensión en bornes varía con el estado de carga, lo que nos conduce a representar cada bobina como una fuente de tensión alterna real, compuesta por una fuente ideal "E" y una impedancia en serie "Z_i", según el dibujo de la figura 3.2.

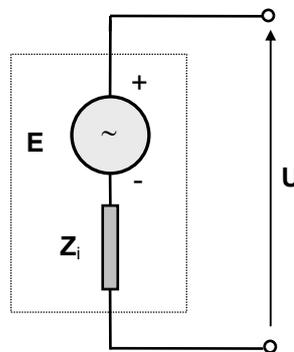


Figura 3.2 Esquema de una fuente de tensión real

Ya que constructivamente las tres bobinas son iguales sus valores máximos también lo serán.

Para la posición del rotor en el dibujo, el flujo concatenado en ese instante por la bobina u- x, vale cero y por lo tanto la fuerza electromotriz inducida tiene un valor máximo, que nos lleva a que los valores de las tensiones para ese instante serán:

$$U_{ux} = U \angle 90^\circ \quad U_{vy} = U \angle 330^\circ \quad U_{wz} = U \angle 210^\circ$$

En el diagrama de la figura 3.3, se pueden observar los diagramas de valores instantáneos de las tres tensiones y el diagrama fasorial correspondiente para el instante $t = 0$.

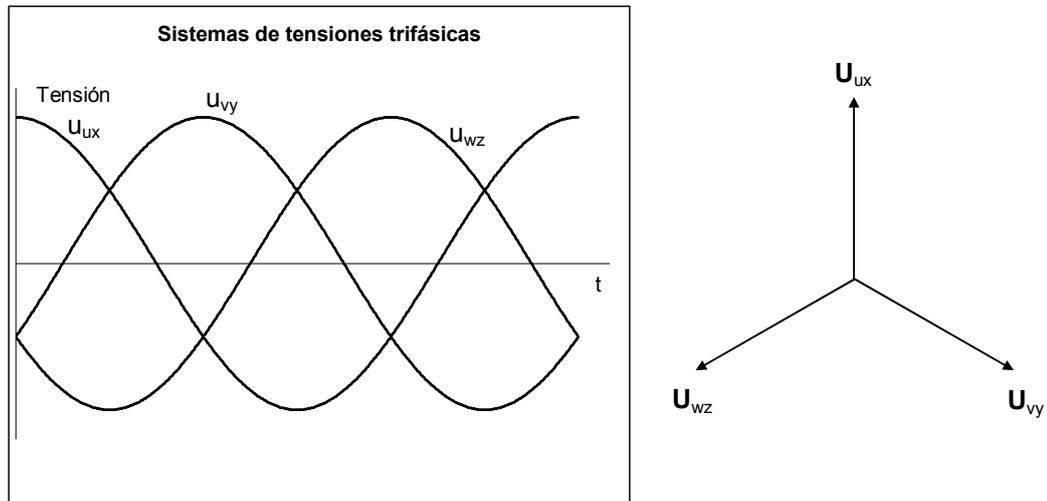


Figura 3.3 Valores instantáneos de las tensiones y su correspondiente diagrama fasorial

3.3 Ahorro producido por el uso de un sistema trifásico con respecto a tres sistemas monofásicos equivalentes

Analicemos el caso en el cual a cada una de las tensiones del generador estudiado le colocamos una carga, representada por una impedancia. En este caso estaríamos en la presencia de tres generadores monofásicos con sus correspondientes cargas, tal como se muestra en la figura 3.4.

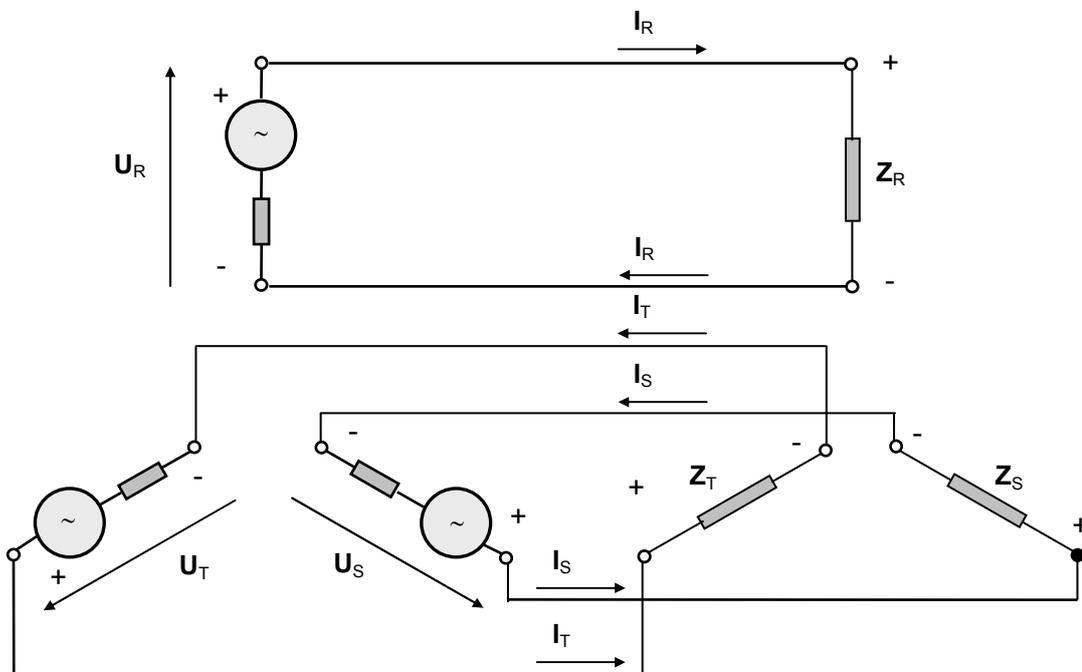


Figura 3.4 Esquema de alimentación de un generador trifásico a tres cargas

Siendo:

U_R la tensión de salida de una de las fases del generador cuyo valor para el instante analizado anteriormente es: $U \angle 90^\circ$ [V]

U_S la tensión de salida de la segunda fase: $U \angle 330^\circ$ [V]

U_T la tensión de salida de la tercera fase: $U \angle 210^\circ$ [V]

Z_R, Z_S y Z_T las impedancias de carga [Ω]

I_R, I_S e I_T las corrientes que circulan por las cargas correspondientes

Teniendo en cuenta en un primer análisis, que los conductores que unen el generador con las impedancias de carga son ideales (Impedancia cero), las corrientes estarán dadas por:

$$I_R = \frac{U_R}{Z_R} \quad I_S = \frac{U_S}{Z_S} \quad I_T = \frac{U_T}{Z_T}$$

Si en el esquema de la figura 3.4, unimos entre si tres terminales de las bobinas, y hacemos lo mismo con las tres impedancias tal como se observa en la figura 3.5, el esquema de tensiones y corrientes no se modifica.

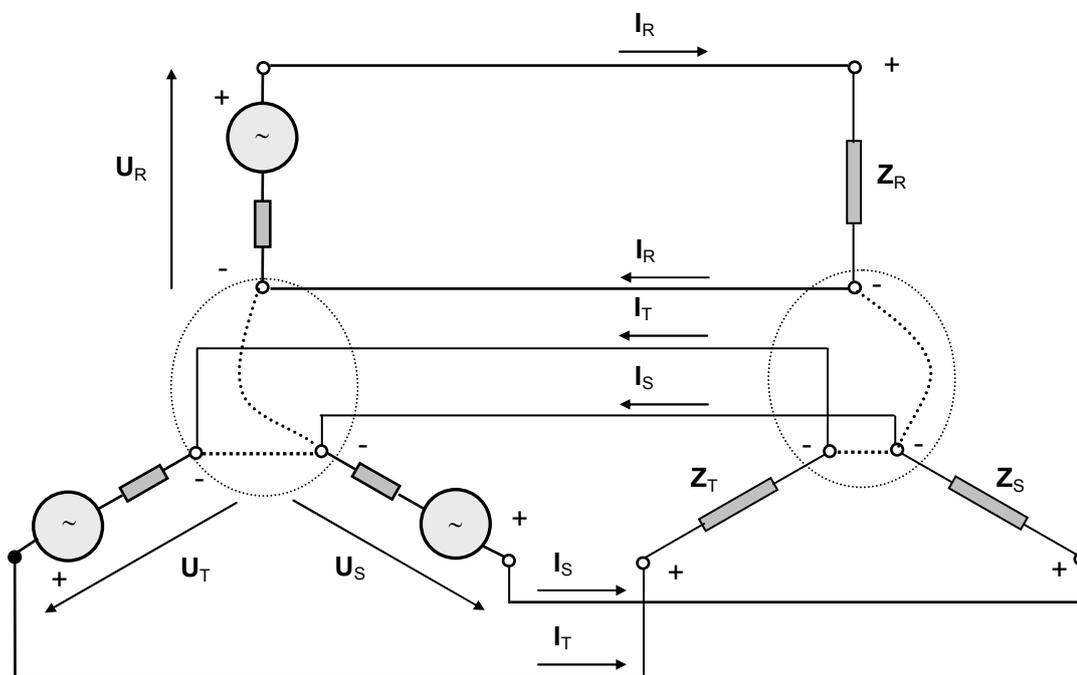
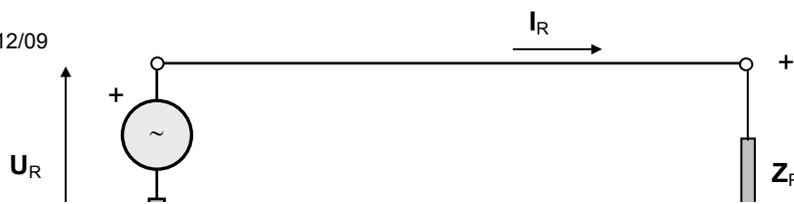


Figura 3.5 Esquema de alimentación de un generador trifásico a tres cargas modificación "a"

De esta forma hemos creado un nodo en donde concurren las tres tensiones del generador y otro al cual concurren las tres impedancias de carga, lo cual dibujado de otra manera el esquema es el de la figura 3.6



o

Figura 3.6 Esquema de alimentación de un generador trifásico a tres cargas modificación "b"

Del esquema anterior, tenemos que entre los nodos creados en el generador y en la carga, hay tres conductores en paralelo, los cuales los podemos reemplazar por uno sólo, por el cual circulará la suma de las tres corrientes tal como se muestra en la figura 5.7.

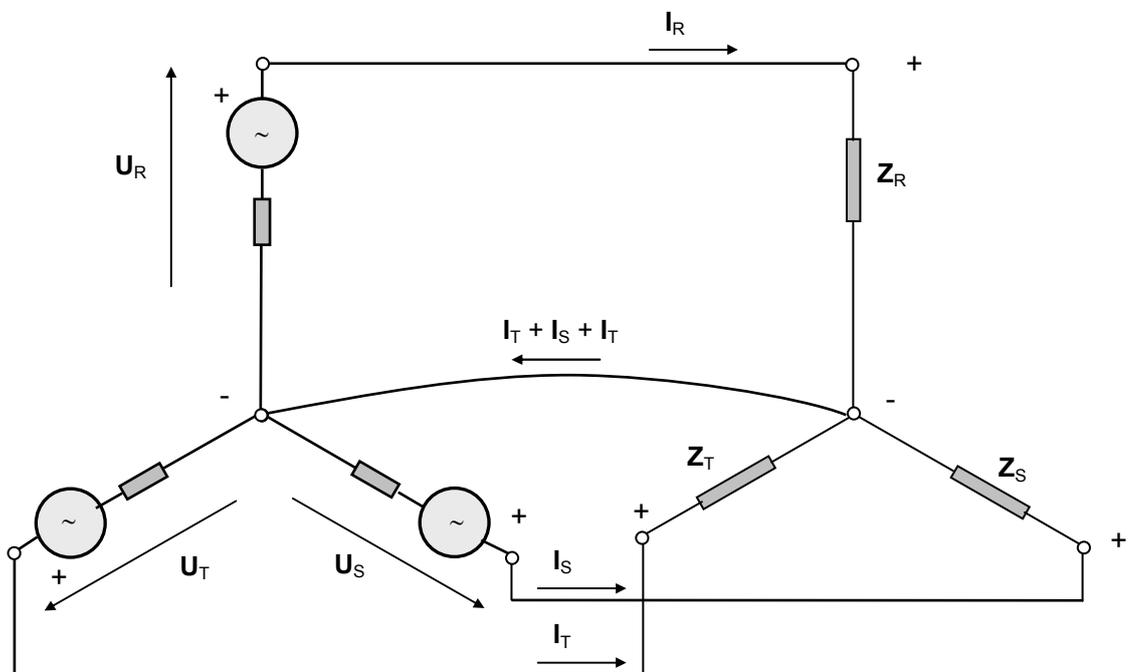


Figura 3.7 Esquema de alimentación de un generador trifásico a tres cargas modificación "c"

En el caso particular que las tres impedancias de carga sean iguales, o sea que:

$$Z_R = Z_S = Z_T = Z = Z \angle \varphi$$

La suma de las corrientes que pasa por el conductor que une los nodos analizados será:

$$I_R + I_S + I_T = \frac{U_R}{Z} + \frac{U_S}{Z} + \frac{U_T}{Z} = \frac{U_R + U_S + U_T}{Z}$$

$$I_R + I_S + I_T = \frac{U \angle 90^\circ + U \angle 330^\circ + U \angle 210^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{0}{Z \angle \varphi} = 0$$

Como vemos al ser las tres tensiones del generador del mismo módulo, pero desfasadas entre si en 120 grados, su suma es igual a cero, lo cual nos lleva a que por el conductor analizado no circula corriente, por lo tanto en este caso particular se puede prescindir del mismo, lo cual nos lleva a que con solo tres conductores podemos alimentar un sistema trifásico de impedancias (La mitad de lo que necesitaríamos con tres sistemas monofásicos equivalentes).

En la práctica las tres impedancia no son exactamente iguales, pero se trata de lograr dicho efecto, repartiendo la gran cantidad de usuarios en las distintas fases, en forma lo más equilibrada posible.

Esto hace que no se prescinda de dicho conductor, pero su sección es menor que la de los otros tres, ya que la corriente que transporta es más pequeña que las otras.

3.4 Conexión en estrella y triángulo

Generador

Las tres bobinas pueden ser unidas formando una conexión en estrella ó en triángulo.

Uniendo en un punto común los tres principios o finales de las bobinas, obtenemos una conexión estrella, llamando a este "centro de estrella" ó "neutro" y lo designaremos con la letra "O".

Cada uno de los arrollamientos se llama "fase del generador".

Podemos entonces representar un generador trifásico en estrella como la unión en un punto común de tres generadores monofásicos cuyas tensiones están desfasadas 120°, según se observa en la figura 3.8. Los principios de los arrollamientos se conectan a la línea de alimentación de las cargas.

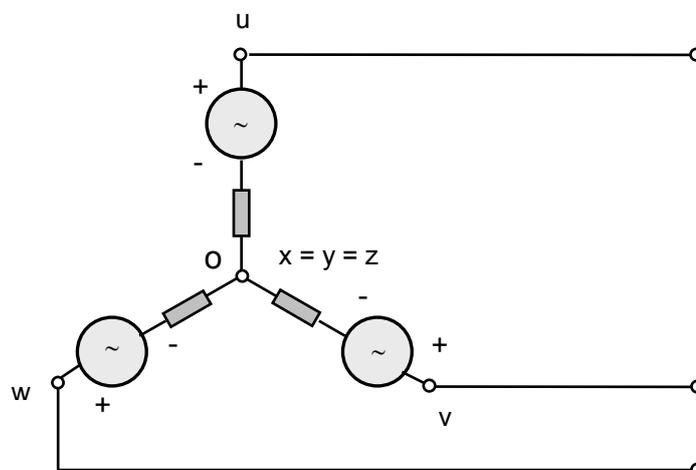


Figura 3.8 Esquema de tres generadores monofásicos conectados en estrella

En la conexión triángulo, los arrollamientos de fase se conectan en serie uniendo el

principio de uno con el final del otro, tal como se muestra en la figura 3.9.

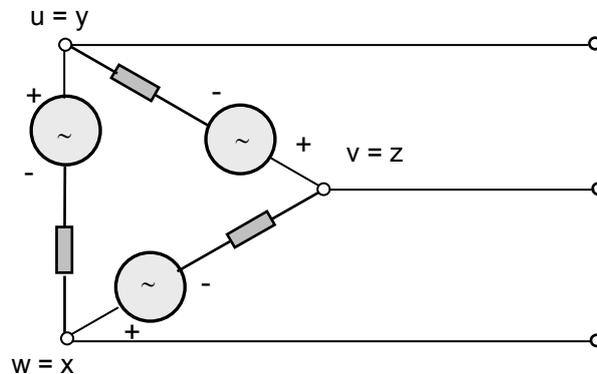


Figura 3.9 Esquema de tres generadores monofásicos conectados en triángulo

El punto común de los arrollamientos se conecta a las líneas de alimentación.

Receptor

El receptor para este tipo de generador está compuesto por un sistema de tres cargas, que las representamos por sus impedancias equivalentes que son las fase del receptor, las cuales se pueden unir de forma tal de quedar conectadas en conexión estrella ó triángulo.

Identificaremos al punto común de las cargas conectadas en estrella con la letra "O".

La forma de conexión del generador y del receptor son independientes, por lo que se puede utilizar cualquier variante.

La unión entre el generador y el receptor se efectúa con conductores que llamaremos "Líneas".

Si el generador y el receptor están conectados en estrella, el conductor que une ambos centros de estrella se llama "neutro".

3.5 Tensiones y corrientes. Definición.

Las tensiones en las fases del generador y del receptor las llamaremos **tensiones de fase** (U_F), y sus corrientes, **corrientes de fase** (I_F).

Las tensiones entre líneas, se llaman **tensiones de línea** (U_L) y las corrientes por ellas serán **corrientes de línea** (I_L), siendo la tensión entre una línea y el neutro la tensión de fase.

Por lo tanto en una conexión estrella, las tensiones de fase y las de línea son distintas, en cambio las corrientes de fase y las de línea son iguales, como se muestra en la figura 3.10.

En una conexión triángulo, las tensiones de fase y de línea son iguales y las corrientes de fase y de línea son distintas, según se ve en la figura 3.11.

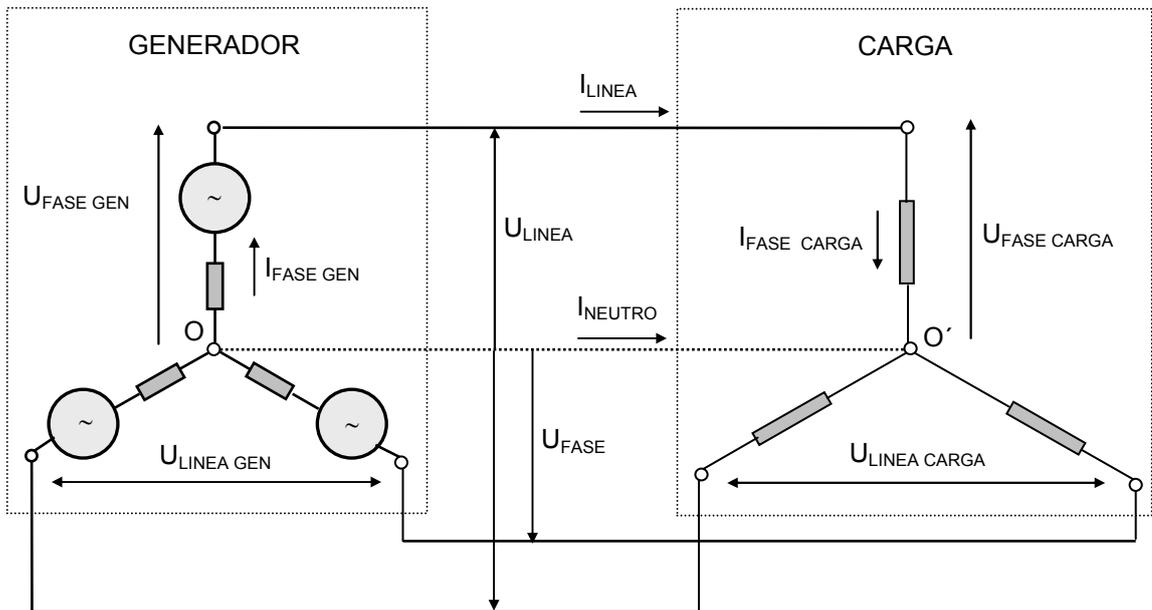


Figura 3.10 Tensiones y corrientes en conexión estrella en el receptor

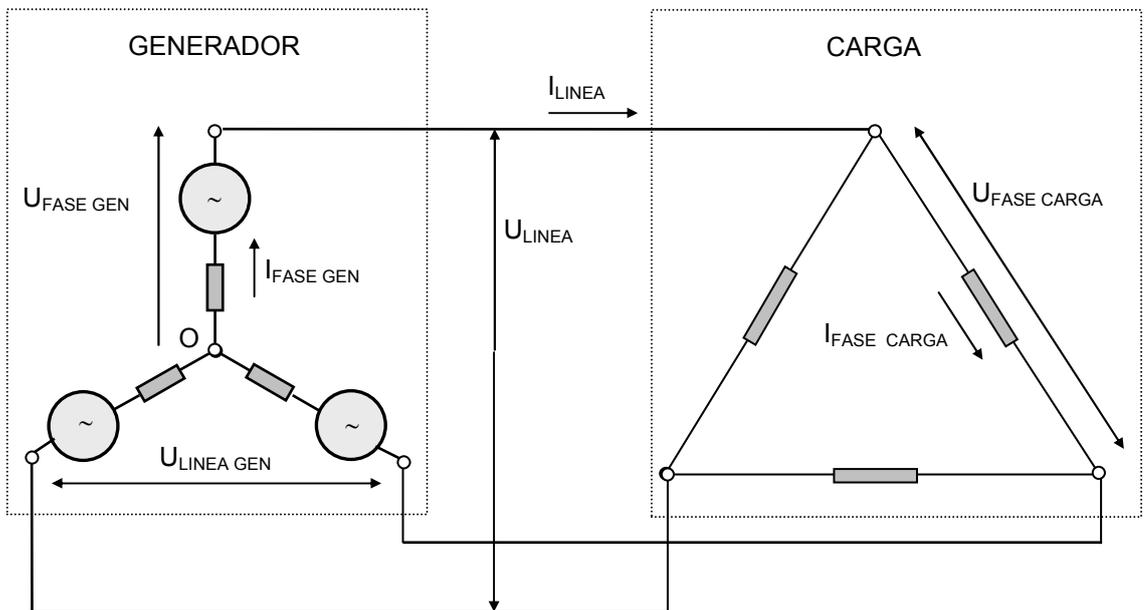


Figura 3.11 Tensiones y corrientes en conexión triángulo en el receptor

3.5 Denominación de las redes

Los conductores alimentadores en las redes trifásicas, se los designa con las siguientes letras:

R - S - T para los conductores de fase y O para el conductor neutro.

De acuerdo a esta denominación tendremos:

$U_{RO} - U_{SO} - U_{TO}$	Tensiones de fase del generador
$U_{RO'} - U_{SO'} - U_{TO'}$	Tensiones de fase del receptor ó carga
$U_{O'O}$	Tensión entre el centro de estrella del generador y el centro de estrella de la carga o tensión de corrimiento de neutro.
$U_{RS} - U_{TR} - U_{ST}$	Tensiones de línea.
$I_R - I_S - I_T$	Corrientes de línea
I_O	Corriente de neutro

3.7 Generador perfecto

El generador que hemos analizado produce en cada fase una fuerza electromotriz senoidal, de igual módulo y desfasadas entre si 120° en el tiempo, cumpliéndose además que la suma de las mismas es igual a cero en cualquier instante. El generador que cumple estas características se lo llama **generador perfecto**.

3.8 Secuencia

Hemos representado los diagramas fasoriales de tensiones girando en sentido antihorario. El orden en el cual aparecen los fasores se llama "**secuencia**", siendo "positiva" o directa (derecha), cuando el orden de aparición de los fasores es: $U_{RO} - U_{SO} - U_{TO}$ (R - S - T). Si en cambio los fasores se suceden en el orden : $U_{RO} - U_{TO} - U_{SO}$ (R - T - S) la secuencia se llama negativa ó inversa. En los diagramas de la figura 3.12 se muestran ambos casos.

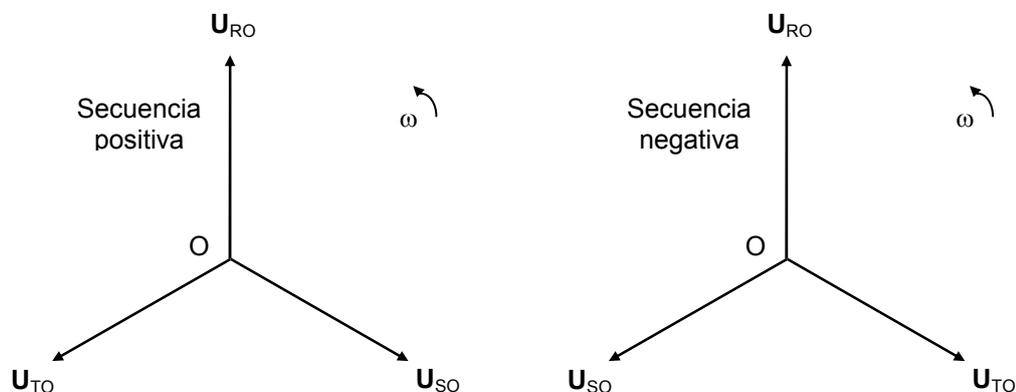


Figura 3.12 Secuencias

Podemos pasar de una secuencia a otra, mediante la transposición de dos fases cualesquiera y de acuerdo al esquema de la figura 3.13.

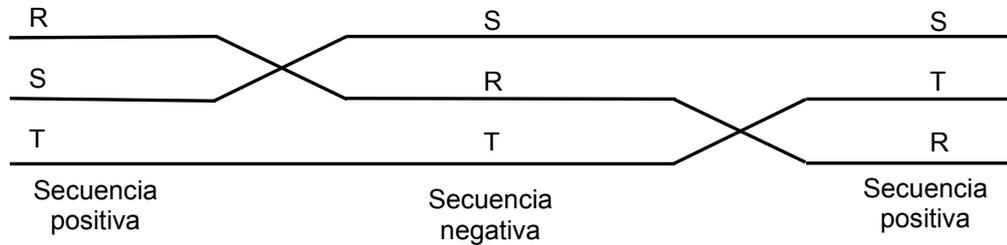


Figura 3.13 Cambios en las secuencias

3.9 Relación entre tensiones de sistemas perfectos

Sea el esquema equivalente de un generador de tensiones trifásicas como el de la figura 3.14, en el cual se indican las tensiones de fase y de línea con su sentido de acuerdo a la convención vista.

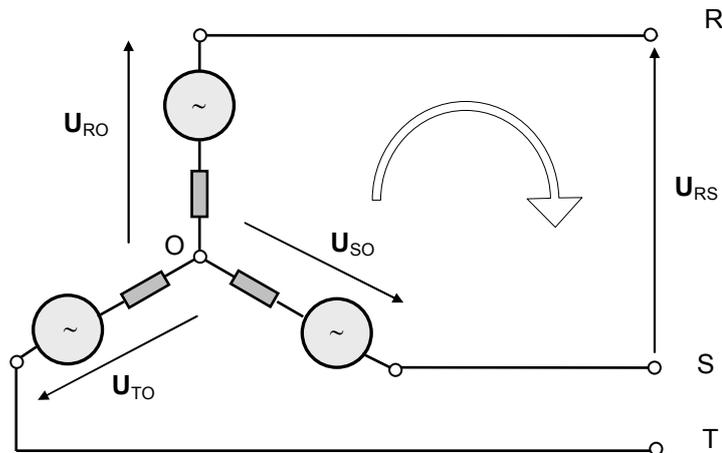


Figura 3.14 Esquema equivalente de un generador de tensiones trifásico

Si tomamos la tensión de línea U_{RS} y hacemos una circulación en la malla que contiene a U_{RO} y U_{SO} , de acuerdo a la segunda Ley de Kirchhoff:

$$U_{SO} - U_{RO} + U_{RS} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{RS} = U_{RO} - U_{SO}$$

$$\text{Como: } U_{RO} = U_F \angle 90^\circ \quad U_{SO} = U_F \angle 330^\circ$$

$$\text{Nos queda: } U_{RS} = U_F \angle 90^\circ - U_F \angle 330^\circ$$

$$U_{RS} = jU_F - \frac{\sqrt{3}}{2}U_F + j\frac{1}{2}U_F = U_F(-0,866 + j1,50) = \sqrt{3}U_F \angle 120^\circ$$

Análogamente para las otras tensiones de línea nos queda:

$$\mathbf{U}_{TR} = \mathbf{U}_{TO} - \mathbf{U}_{RO} = \sqrt{3} U_F \angle 240^\circ$$

$$\mathbf{U}_{ST} = \mathbf{U}_{SO} - \mathbf{U}_{TO} = \sqrt{3} U_F \angle 0^\circ$$

De aquí podemos observar que el módulo de las tensiones de línea y las de fase, cuando el sistema es perfecto, se relacionan por:

$$U_L = \sqrt{3} U_F$$

3.10 Receptor conectado en estrella

Receptor equilibrado con conductor neutro

En la figura 3.15 se ha esquematisado un generador y un conjunto de cargas trifásico

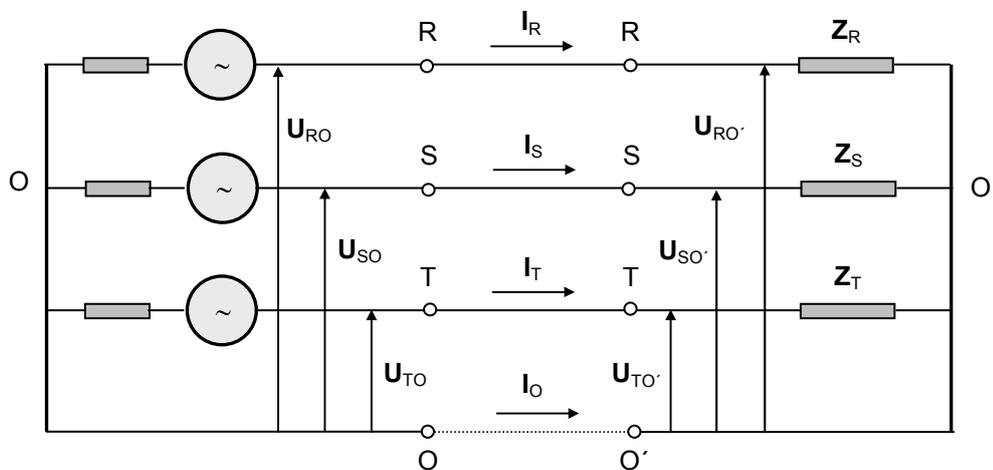


Figura 3.15 Generador trifásico alimentando un conjunto de cargas conectadas en estrella

En este caso las impedancias de carga son iguales, y para nuestro análisis supondremos las mismas de características óhmico inductivas.

$$\mathbf{Z}_R = \mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}_T = \mathbf{Z} = Z \angle \varphi$$

Dada la unión de los centros de estrella del generador y del receptor, las tensiones de ambos son iguales.

$$\mathbf{U}_{RO'} = \mathbf{U}_{RO}$$

$$\mathbf{U}_{SO'} = \mathbf{U}_{SO}$$

$$\mathbf{U}_{TO'} = \mathbf{U}_{TO}$$

Las corrientes serán:

$$I_R = \frac{U_{RO'}}{Z_R} = \frac{U_{RO}}{Z} = \frac{U_F \angle 90^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{U_F}{Z} \angle 90^\circ - \varphi$$

$$I_S = \frac{U_{SO'}}{Z_S} = \frac{U_{SO}}{Z} = \frac{U_F \angle 330^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{U_F}{Z} \angle 330^\circ - \varphi$$

$$I_T = \frac{U_{TO'}}{Z_T} = \frac{U_{TO}}{Z} = \frac{U_F \angle 210^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{U_F}{Z} \angle 210^\circ - \varphi$$

Las corrientes tienen igual módulo y desfasadas 120° una de la otra y atrasadas un ángulo “φ” respecto de sus tensiones de fase respectivas, siendo el fasorial correspondiente similar al de la figura 3.16.

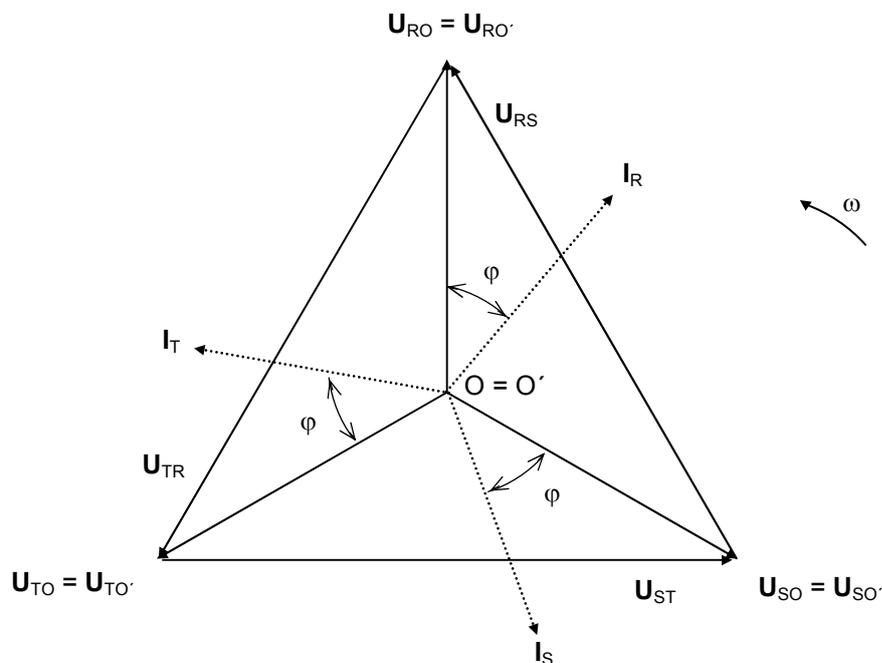


Figura 3.16 Diagrama fasorial para un sistema de cargas óhmico - inductivas

En O' se cumple: $I_R + I_S + I_T + I_0 = 0$

$$I_R + I_S + I_T = \frac{(U_{RO} + U_{SO} + U_{TO})}{Z} = 0$$

Luego: $I_0 = 0$

De aquí surge que en el caso de tener carga equilibrada, la corriente por el conductor neutro es cero, lo cual lleva a que se pueda prescindir del mismo.

Analicemos las ventajas que tienen las redes trifásicas sobre las monofásicas:

- Para transmitir la misma potencia que tres sistemas monofásicos, se reduce la cantidad de conductores de 6 a 4 (Eventualmente 3), lo cual ya habíamos analizado.
- Hasta ahora habíamos adoptado que los conductores eran ideales, o sea sin impedancia, pero en realidad esta hace que la corriente que circula por los mismos produzcan una caída de tensión, lo cual nos lleva a que la tensión en la fuente y en la carga sean distintas.
Esta diferencia de tensiones tiene un valor máximo que está normalizado (5% para el caso de fuerza motriz), cuyo valor no debe ser excedido y en función de eso surge la sección mínima de los conductores a utilizar,
Para el cálculo de la caída de tensión en un sistema monofásico, debemos tener en cuenta que la distancia entre el generador y la carga se toma dos veces, de acuerdo a lo esquematizado en la figura 3.17.

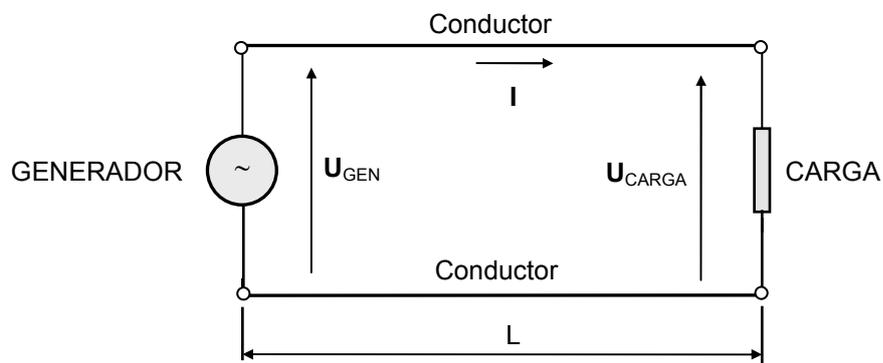


Figura 3.17 Alimentación de un carga monofásica

La diferencia de tensión entre el generador y la carga se llama caída de tensión, la cual tiene el siguiente valor (Despreciando la reactancia del conductor):

$$\Delta U = R \cdot I \cdot \cos \varphi \qquad R = 2 \cdot \rho \cdot \frac{L}{S} \qquad \Delta U = 2 \cdot \rho \cdot L \cdot \frac{I}{S} \cdot \cos \varphi$$

Donde: ΔU = Tensión en bornes del generador - Tensión sobre la carga

R: Resistencia óhmica del conductor alimentador [Ω]

ρ : Resistividad del material del conductor (Cobre, Aluminio)
[$\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$]

S: Sección del conductor en mm^2

L: Distancia entre el generador y la carga en m

φ : Angulo de desfasaje de la carga

En cambio en un sistema trifásico equilibrado por el conductor neutro no circula corriente, con lo que la caída de tensión se produce solo en la fase, lo que hace que la caída de tensión sea la mitad que en el caso de un sistema monofásico.

Si mantenemos la misma caída de tensión en ambos casos, los conductores de un sistema trifásico podrán tener la mitad de la sección, con el consiguiente ahorro de los mismos.

En la práctica existe un pequeño desequilibrio de las cargas lo que hace que por el neutro circule una corriente, la cual es pequeña y no invalida el análisis anterior.

Receptor desequilibrado con neutro

Al tener el neutro conectado los centros de estrella de la carga y del generador son coincidentes lo que hace que también lo sean las tensiones. Las corrientes serán entonces:

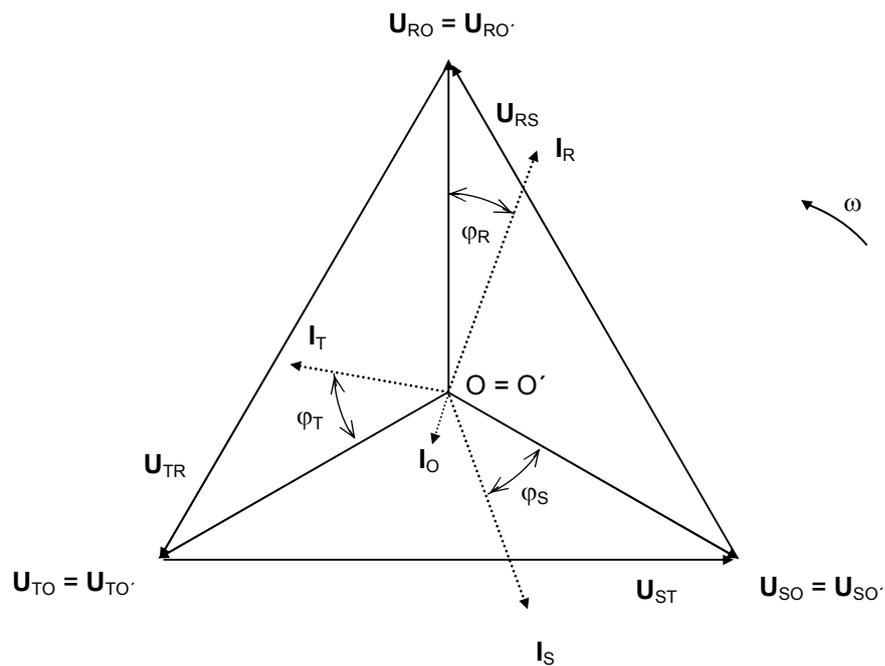
$$I_R = \frac{U_{RO'}}{Z_R} = \frac{U_{RO}}{Z_R} = \frac{U_F \angle 90^\circ}{Z_R \angle \varphi_R} = \frac{U_F}{Z_R} \angle 90^\circ - \varphi_R$$

$$I_S = \frac{U_{SO'}}{Z_S} = \frac{U_{SO}}{Z_S} = \frac{U_F \angle 330^\circ}{Z_S \angle \varphi_S} = \frac{U_F}{Z_S} \angle 330^\circ - \varphi_S$$

$$I_T = \frac{U_{TO'}}{Z_T} = \frac{U_{TO}}{Z_T} = \frac{U_F \angle 210^\circ}{Z_T \angle \varphi_T} = \frac{U_F}{Z_T} \angle 210^\circ - \varphi_T$$

$$I_O = -(I_R + I_S + I_T)$$

El diagrama fasorial correspondiente es el de la figura 3.18.



3.18 Diagrama fasorial para un sistema de cargas desequilibrado

Receptor desequilibrado sin neutro

En la figura 3.19, está esquematizado un sistema de cargas trifásico desequilibrado sin la unión entre los centros de estrella del generador y la carga

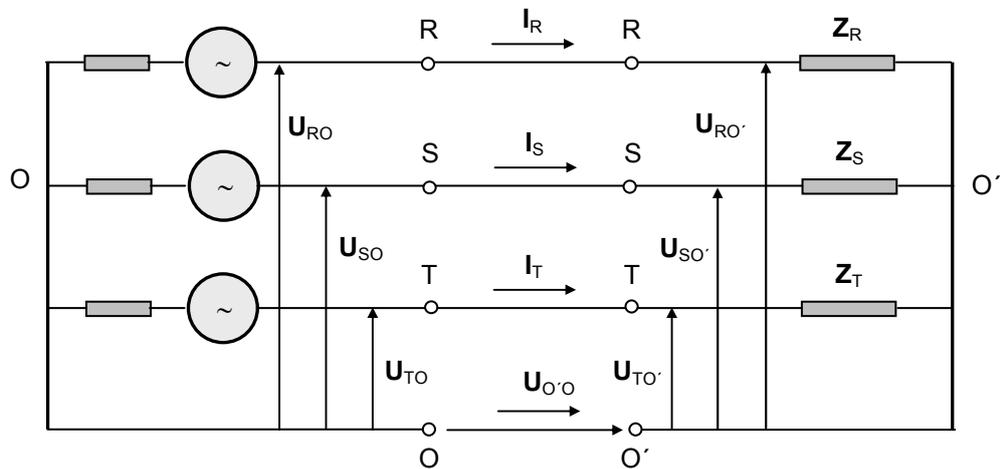


Figura 3.19 Alimentación de un sistema de cargas desequilibrado sin neutro

Al no estar conectado el conductor neutro, las tensiones sobre la carga deberán ser tales que se cumpla:

$$I_R + I_S + I_T = 0$$

Si hacemos un recorrido en el sentido horario en las tres mallas que se forman, teniendo la rama del neutro en común, se cumple:

$$-U_{RO} + U_{RO'} + U_{O'O} = 0 \quad U_{RO'} = U_{RO} - U_{O'O}$$

$$-U_{SO} + U_{SO'} + U_{O'O} = 0 \quad U_{SO'} = U_{SO} - U_{O'O}$$

$$-U_{TO} + U_{TO'} + U_{O'O} = 0 \quad U_{TO'} = U_{TO} - U_{O'O}$$

Las corrientes sobre la carga son:

$$I_R = \frac{U_{RO'}}{Z_R} = U_{RO'} \cdot Y_R \quad Y_R = \frac{1}{Z_R}$$

$$I_S = \frac{U_{SO'}}{Z_S} = U_{SO'} \cdot Y_S \quad Y_S = \frac{1}{Z_S}$$

$$I_T = \frac{U_{TO'}}{Z_T} = U_{TO'} \cdot Y_T \quad Y_T = \frac{1}{Z_T}$$

Reemplazando:

$$I_R = (U_{RO} - U_{O'O}) \cdot Y_R \quad I_S = (U_{SO} - U_{O'O}) \cdot Y_S \quad I_T = (U_{TO} - U_{O'O}) \cdot Y_T$$

Sumando las tres corrientes e igualando a cero:

$$(U_{RO} - U_{O'O}) \cdot Y_R + (U_{SO} - U_{O'O}) \cdot Y_S + (U_{TO} - U_{O'O}) \cdot Y_T = 0$$

Sacando factor común:

$$U_{RO} \cdot Y_R + U_{SO} \cdot Y_S + U_{TO} \cdot Y_T - U_{O'O} (Y_R + Y_S + Y_T) = 0$$

$$U_{O'O} = \frac{U_{RO} \cdot Y_R + U_{SO} \cdot Y_S + U_{TO} \cdot Y_T}{Y_R + Y_S + Y_T}$$

Esta es la diferencia de potencial entre los centros de estrella del generador y el receptor, con la cual podemos calcular las tensiones sobre cada carga y consecuentemente sus corrientes respectivas. El diagrama fasorial de un sistema trifilar con cargas desequilibradas es el de la figura 3.20.

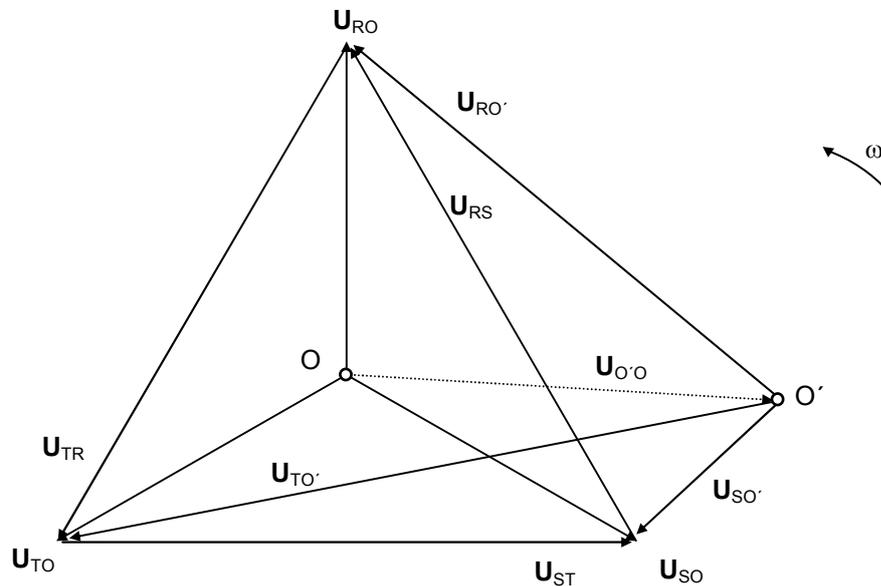


Figura 3.20 Diagrama fasorial de un sistema desequilibrado sin neutro

3.11 Receptor conectado en triángulo

Receptor equilibrado

La figura 3.21 nos muestra un sistema trifásico de cargas equilibradas conectadas en triángulo:

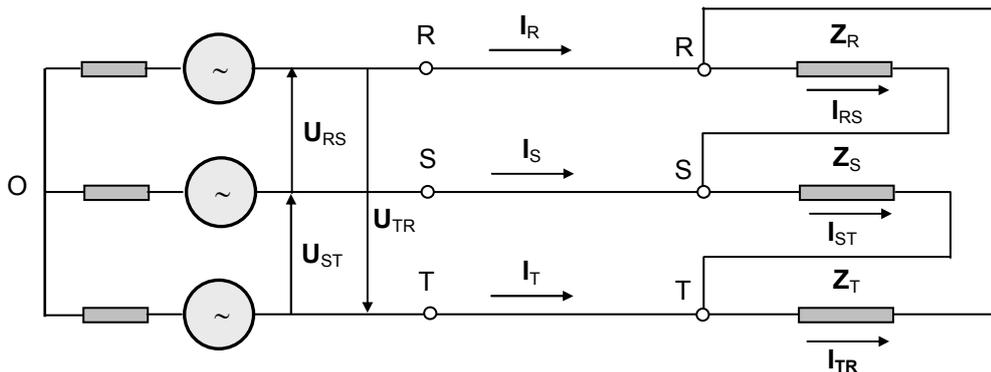


Figura 3.21 Diagrama de cargas equilibradas conectadas en triángulo

En este caso las impedancias de carga son iguales o sea:

$$Z_{RS} = Z_{ST} = Z_{TR} = Z = Z \angle \varphi$$

Las tensiones de fase sobre las impedancias concuerdan con las tensiones de línea, debido al tipo de conexión de las mismas. El diagrama fasorial de tensiones se muestra en la figura 5.22.

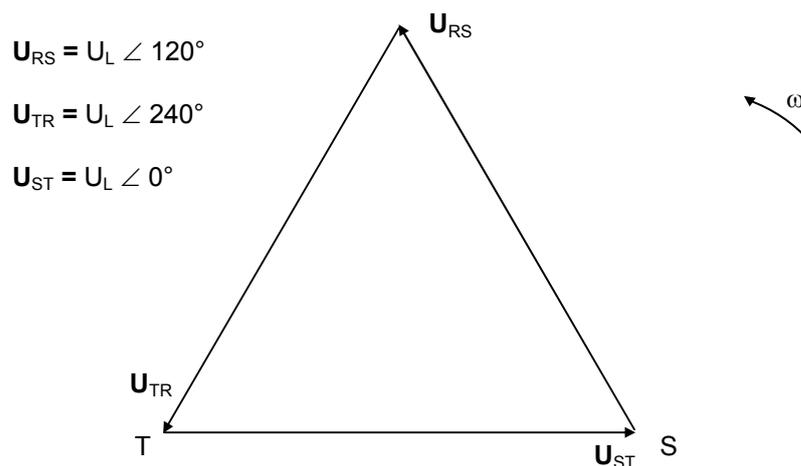


Figura 3.22: Diagrama fasorial de tensiones en una carga en triángulo

Por lo tanto las corrientes en cada fase serán, en concordancia con el diagrama fasorial de la figura 3.22:

$$I_{RS} = \frac{U_{RS}}{Z_{RS}} = \frac{U_L \angle 120^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{U_L}{Z} \angle 120^\circ - \varphi$$

$$I_{ST} = \frac{U_{ST}}{Z_{ST}} = \frac{U_L \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{U_L}{Z} \angle 0^\circ - \varphi$$

$$I_{TR} = \frac{U_{TR}}{Z_{TR}} = \frac{U_L \angle 240^\circ}{Z \angle \varphi} = \frac{U_L}{Z} \angle 240^\circ - \varphi$$

Las corrientes de línea surgen de aplicar la primera ley de Kirchoff en cada nodo:

$$I_R = I_{RS} - I_{TR} \qquad I_S = I_{ST} - I_{RS} \qquad I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

Dado que las corrientes de fase son iguales en módulo y desfasadas entre sí 120° , la relación entre estas y las corrientes de línea en lo que a módulo se refiere está dado por:

$$I_L = \sqrt{3} I_F$$

Receptor desequilibrado

En este caso las impedancias de la carga son distintas, siendo el procedimiento para hallar el valor de las corrientes similar al caso equilibrado, ya que las tensiones de fase de la carga y las de línea son coincidentes.

$$Z_{RS} = Z_{RS} \angle \varphi_{RS} \qquad Z_{ST} = Z_{ST} \angle \varphi_{ST} \qquad Z_{TR} = Z_{TR} \angle \varphi_{TR}$$

$$I_{RS} = \frac{U_{RS}}{Z_{RS}} = \frac{U_L \angle 120^\circ}{Z_{RS} \angle \varphi_{RS}} = \frac{U_L}{Z_{RS}} \angle 120^\circ - \varphi_{RS}$$

$$I_{ST} = \frac{U_{ST}}{Z_{ST}} = \frac{U_L \angle 0^\circ}{Z_{ST} \angle \varphi_{ST}} = \frac{U_L}{Z_{ST}} \angle 0^\circ - \varphi_{ST}$$

$$I_{TR} = \frac{U_{TR}}{Z_{TR}} = \frac{U_L \angle 240^\circ}{Z_{TR} \angle \varphi_{TR}} = \frac{U_L}{Z_{TR}} \angle 240^\circ - \varphi_{TR}$$

Las corrientes de línea se obtienen haciendo la sumatoria de corrientes en cada nodo:

$$I_R = I_{RS} - I_{TR} \qquad I_S = I_{ST} - I_{RS} \qquad I_T = I_{TR} - I_{ST}$$

3.12 Potencia en sistemas trifásicos

La potencia total en un sistema polifásico se obtiene como la suma de las potencias de cada una de las fases, teniendo en cuenta la característica de las mismas.

3.12.1 Receptor en estrella

Sea un sistema de cargas conectadas en estrella como se muestra en la figura 6.1.

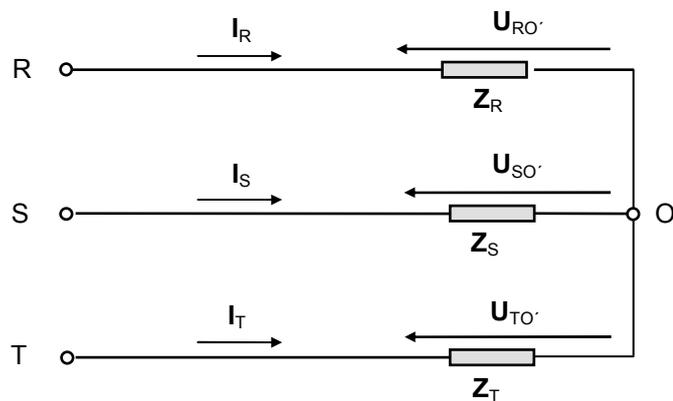


Figura 3.23 Sistema de cargas conectadas en estrella

La potencia activa de un sistema trifásico, es la suma de las potencias activas en cada fase:

$$P_{\text{TRIF}} = P_R + P_S + P_T$$

$$P_{\text{TRIF}} = U_{RO'} I_R \cos \varphi_R + U_{SO'} I_S \cos \varphi_S + U_{TO'} I_T \cos \varphi_T$$

La potencia reactiva de un sistema trifásico, es la suma de las potencias reactivas de cada fase, teniendo en cuenta el origen de las mismas y llevando el signo de acuerdo a la convención adoptada.

$$Q_{\text{TRIF}} = Q_R + Q_S + Q_T$$

$$Q_{\text{TRIF}} = U_{RO'} I_R \sin \varphi_R + U_{SO'} I_S \sin \varphi_S + U_{TO'} I_T \sin \varphi_T$$

La potencia aparente estará dada por:

$$S_{\text{TRIF}} = P_{\text{TRIF}} \pm jQ_{\text{TRIF}} \quad S_{\text{TRIF}} = \sqrt{P_{\text{TRIF}}^2 + Q_{\text{TRIF}}^2}$$

En el caso particular de que el receptor sea equilibrado, se cumple:

$$|U_{RO'}| = |U_{SO'}| = |U_{TO'}| = U_F$$

$$|I_R| = |I_S| = |I_T| = I_L$$

$$\varphi_R = \varphi_S = \varphi_T$$

$$U_L = \sqrt{3} U_F \quad I_L = I_F \quad (\text{La corriente de línea coincide con la corriente de fase})$$

Con lo cual nos queda:

$$P_{\text{TRIF.}} = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

$$Q_{\text{TRIF.}} = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi$$

$$S_{\text{TRIF.}} = 3 \cdot U_F \cdot I_F = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

3.13 Receptor en triángulo

En la figura 3.24 se observa un sistema de cargas conectadas en triángulo.

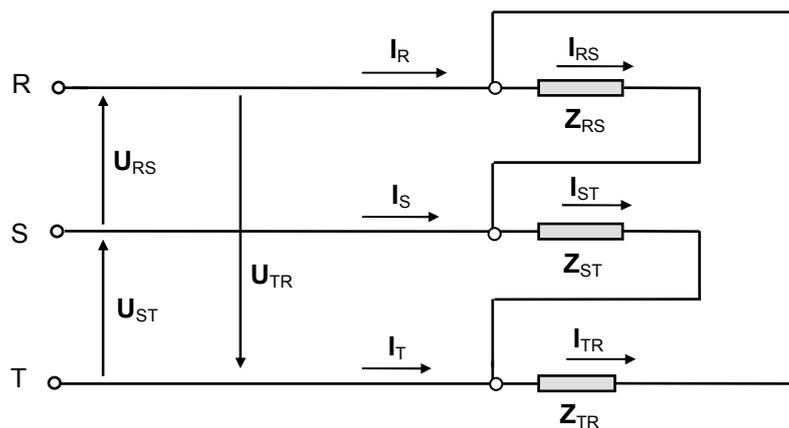


Figura 3.24 Sistema de cargas conectadas en triángulo

En forma análoga que en la conexión estrella:

$$P_{\text{TRIF}} = U_{RS} I_{RS} \cos \varphi_{RS} + U_{ST} I_{ST} \cos \varphi_{ST} + U_{TR} I_{TR} \cos \varphi_{TR}$$

$$Q_{\text{TRIF}} = U_{RS} I_{RS} \sin \varphi_{RS} + U_{ST} I_{ST} \sin \varphi_{ST} + U_{TR} I_{TR} \sin \varphi_{TR}$$

$$S_{\text{TRIF.}} = P_{\text{TRIF}} \pm j Q_{\text{TRIF.}} \quad S_{\text{TRIF.}} = \sqrt{P_{\text{TRIF.}}^2 + Q_{\text{TRIF.}}^2}$$

En el caso de tener el receptor equilibrado:

$$|U_{RS}| = |U_{ST}| = |U_{TR}| = U_F$$

$$| I_{RS} | = | I_{ST} | = | I_{TR} | = I_F$$

$$\varphi_{RS} = \varphi_{ST} = \varphi_{TR}$$

$$U_L = U_F \text{ (La tensión de línea coincide con la tensión de fase) } \quad I_L = \sqrt{3} I_F$$

Luego nos queda:

$$P_{TRIF.} = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi$$

$$Q_{TRIF.} = 3 \cdot U_F \cdot I_F \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi$$

$$S_{TRIF.} = 3 \cdot U_F \cdot I_F = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

3.14 Potencia trifásica instantánea

Si el sistema generador y receptor es equilibrado, las tensiones de fase son iguales con un desfase de 120° eléctricos, lo mismo que las corrientes, por lo tanto la potencia instantánea en cada fase será:

$$p_R = u_{RO} \quad i_R = 2 U_{RO} I_R \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi)$$

$$p_S = u_{SO} \quad i_S = 2 U_{SO} I_S \sin (\omega t - 120^\circ) \sin (\omega t - 120^\circ - \varphi)$$

$$p_T = u_{TO} \quad i_T = 2 U_{TO} I_T \sin (\omega t - 240^\circ) \sin (\omega t - 240^\circ - \varphi)$$

Sumando las potencias instantáneas de cada fase y haciendo los cambios trigonométricos correspondientes nos queda:

$$p = p_R + p_S + p_T$$

$$p = [U_F I_F \cos \varphi - U_F I_F \cos 2\omega t \cos \varphi - U_F I_F \sin 2\omega t \sin \varphi] +$$

$$[U_F I_F \cos \varphi - U_F I_F \cos (2\omega t - 120^\circ) \cos \varphi - U_F I_F \sin (2\omega t - 120^\circ) \sin \varphi] +$$

$$[U_F I_F \cos \varphi - U_F I_F \cos (2\omega t + 120^\circ) \cos \varphi - U_F I_F \sin (2\omega t + 120^\circ) \sin \varphi]$$

Los segundos y tercer términos de cada corchete tienen un valor cero al sumarlos, con lo que la potencia instantánea en un sistema trifásico equilibrado es constante y su valor es:

$$p = 3 U_F I_F \cos \varphi$$

3.15 Mejoramiento del factor de potencia en redes trifásicas

En toda instalación eléctrica industrial de característica óhmica inductiva, el factor de potencia puede ser mejorado, mediante la instalación de capacitores en el sistema.

La ubicación de los mismos deberá ser analizada en cada caso en particular, en función de la operación de las distintas máquinas eléctricas que conforman la instalación

Dado que la conexión de los mismos puede realizarse agrupándolos en forma estrella ó triángulo, el valor de los mismos será diferente.

Analicemos una carga a la cual necesitamos compensar su potencia reactiva, de acuerdo

al esquema de la figura 3.25.

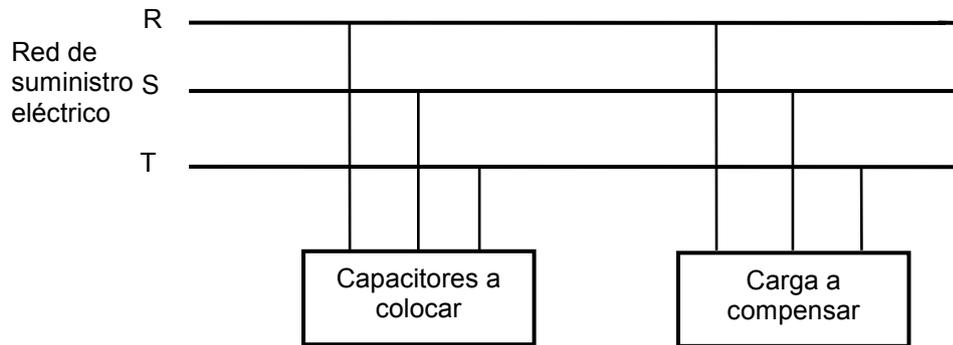


Figura 3.25 Esquema de conexión para efectuar compensación de potencia reactiva

Si la potencia reactiva a compensar es Q_L (Trifásica), en cada fase habrá que colocar un capacitor que compense la tercera parte de dicha potencia, con lo que la fórmula genérica estará dada de forma análoga que en el análisis que hicieramos para cargas monofásicas:

$$C = \frac{P (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_R)}{3 \omega U_F^2}$$

Siendo la tensión de fase que aparece en la expresión la tensión aplicada a cada capacitor. El valor de la capacidad obtenida es el que se debe colocar en cada una de las fases.

Capacitores conectados en estrella

En este caso la tensión que reciben los capacitores, es la tensión de fase del sistema.

Dado que el sistema es equilibrado, la relación de tensiones está dada por : $U_L = \sqrt{3} U_F$, luego el capacitor a colocar por cada fase tendrá el siguiente valor :

$$C = \frac{P (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_R)}{\omega U_L^2}$$

Capacitores conectados en triángulo

En este caso: $U_L = U_F$ por lo que nos queda:

$$C = \frac{P (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_R)}{3 \omega U_L^2}$$

La relación de capacidades de adoptar una forma de conexión u otra está dada por:

$$\frac{C_{\text{TRIANGULO}}}{C_{\text{ESTRELLA}}} = \frac{1}{3}$$

O sea que conectando los capacitores en triángulo, la capacidad de los mismos es tres veces menor que conectándolos en estrella. Se deberá tener en cuenta que en triángulo la tensión que deben soportar los mismos es 1,73 veces mayor que en estrella, pero la corriente es 1,73 veces menor.

3.16 Medición de potencia activa en sistemas trifásicos

En todo sistema trifásico podemos medir la potencia activa total mediante el empleo de un vatímetro en cada fase, midiendo la correspondiente tensión y corriente de fase. El esquema es el de la figura 3.26.

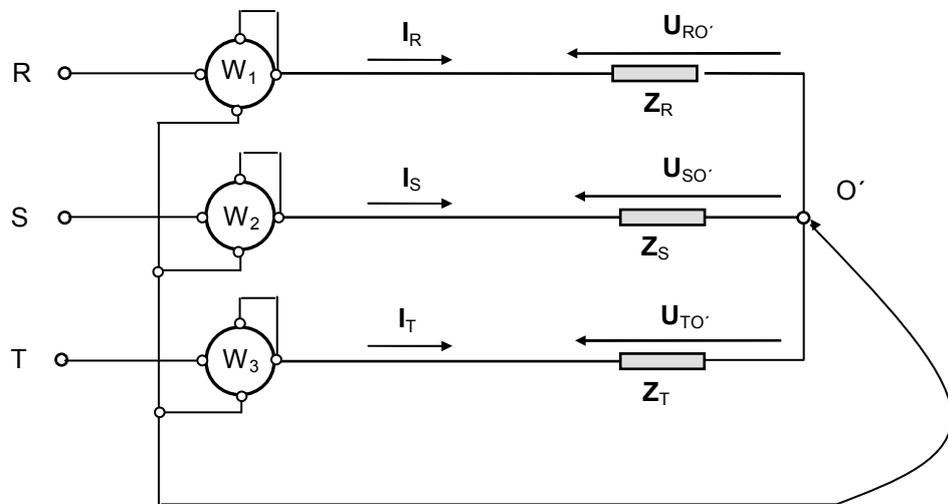


Figura 3.26 Medición de potencia en un sistema trifásico con tres vatímetros

Las tres bobinas voltimétricas de los vatímetros, se unen a un punto común, que es el centro de estrella del receptor "O".

$$P_{TRIF} = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W_1 = U_{RO'} I_R \cos \varphi_R = \mathbf{U}_{RO'} \cdot \mathbf{I}_R \quad (\text{Producto escalar de 2 vectores})$$

$$W_2 = U_{SO'} I_S \cos \varphi_S = \mathbf{U}_{SO'} \cdot \mathbf{I}_S$$

$$W_3 = U_{TO'} I_T \cos \varphi_T = \mathbf{U}_{TO'} \cdot \mathbf{I}_T$$

$$P_{TRIF} = \mathbf{U}_{RO'} \cdot \mathbf{I}_R + \mathbf{U}_{SO'} \cdot \mathbf{I}_S + \mathbf{U}_{TO'} \cdot \mathbf{I}_T$$

Si al punto común de las bobinas voltimétricas de los vatímetros, lo conectamos a un punto ficticio que denominaremos "O'", de acuerdo al esquema de la figura 3.27.

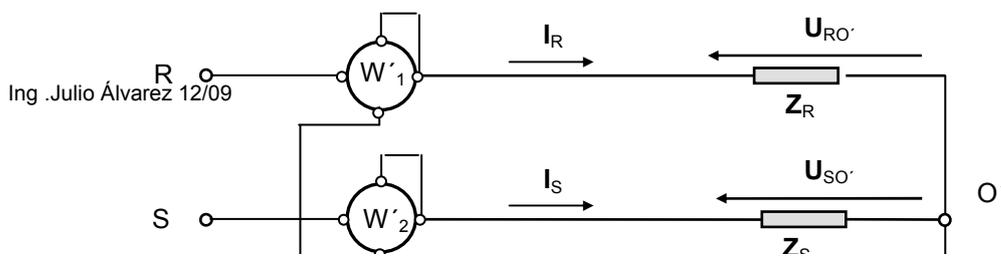


Figura 3.27 Medición de potencia en un sistema trifásico con tres vatímetros con su bobina voltimétrica conectada a un punto común "O''"

$$W'_1 = U_{RO''} I_R$$

$$W'_2 = U_{SO''} I_S$$

$$W'_3 = U_{TO''} I_T$$

El diagrama fasorial para ambas situaciones es el de la figura 3.28

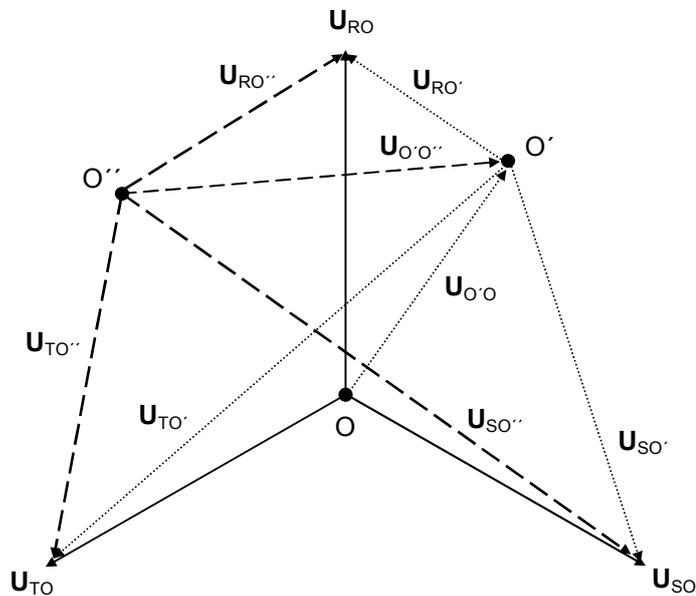


Figura 3.28 Diagrama fasorial de tensiones

Del diagrama fasorial se obtiene:

$$U_{RO''} = U_{O'O''} + U_{RO'}$$

$$U_{SO''} = U_{O'O''} + U_{SO'}$$

$$U_{TO''} = U_{O'O''} + U_{TO'}$$

Reemplazando la indicación de los vatímetros será:

$$W'_1 = U_{O'O''} I_R + U_{RO'} I_R$$

$$W'_2 = U_{O'O'} \cdot I_S + U_{SO'} \cdot I_S$$

$$W'_3 = U_{O'O'} \cdot I_T + U_{TO'} \cdot I_T$$

Si sumamos las indicaciones de los vatímetros queda:

$$W'_1 + W'_2 + W'_3 = U_{O'O'} \cdot I_R + U_{RO'} \cdot I_R + U_{O'O'} \cdot I_S + U_{SO'} \cdot I_S + U_{O'O'} \cdot I_T + U_{TO'} \cdot I_T$$

Sacando factor común :

$$W'_1 + W'_2 + W'_3 = U_{RO'} \cdot I_R + U_{SO'} \cdot I_S + U_{TO'} \cdot I_T + U_{O'O'} \cdot (I_R + I_S + I_T)$$

Ya que el sistema analizado no tiene conductor neutro, la suma de las corrientes en el nodo "O'" vale cero, con lo que nos queda:

$$W'_1 + W'_2 + W'_3 = U_{RO'} \cdot I_R + U_{SO'} \cdot I_S + U_{TO'} \cdot I_T$$

Se observa que la suma algebraica de las indicaciones de los vatímetros es la potencia trifásica del sistema, no dependiendo donde se conecta el punto común de las bobinas voltimétricas de los vatímetros.

Ahora bien, si el punto común lo elegimos de forma tal que sea, por ejemplo una de las fases, la bobina voltimétrica del vatímetro correspondiente tendrá una tensión nula y no dará indicación, lo cual nos permite medir la potencia trifásica del conjunto con dos vatímetros, ya que lo analizado sigue teniendo validez.

El esquema es el que se presenta en la figura 3.29.

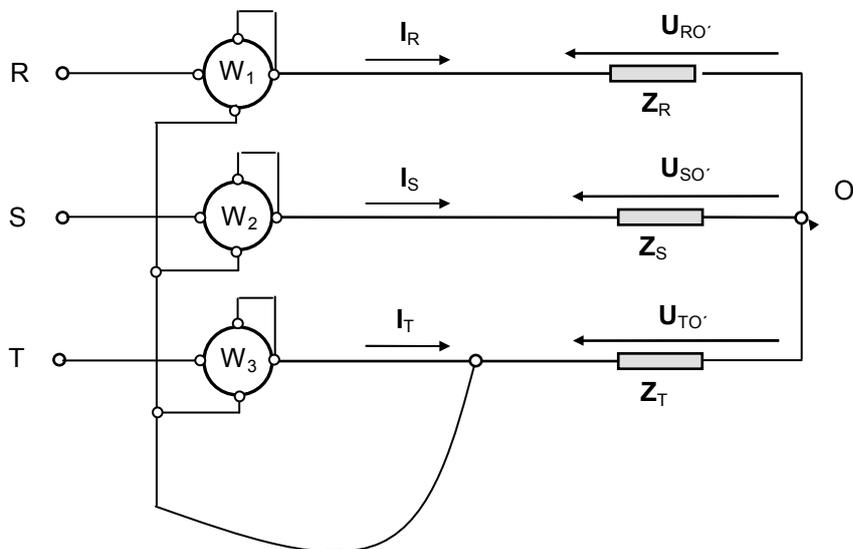


Figura 3.29 Medición de potencia en un sistema trifásico con tres vatímetros con el punto común de la bobina voltimétrica sobre una fase

En esta situación los vatímetros W_1 y W_2 , tienen aplicadas las correspondientes corrientes y tensiones de línea, no dependiendo de la forma en que estén conectadas las cargas.

Este forma de medir potencia en sistemas trifásicos en los cuales se utiliza $(n - 1)$ vatímetros, se lo conoce por el **Método de Arón**, siendo "n" el número de conductores del sistema (cuatro para sistemas con neutro y tres para sistemas con neutro aislado).

La potencia del sistema trifásico es la suma **algebraica** de las indicaciones de los vatímetros.

3.17 Receptor equilibrado

$$\varphi_{RT} = \varphi - 30^\circ$$

$$\varphi_{ST} = \varphi + 30^\circ$$

En el caso de tener secuencia negativa el diagrama fasorial correspondiente es el de la figura 3.32.

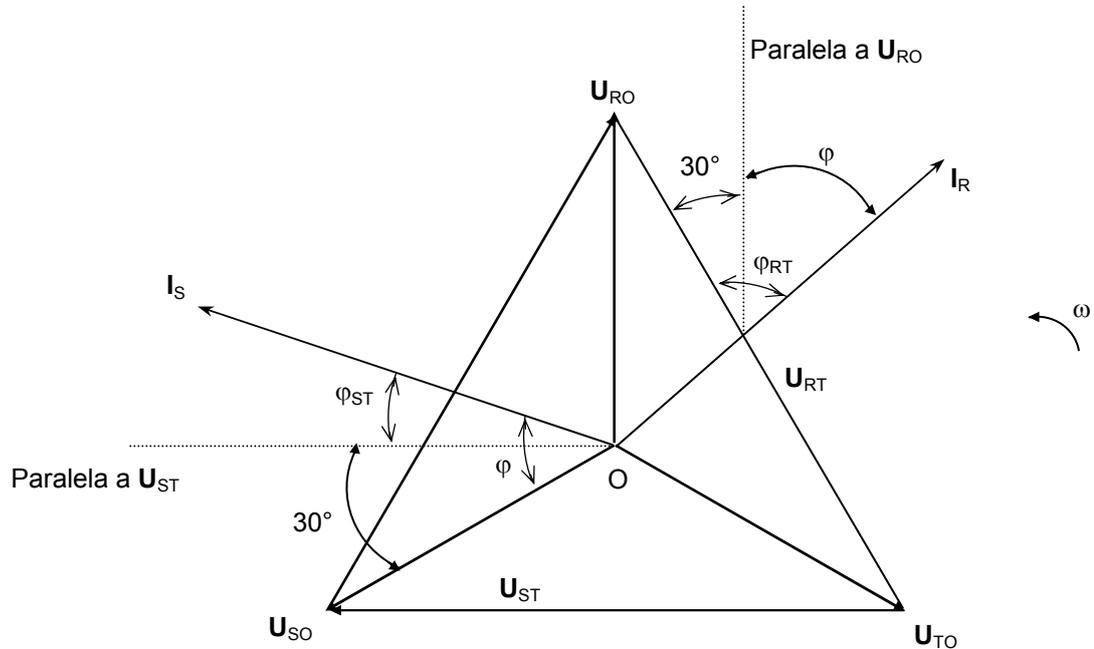


Figura 3.32 Diagrama fasorial para cargas equilibradas con secuencia negativa

En este caso se cumple que:

$$\varphi_{RT} = \varphi + 30^\circ$$

$$\varphi_{ST} = \varphi - 30^\circ$$

La expresión que nos da la potencia activa trifásica es:

$$P_{TRIF} = U_{RT} I_R \cos \varphi_{RT} + U_{ST} I_S \cos \varphi_{ST}$$

$$P_{TRIF} = U_{RT} I_R \cos (\varphi - 30^\circ) + U_{ST} I_S \cos (\varphi + 30^\circ) \text{ Para secuencia positiva}$$

$$P_{TRIF} = U_{RT} I_R \cos (\varphi + 30^\circ) + U_{ST} I_S \cos (\varphi - 30^\circ) \text{ Para secuencia negativa}$$

Graficaremos las indicaciones W_{RT} y W_{ST} , para distintos tipos de cargas, variables entre, capacitivas puras, óhmico-capacitivas, óhmico puro, óhmico-inductivo, e inductivo puro, de acuerdo a las siguientes expresiones:

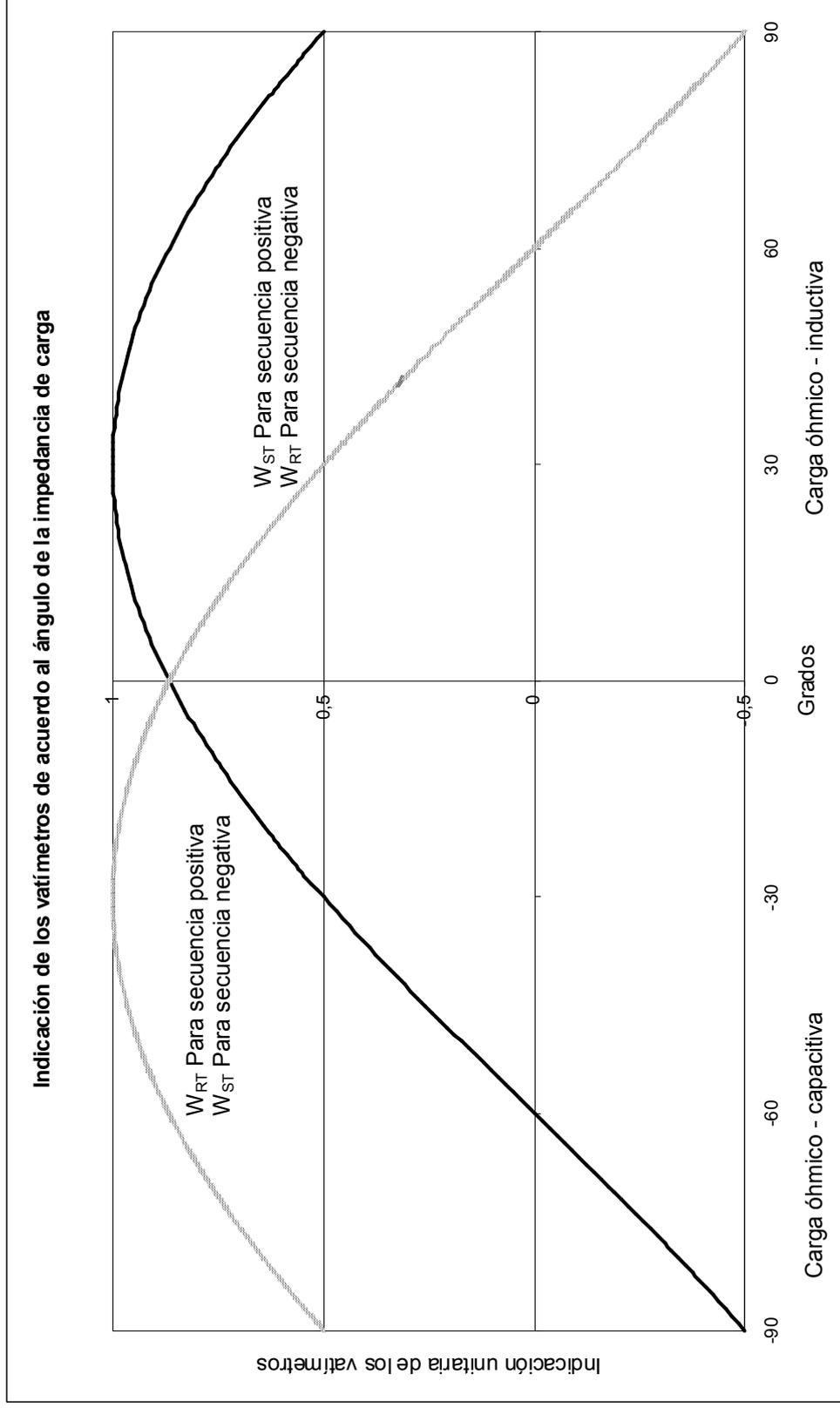
$$W_{RT} = U_L I_L \cos \varphi_{RT} = K \cos (\varphi - 30^\circ) \text{ Secuencia positiva}$$

$$W_{ST} = U_L I_L \cos \varphi_{ST} = K \cos (\varphi + 30^\circ) \text{ Secuencia positiva}$$

$$W_{RT} = U_L I_L \cos \varphi_{RT} = K \cos (\varphi + 30^\circ) \text{ Secuencia negativa}$$

$$W_{ST} = U_L I_L \cos \varphi_{ST} = K \cos (\varphi - 30^\circ) \text{ Secuencia negativa}$$

En el gráfico que se encuentra a continuación se han dibujado las curvas, con las indicaciones de los vatímetros, tomando los valores referidos a una constante $K = 1$.



Del mismo podemos observar:

- Si $\varphi = 0$, receptor óhmico puro, ambos vatímetros tienen igual indicación y de valor positivo.
- Cuando φ varía entre 60° y 90° , uno de los ángulos (φ_{RT} ó φ_{ST}) varía entre 90° y 120° , lo cual hace que la indicación de uno de los vatímetros se haga negativa (Se debe restar para obtener la potencia trifásica).
- Cuando el receptor es de características óhmico-inductivas, siempre es mayor la lectura del vatímetro conectado a la fase que sigue a la fase común, cuando la secuencia es positiva y menor cuando es negativa.
- Cuando el receptor es de características óhmico-capacitivas, es mayor la lectura del vatímetro conectado a la fase que precede a la fase común, cuando la secuencia es positiva y menor cuando es negativa.
- Cuando el receptor es de características inductivas ó capacitivas puras ($\varphi \pm 90^\circ$), los vatímetros tienen igual indicación pero con el signo cambiado ($P_{TRIF} = 0$).

En base a este análisis podemos determinar la secuencia de una red de acuerdo a la indicación de los vatímetros, ya que se debe cumplir:

Con carga óhmico-inductiva:	$W_{RT} > W_{ST}$	Secuencia positiva
	$W_{RT} < W_{ST}$	Secuencia negativa
Con carga óhmico-capacitiva:	$W_{RT} < W_{ST}$	Secuencia positiva
	$W_{RT} > W_{ST}$	Secuencia negativa

Potencia reactiva

Si en un circuito trifásico equilibrado hacemos la diferencia de las indicaciones de los vatímetros, obtenemos:

$$W_{RT} - W_{ST} = U_L I_L \cos(\varphi - 30^\circ) - U_L I_L \cos(\varphi + 30^\circ) =$$

$$W_{RT} - W_{ST} = U_L I_L [(\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ) - (\cos \varphi \cos 30^\circ - \sin \varphi \sin 30^\circ)]$$

$$W_{RT} - W_{ST} = 2 U_L I_L (\sin \varphi \sin 30^\circ) = U_L I_L \sin \varphi$$

Vemos que este valor es el de la potencia reactiva dividido por raíz de tres, luego para determinar la potencia reactiva trifásica en un sistema equilibrado, con la lectura de dos vatímetros utilizando el método de Arón es:

$$Q_{TRIF.} = \sqrt{3} (W_{RT} - W_{ST})$$

Otra forma de medir potencia reactiva en un sistema equilibrado es mediante un solo vatímetro chocado de acuerdo al siguiente esquema, de la figura 3.33

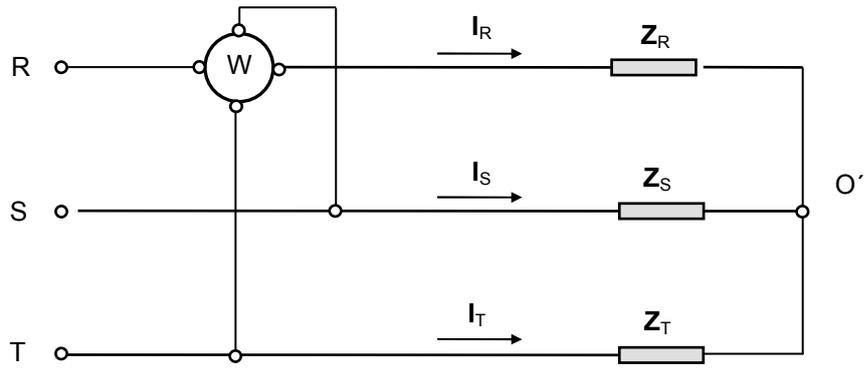


Figura 3.33. Esquema para medición de potencia reactiva

El vatímetro mide la corriente de una de las fases y la tensión entre las dos restantes, con lo cual su indicación es la siguiente:

$$W = U_{ST} I_R \cos(\text{ángulo comprendido entre la tensión } U_{ST} \text{ y la corriente } I_R)$$

De acuerdo al diagrama fasorial de la figura 3.34, el ángulo buscado es el siguiente:

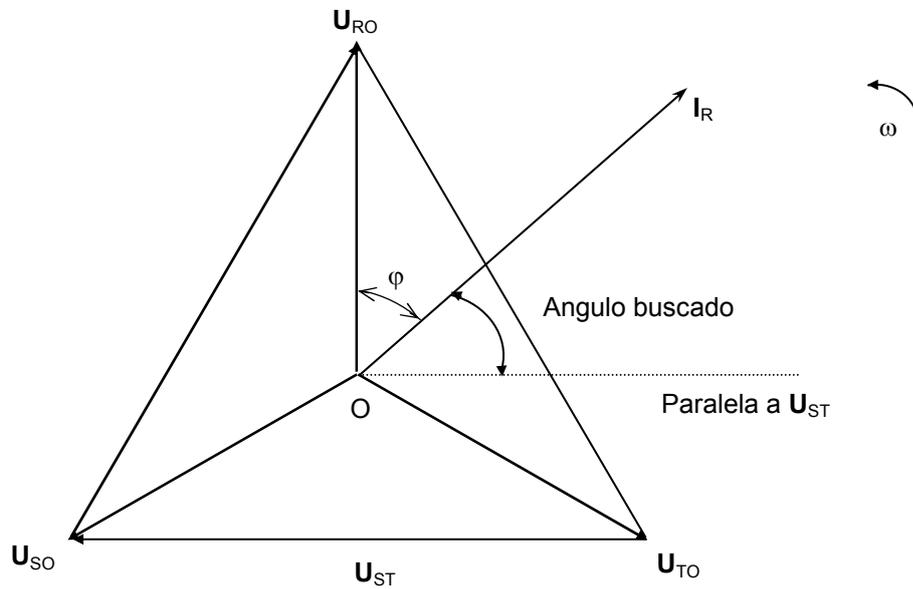


Figura 3.34. Diagrama fasorial, para cargas equilibradas

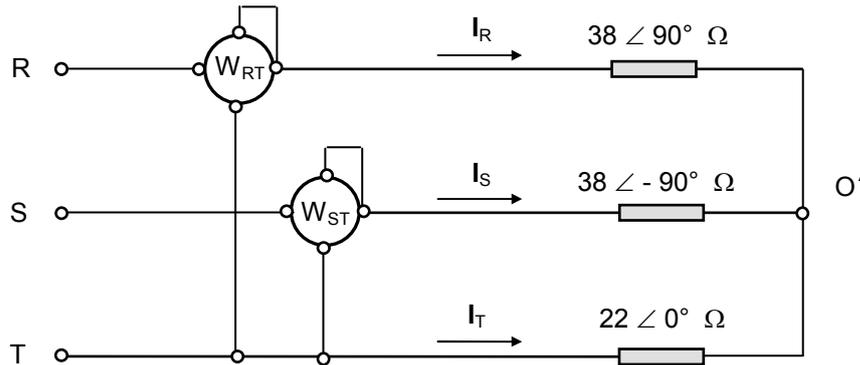
De acuerdo al diagrama el ángulo buscado es igual a $(90 - \varphi)$, con lo que la indicación será:

$$W = U_L I_L \cos(90 - \varphi) = U_L I_L \sin \varphi$$

Dicha indicación multiplicada por raíz de tres nos da la potencia reactiva del conjunto.

Ejercicio N° 1: Para el circuito de la figura calcular para secuencia directa y una tensión de alimentación de 3 x 380 V - 50 Hz :

- La tensión de corrimiento de neutro.
- Las corrientes de línea.
- La indicación de los vatímetros.
- La potencia activa y reactiva trifásica.
- Dibujar en escala el diagrama fasorial.



a) $Y_R = 1/Z_R = 1/38 \angle 90^\circ = 0,0263 \angle -90^\circ$ [S]

$Y_S = 1/Z_S = 1/38 \angle -90^\circ = 0,0263 \angle 90^\circ$ [S]

$Y_T = 1/Z_T = 1/22 \angle 0^\circ = 0,0455 \angle 0^\circ$ [S]

$$U_{O'O} = \frac{220 \angle 90^\circ \cdot 0,0263 \angle -90^\circ + 220 \angle 330^\circ \cdot 0,0263 \angle 90^\circ + 220 \angle 210^\circ \cdot 0,0455 \angle 0^\circ}{0,0263 \angle -90^\circ + 0,0263 \angle 90^\circ + 0,0455 \angle 0^\circ} = 0$$

b) $I_R = U_{RO} \cdot Y_R = U_{RO'} \cdot Y_R = 220 \angle 90^\circ \cdot 0,0263 \angle -90^\circ = 5,79 \angle 0^\circ$ [A]

$I_S = U_{SO} \cdot Y_S = U_{SO'} \cdot Y_S = 220 \angle 330^\circ \cdot 0,0263 \angle 90^\circ = 5,79 \angle 60^\circ$ [A]

$I_T = U_{TO} \cdot Y_T = U_{TO'} \cdot Y_T = 220 \angle 210^\circ \cdot 0,0455 \angle 0^\circ = 10 \angle 210^\circ$ [A]

c) $W_{RT} = 380 \cdot 5,79 \cdot \cos 60^\circ = 1100$

$W_{ST} = 380 \cdot 5,79 \cdot \cos 60^\circ = 1100$

$P_{TRIF.} = W_{RT} + W_{ST} = 1100 + 1100 = 2200$ W

d) $P_R = 0$ $Q_R = 220 \cdot 5,79 \cdot \sin 90^\circ = 1273,8$ VAR (Inductivo)

$P_S = 0$ $Q_S = 220 \cdot 5,79 \cdot \sin (-90^\circ) = -1273,8$ VAR (Capacitivo)

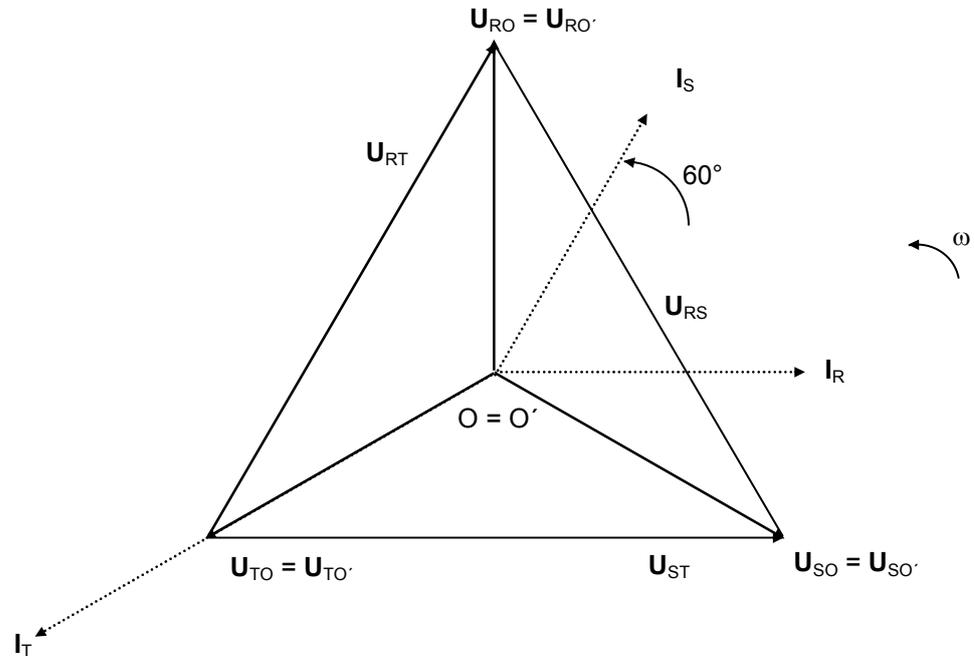
$P_T = 220 \cdot 10 \cdot \cos 0^\circ = 2200$ W $Q_T = 0$

$$P_{\text{TRIF.}} = P_R + P_S + P_T = 0 + 0 + 2200 = 2200 \text{ W}$$

$$Q_{\text{TRIF.}} = Q_R + Q_S + Q_T = 1273,8 - 1273,8 + 0 = 0$$

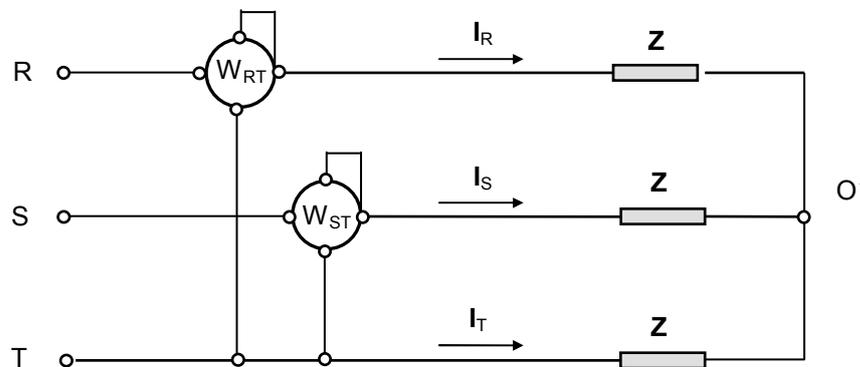
$$S_{\text{TRIF.}} = 2200 \text{ VA}$$

d)



Ejercicio N° 2: En el siguiente circuito la indicación de los vatímetros es $W_{RT} = W_{ST} = 330$. Si la carga es equilibrada y la tensión de alimentación es de $3 \times 380 \text{ V} - 50 \text{ Hz}$, hallar:

- El valor de las impedancias.
- Las corrientes de línea.



$$a) \quad P_{\text{TRIF.}} = W_{\text{RT}} + W_{\text{ST}} = 330 + 330 = 660 \text{ W}$$

$$Q_{\text{TRIF}} = \sqrt{3} (W_{\text{RT}} - W_{\text{ST}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Carga óhmica pura}$$

$$P_{\text{R}} = P_{\text{S}} = P_{\text{T}} = P = \frac{P_{\text{TRIF}}}{3} = 220 \text{ W}$$

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{220} = 220 \Omega$$

$$b) \quad I_{\text{L}} = I_{\text{F}} = \frac{U_{\text{F}}}{R} = \frac{220}{220} = 1 \text{ A}$$