

ELECTROSTÁTICA

Este capítulo constituye un pre-apunte (o sea, no llega a ser un apunte) cuya única función es facilitar la redacción de los apuntes en clase por parte del alumno. Contiene gráficos, formulas y explicaciones muy elementales de los contenidos que se dictan en la clase teórica a mi cargo, de forma que los participantes de la misma puedan completar en los espacios en blanco lo que consideren necesario. De ninguna manera reemplazan la bibliografía sugerida y se debe tener en cuenta que no han sido corregidos exhaustivamente

Interacciones magnéticas

Observación
experimental

Cargas en reposo producen interacciones eléctricas, descritas por la ley de Coulomb

Cargas en movimiento producen otro tipo de interacción, conocida como magnética

Fuente de interacciones eléctricas: las cargas eléctricas

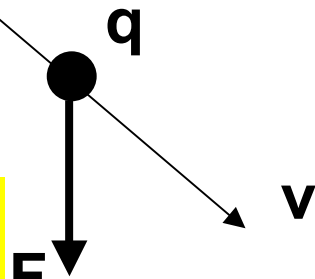
Fuente de interacciones magnéticas: las corrientes eléctricas

Imanes (primeros registros: 600 AC: magnetita: Fe_3O_4)

Experimentalmente:

Imán

Idem si en lugar de un imán tengo un sistema de corrientes



$$F \perp v$$
$$F \propto \begin{cases} q \\ v \end{cases}$$

Para q y v , F_{max} en una dirección y $F=0$ en otra dirección

Como expresar matemáticamente lo anterior?

Suponiendo un
intermediario de la
interacción: el Campo
Inducción Magnética B

Definimos

$$B = \frac{F_{\text{máx}}}{q v}$$

$$[B] = \left[\frac{N}{c \frac{m}{s}} \right] = \left[\frac{N}{A m} \right] = \text{Tesla (T)}$$

En cgs la unidad es el Gauss: $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$

$$F = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cumple con lo observado

$$\left\{ \begin{array}{l} F \propto q, F \propto v \\ F \perp v \\ F = 0 \text{ si } v \parallel B \\ F \text{ máx. si } v \perp B \end{array} \right.$$

F siempre $\perp v$, de tipo centrípeta; no realiza trabajo

Valores característicos de B

LUGAR	B (T)
Ambiente magnéticamente blindado	10^{-14}
Espacio interstelar	10^{-10}
Justo debajo de una línea de AT (+ B terrestre)	10^{-6}
Superficie terrestre en el Ecuador	$3,2 \cdot 10^{-5}$
Dentro de un aparato de TV (colores)	$2 \cdot 10^{-2}$
Instrumento de resonancia a magnética nuclear	0,35
En medio de una mancha solar	0,39
Altavoz de bobina móvil	1,5
Tokamak T-3	3,5
Cerca de imán superconductor	<20
Superficie de estrella de neutrones	10^8

Balística electrónica

2 formas de incidir en el movimiento de partículas cargadas

Mediante E $\vec{F} = q \vec{E}$

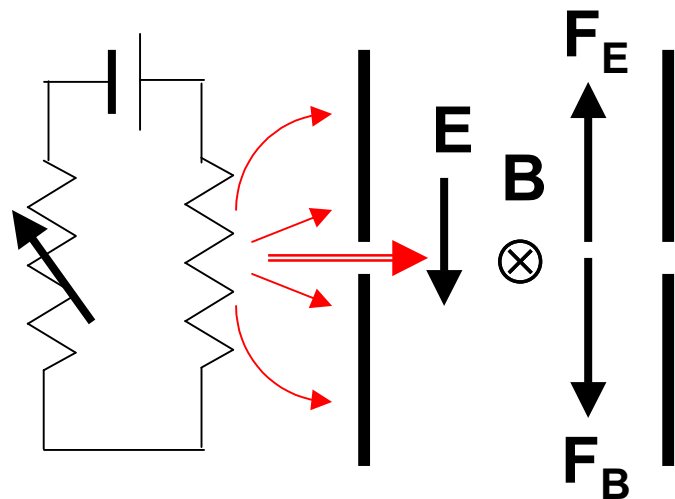
$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Mediante B $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

Fuerza de Lorentz

Importantes aplicaciones

Selector de velocidades



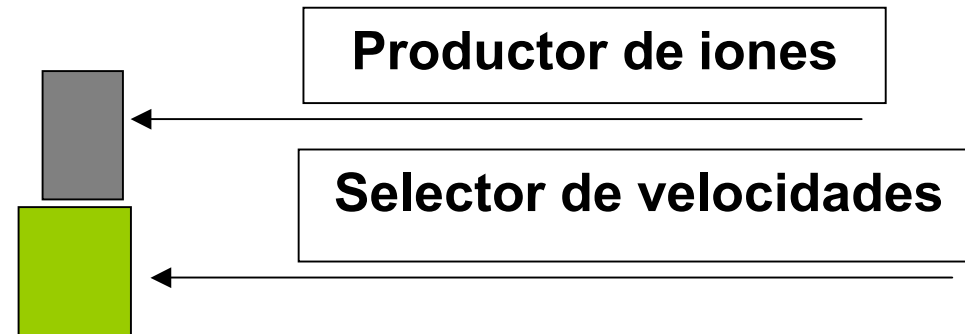
$$|\vec{F}_E| = |\vec{F}_B| \Rightarrow q E = q v B$$

Para que
pasen por
orificio

Solo pasan las que tienen $v = \frac{E}{B}$

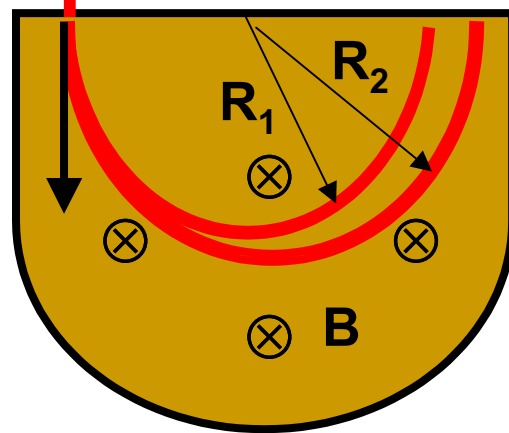
Haz colimado y con
 ΔE controlable

Separador de masas

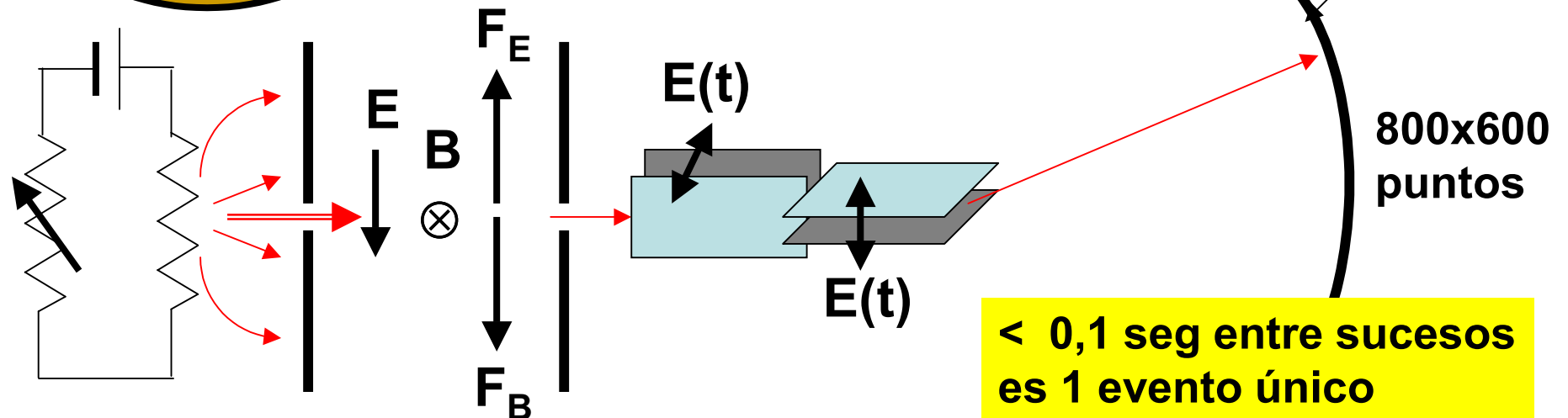


$$F = q v B = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{v}{q B} m$$



Tubo de rayos catódicos

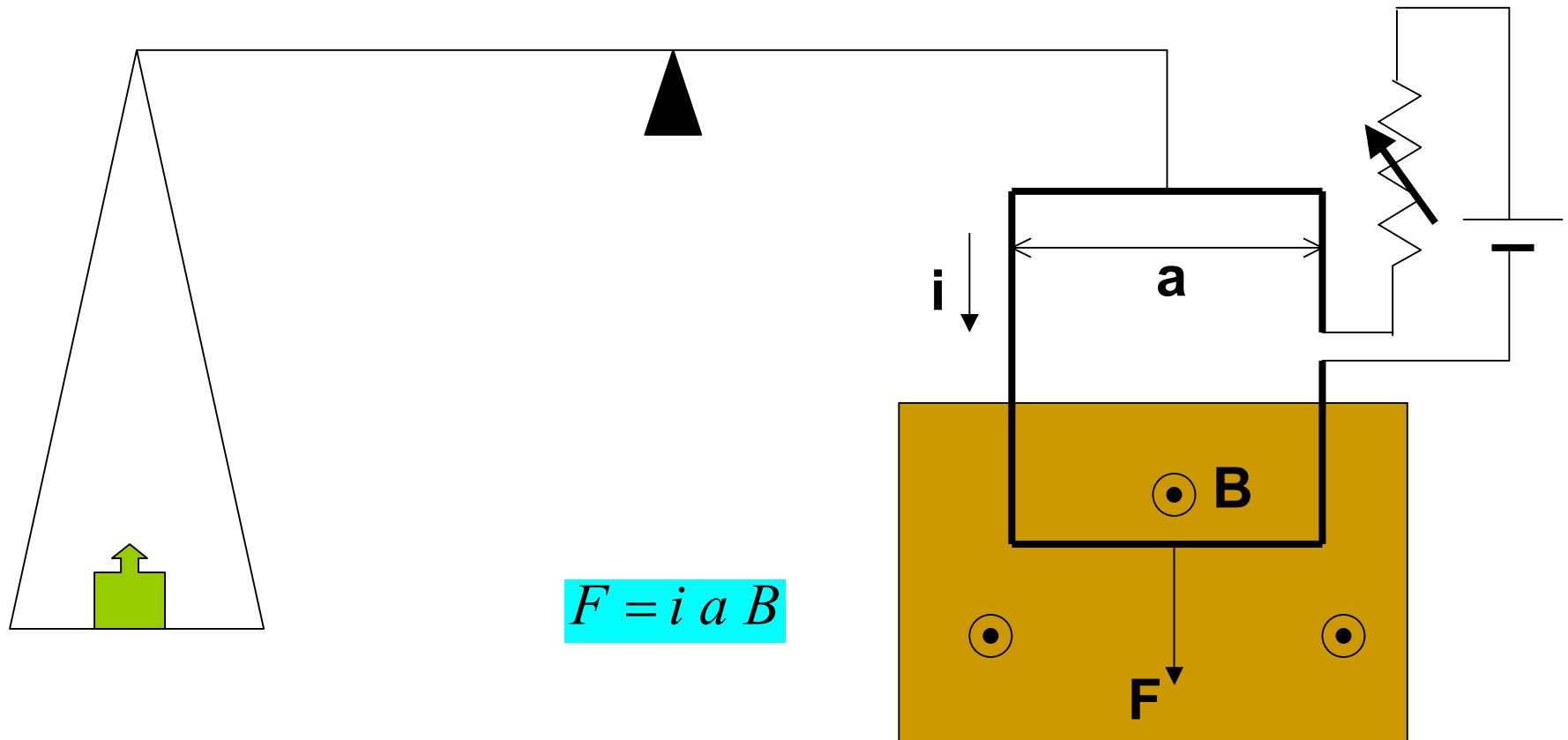


Fuerzas sobre corrientes

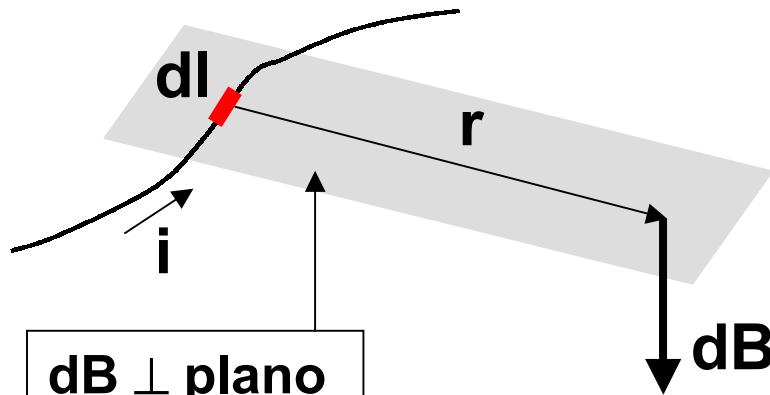
$$d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$\vec{l}$ Elemento de corriente

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$
$$\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$$



Ley de Biot y Savart



$d\vec{B} \perp$ plano
definido
por dl y r

$$dq \vec{v} = dq \frac{d\vec{l}}{dt} = i d\vec{l}$$

Con E

$$d\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}$$

Con B

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4 \pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

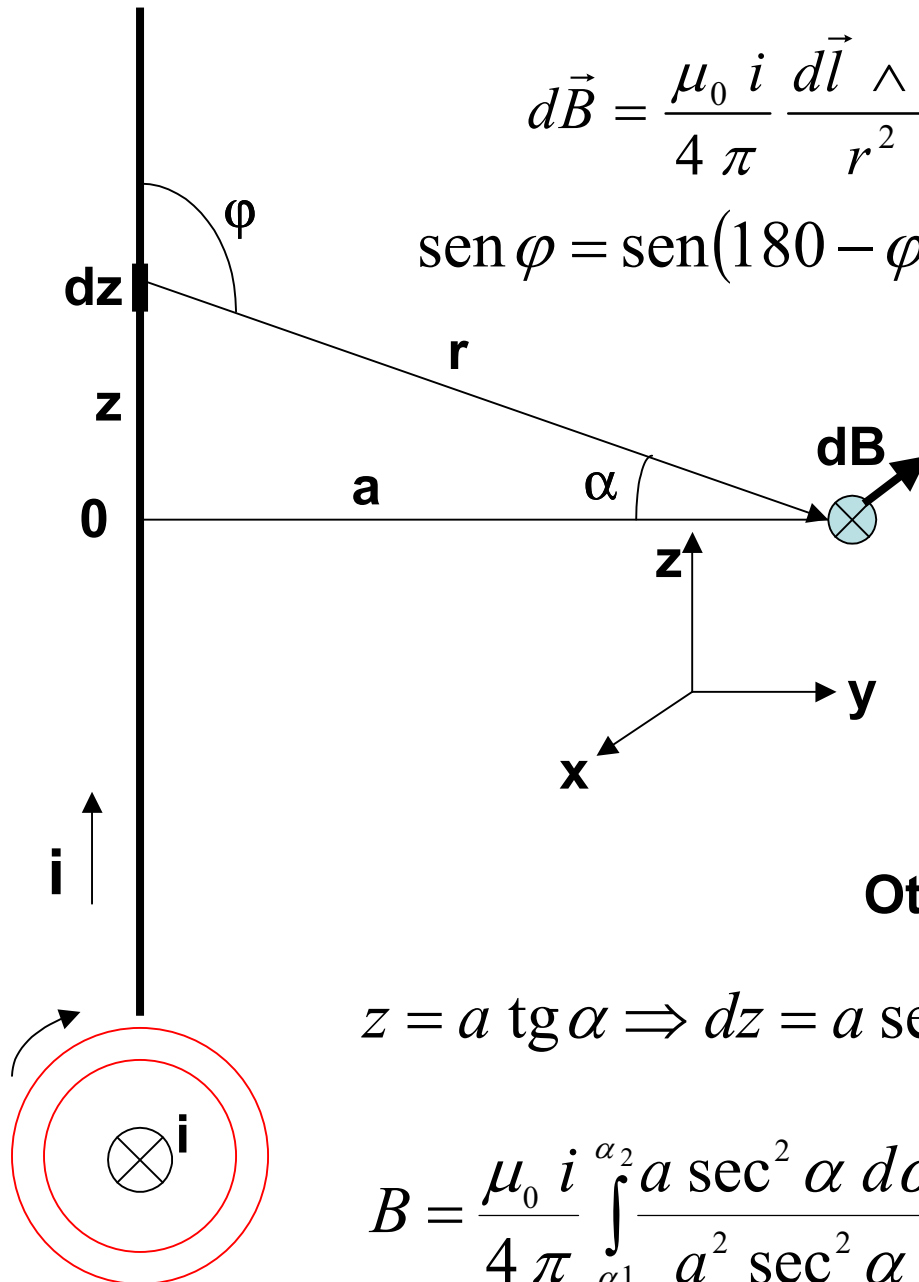
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4 \pi} \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

μ_0 permeabilidad magnética en vacío

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \left[\frac{T m}{A} = \frac{N}{A^2} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4 \pi} \int \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

B creado por hilo infinito con i



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

$$\sin \varphi = \sin(180 - \varphi) = \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \sin \varphi}{(a^2 + z^2)}$$

$$B = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{a}$$

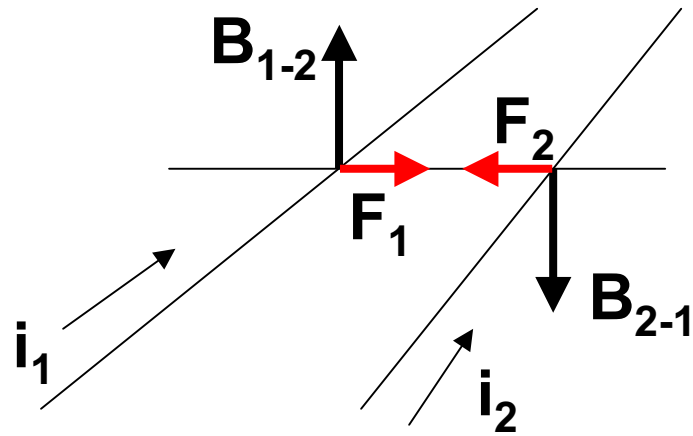
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

Otra forma

$$z = a \tan \alpha \Rightarrow dz = a \sec^2 \alpha d\alpha \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sec \alpha} \quad r = a \sec \alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{a \sec^2 \alpha d\alpha}{a^2 \sec^2 \alpha} \cos \alpha = -\frac{\mu_0 i}{4\pi a} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

Fuerza entre corrientes



$$B_{2-1} = \frac{\mu_0 i_1}{2 \pi a} \quad F_2 = i_2 l B_{2-1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2 \pi a}$$

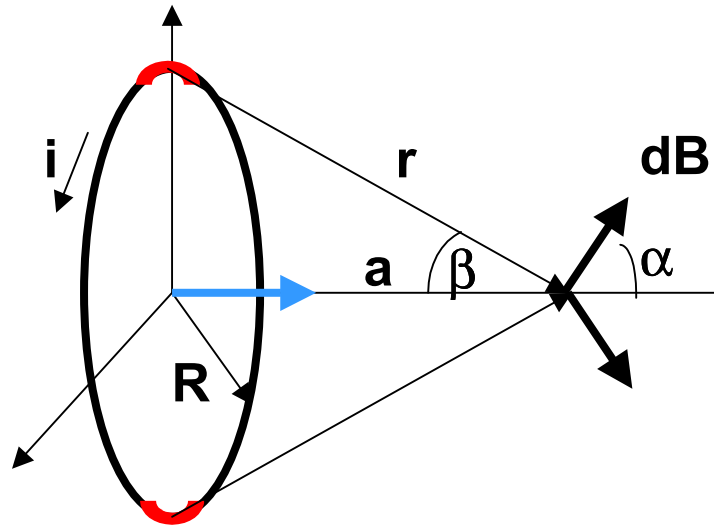
$$B_{1-2} = \frac{\mu_0 i_2}{2 \pi a} \quad F_1 = i_1 l B_{1-2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2 \pi a}$$

i contrarias: f repulsivas

Definición de A: dos cables paralelos a 1 m de distancia se atraen (repelen) con $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m cuando la $i = 1$ A

Definición de Coulomb: cantidad de carga que transporta una corriente de 1 A durante un 1 seg

B en centro de una espira de corriente



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{ds}{(a^2 + R^2)} \cos \alpha$$

$$ds = R d\theta \quad \cos \alpha = \sin \beta = \frac{R}{r}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}$$

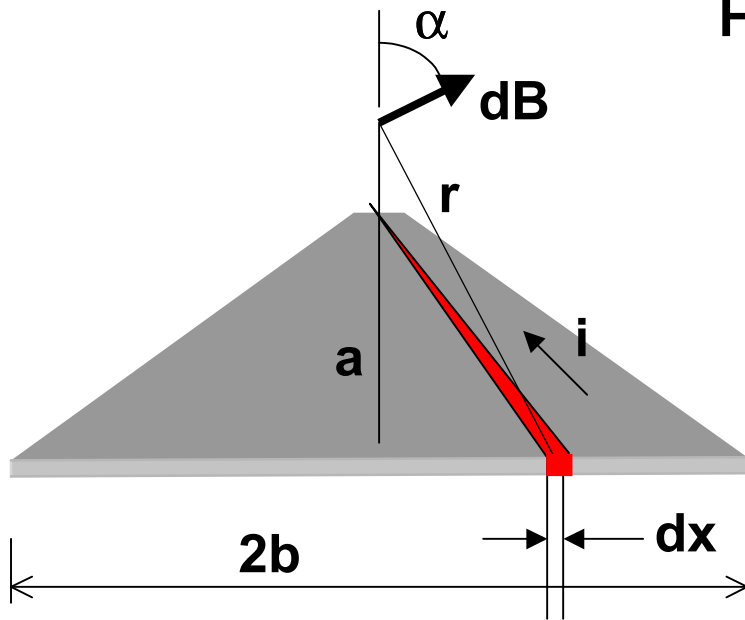
A distancia muy grande

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2a^3}$$

En el centro de la espira

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

Lámina plana con i homogénea



Hilo con di

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2 \pi r} \quad di = \frac{dx}{2b} i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4 \pi b} \int_{-b}^b \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \operatorname{sen} \alpha$$

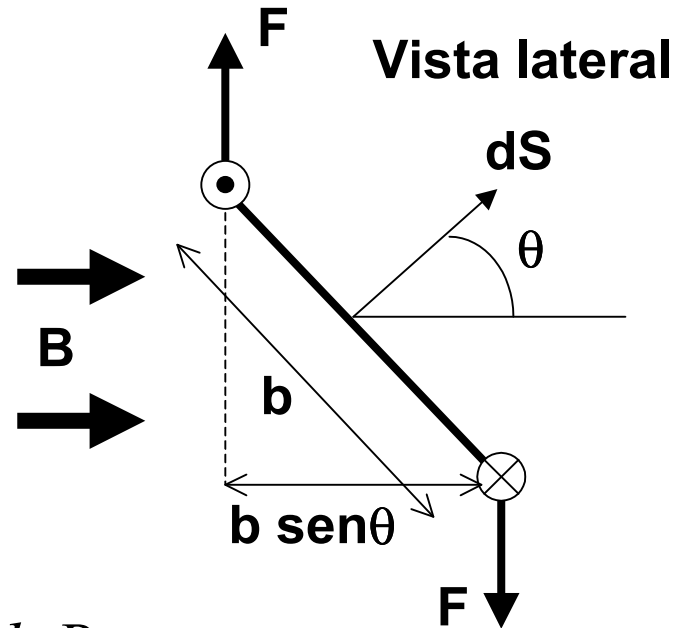
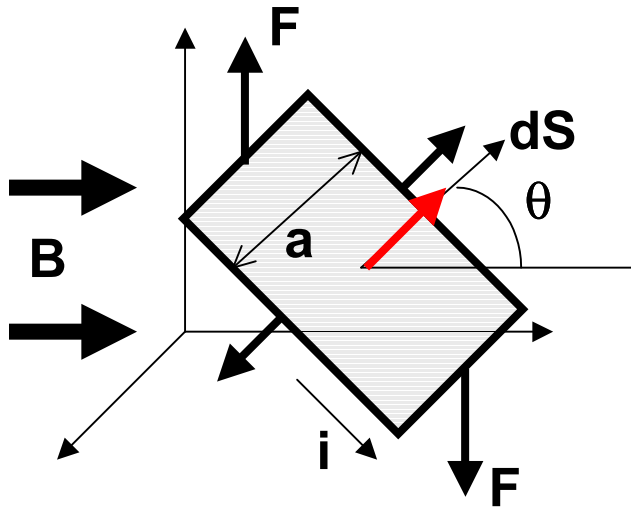
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{r}$$

$$B = \frac{\mu_0 i a}{4 \pi b} \int_{-b}^b \frac{dx}{(a^2 + x^2)}$$

$$B = \frac{\mu_0 i a}{4 \pi b a} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{-b}{a} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Dipolo magnético



Sobre b (compensada) $F = i b B$

Sobre a $F = i a B$

Torque $\tau = F b \sen \theta = i a B b \sen \theta$

$$\tau = i A B \sen \theta$$

Momento dipolar magnético $\vec{\mu} = i \vec{A}$ Regla tirabuzón
mano derecha

**Una espira de corriente es un dipólo magnético
que en presencia de B tiende a alinearse con el**

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Idem dipólo
eléctrico

$$\vec{p} = q \vec{E} \quad \vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

$$dl = \frac{b}{2} d\theta$$

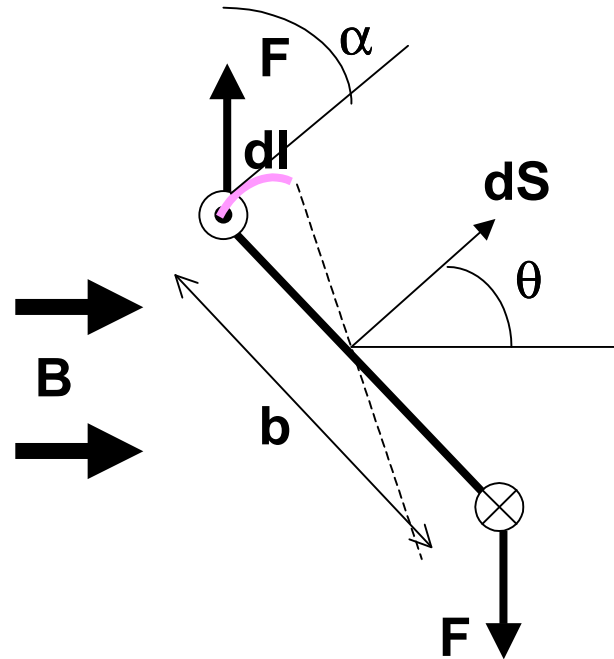
$$\Delta E_p = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta E_{PT} = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} i a B \frac{b}{2} d\theta \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin \theta$$

$$\Delta E_{PT} = -\mu B (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

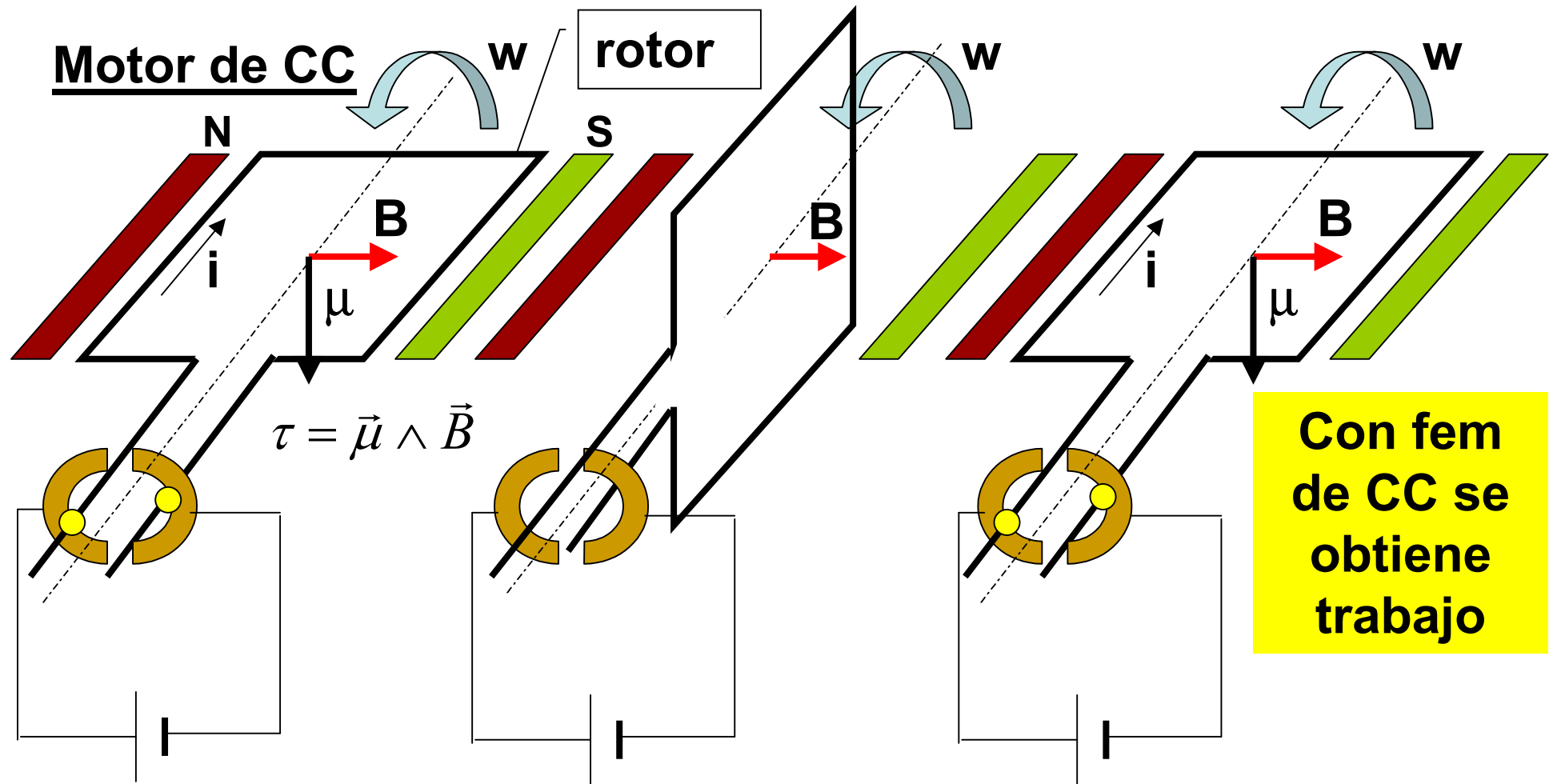
Si $E_p=0$ cuando $\theta = \pi / 2$



$$E_{PT} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Espira de i crea B y reacciona frente a B

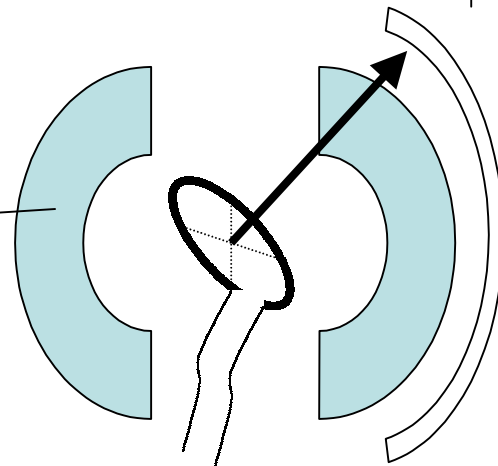
Idem dipólo eléctrico $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$



Instrumentos de medición

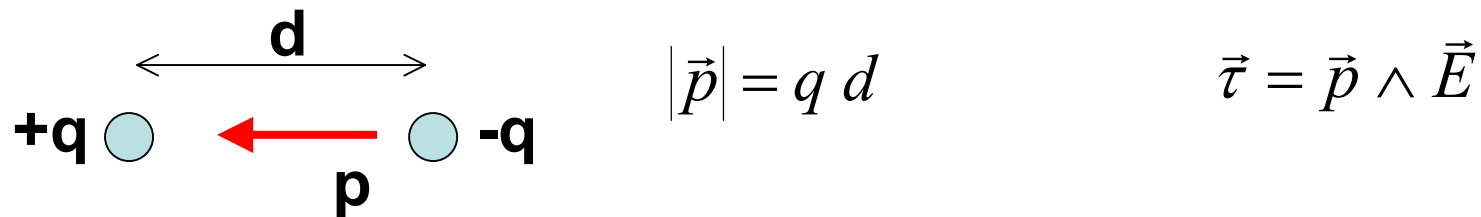
Piezas
polares

escala



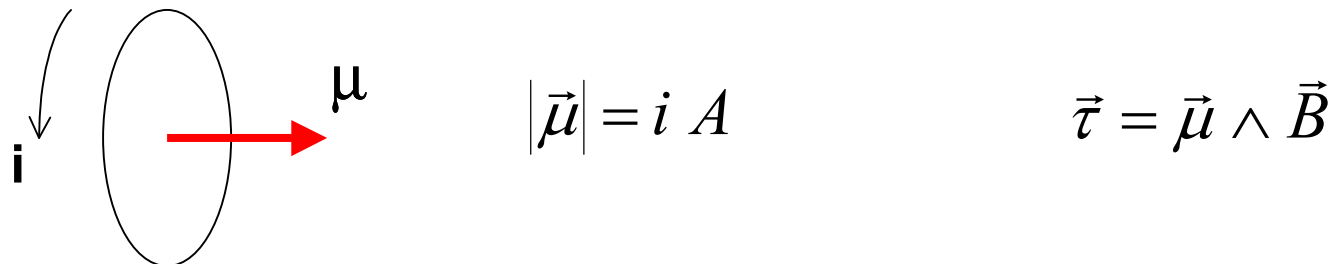
Electrostática: estructura de cargas mas sencilla es la carga aislada puntual (monopolo) que crea E y reacciona ante un E externo

Estructura algo mas compleja: dipolo eléctrico que reacciona ante un E externo orientándose en la dirección de éste.



Magnetostática: no existe una estructura de corrientes equivalente al monopolo eléctrico. **No existen los monopolos magnéticos**

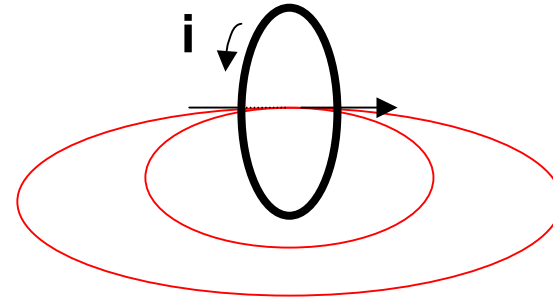
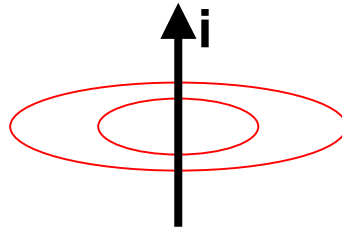
Estructura mas sencilla: dipolo magnético que reacciona ante un campo B externo orientándose en dirección a éste



Leyes integrales del Campo Magnético

Flujo

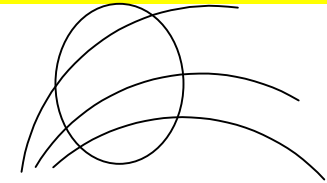
i crea B



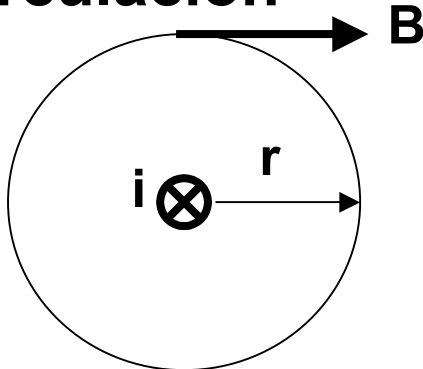
Líneas de fuerza de B son cerradas; no existen fuentes ni sumideros (papel que juegan las cargas con E)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ley de Gauss de B



Circulación



$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2 \pi r} r d\theta$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

Ley de Ampere

Ley no válida si hay materiales magnéticos

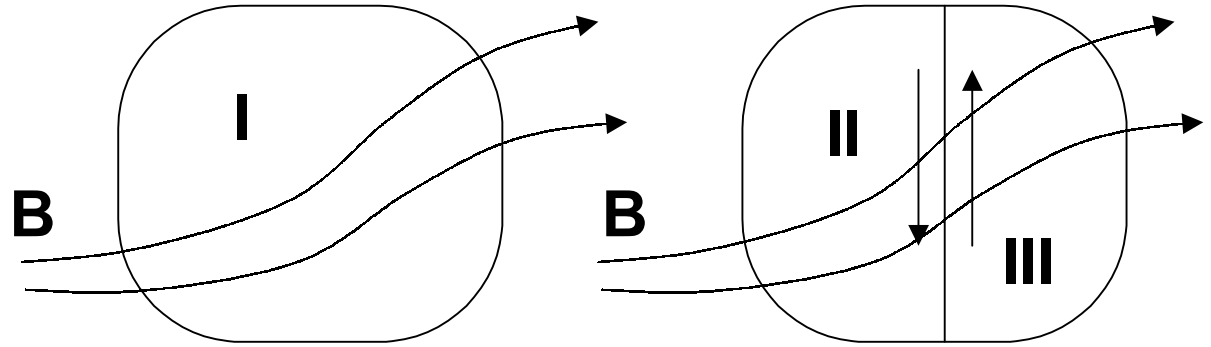
Esta expresión vale cualquiera sea la trayectoria de integración

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Si trayectoria no contiene i

Expresión diferencial de Ley de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$



$$\oint_I \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{II} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{III} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

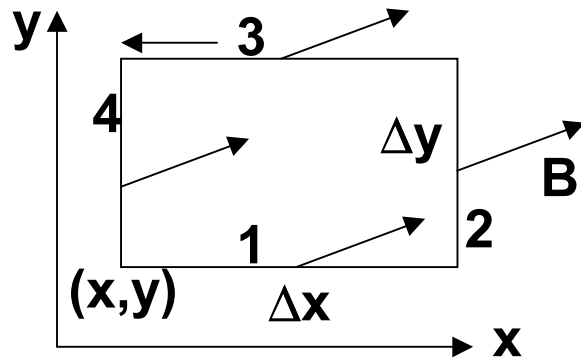
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_j \oint_j \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_j \oint_j \vec{B} \cdot d\vec{l} \frac{S_j}{S_j}$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \oint \frac{\vec{B} \cdot d\vec{l}}{S} = \nabla \wedge \vec{B} \quad \text{Teorema Stokes}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \nabla \wedge \vec{B} \, dS = \mu_0 i = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Teorema de Stokes



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_x(1)\Delta x + B_y(2)\Delta y - B'_x(3)\Delta x - B'_y(4)\Delta y$$

$$B'_x(3) = B_x(1) + \frac{\partial B_x}{\partial y} \Delta y$$

$$B'_y(4) = B_y(2) - \frac{\partial B_y}{\partial x} \Delta x$$

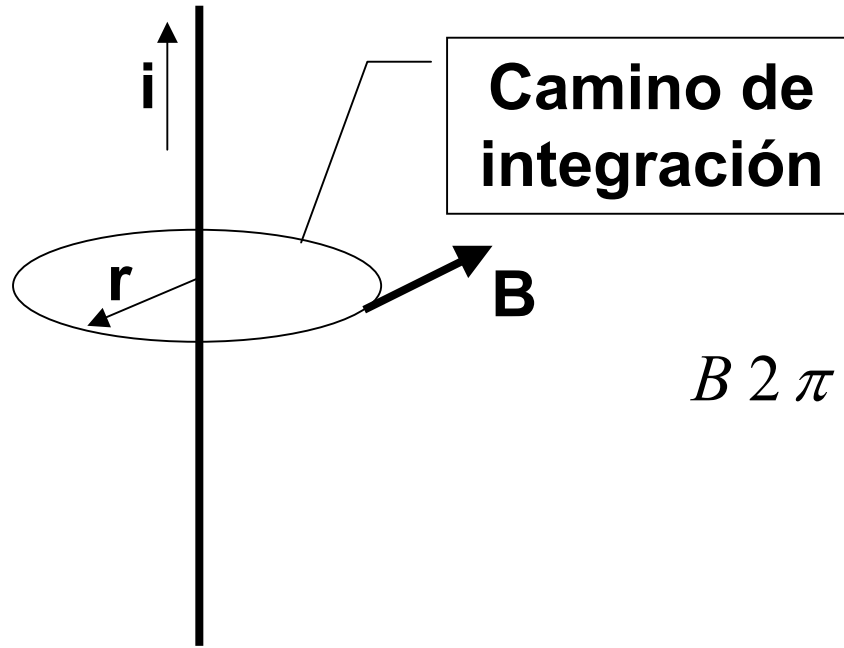
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = (\nabla \wedge B)_z \Delta S$$

$$\lim_{S \rightarrow 0} \oint \frac{\vec{B} \cdot d\vec{l}}{S} = \nabla \wedge \vec{B}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \wedge B)_z dS$$

**Teorema
Stokes**

Cálculo de B con Ley de Ampere

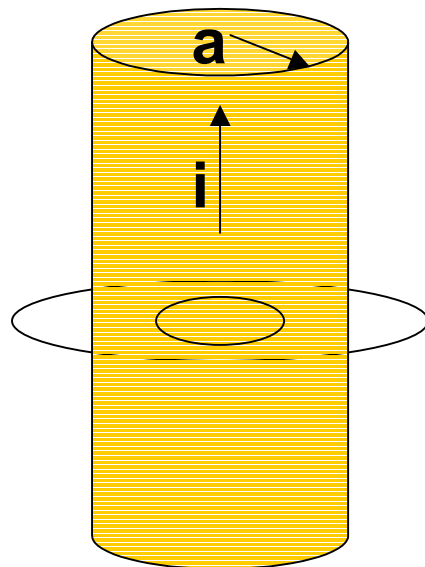


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

B // dl en todo punto
|B| cte en todo punto

$$B 2 \pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r}$$



fuera

$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r}$$

dentro { **i homogénea**

$$B 2 \pi r = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2 \pi a^2}$$

i en superficie

$$B = 0$$

Relaciones entre E y B

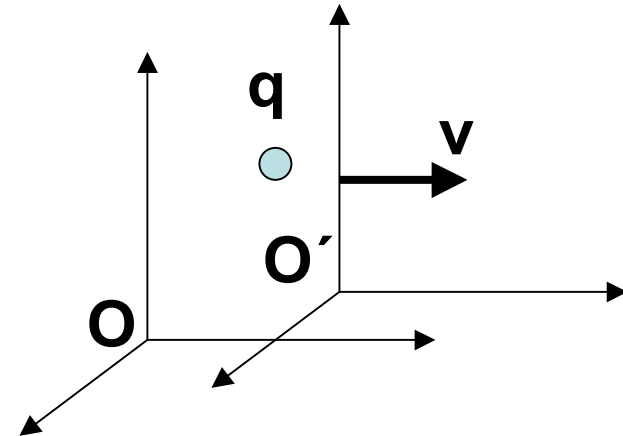
q en reposo genera E
q con v genera E y B

$$q \vec{v} = i \vec{l} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \sin \alpha}{r^2} \quad \frac{q}{4\pi} = \frac{B r^2}{\mu_0 v \sin \alpha} \quad \alpha \angle \vec{v} - \vec{r} (\vec{E})$$

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad \frac{q}{4\pi} = \vec{E} \epsilon_0 r^2$$

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \wedge \vec{E}$$

Dependencia de E y B con el
estado de movimiento relativo
del observador



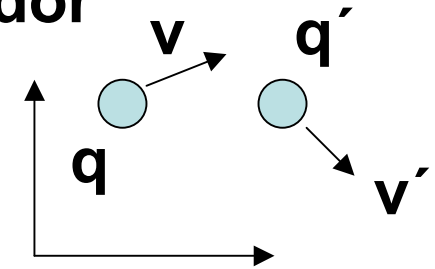
q en reposo en O y con $-v$ en O'

Observador en O: q genera E
Observador en O': q genera E y B

Comparación entre E y B

2 cargas q y q' con v y v' respecto a observador

q' produce E y B donde está q



$$F_E = q E \quad \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{v}' \wedge \vec{E} = \frac{\vec{v}' \wedge \vec{E}}{c^2} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow q v B \cong q v \frac{v' E}{c^2} = \frac{v v'}{c^2} q E$$

$$\frac{F_M}{F_E} \approx \frac{v v'}{c^2} \quad \text{Si } v \ll c \text{ } F_M \text{ es despreciable frente a } F_E$$

Ej. e^- en átomo, $v \sim 10^6 \text{ ms}^{-1} \Rightarrow$ si cargas tienen esa v $\frac{F_M}{F_E} \approx 10^{-5}$

En aplicaciones magnéticas (motores, etc) materiales descargados por lo que F_B evidentes

$$F_E > F_B \gg F_G$$

$$1 - 10^{-5} - 10^{-40}$$

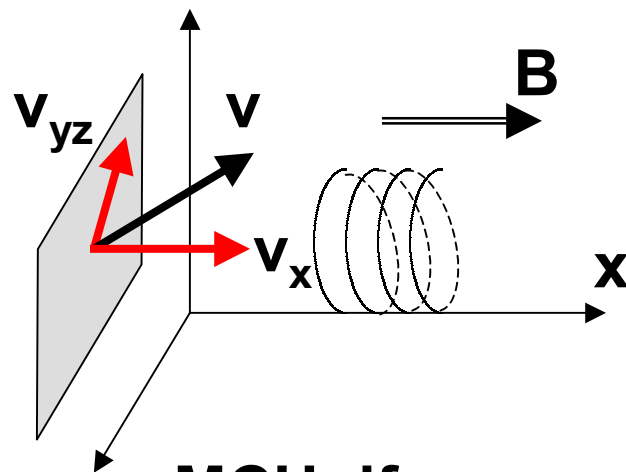
Botellón magnético Si q con $\mathbf{v} \perp \mathbf{B} \Rightarrow$ Mov. Circular:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{m v}{q B}$$

Cualquier $\mathbf{v}$ tiene 2 componenetes $\mathbf{v}_x \parallel \mathbf{B}$ $F_M=0$, traslación

$\mathbf{v}_{yz} \perp \mathbf{B}$ $F_M=F_C$, rotación



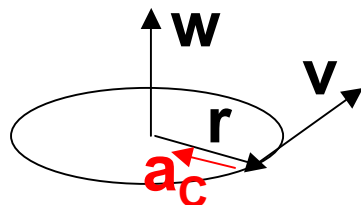
Movimiento helicoidal

$$R = \frac{m v_{yz}}{q B}$$

Frecuencia de rotación $v = \omega R \Rightarrow |\omega| = \frac{q}{m} |B|$

Independiente de v !

MCUniforme



$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$F_c = m a_c = m \vec{\omega} \wedge \vec{v} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{\omega} = - \frac{q}{m} \vec{B}$$

**Descubrimiento
del positrón**

Frecuencia de ciclotrón

**$q+$: ω opuesta a B
 $q-$: ω paralela a B**

Movimiento circular: espira de i

$$i = q f = q \frac{\omega}{2\pi}$$

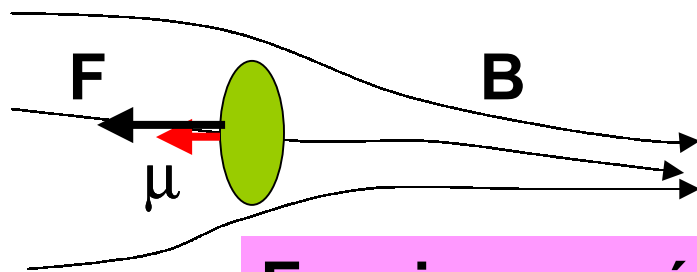
$$\mu = i A = q \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 = q \left(-\frac{q}{m} B\right) \frac{r^2}{2} = -\frac{q^2 r^2}{2m} B$$

**Antiparalelo a B
para cargas + y -**

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad \tau = -\frac{dE_p}{d\theta} \quad F = -\frac{dE_p}{dx}$$

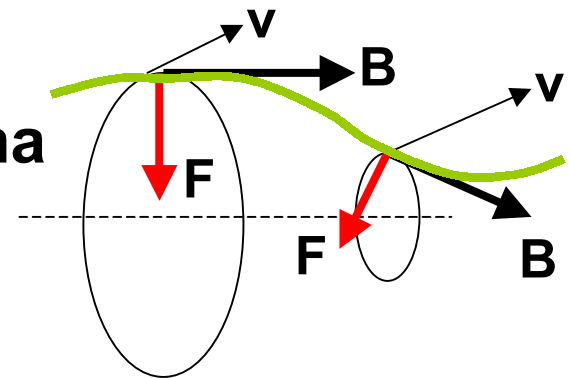
Si μ antiparalelo a B $E_p = \mu B$ $F = -\mu \frac{dB}{dx}$

F tiende a mover el dipolo en la dirección que B disminuye



Espejo magnético

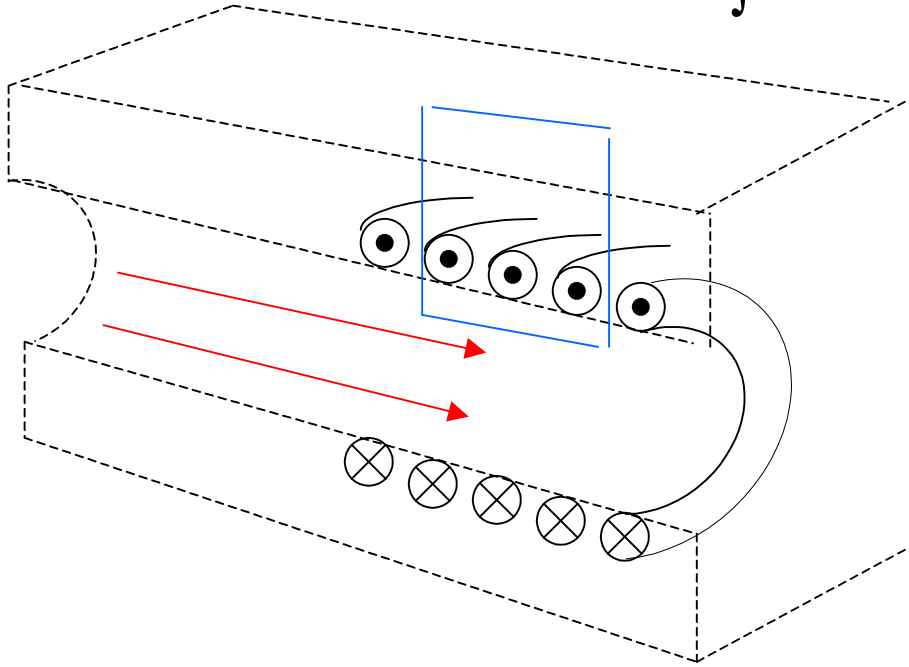
**Otra forma
de verlo**



**En B uniforme F neta sobre dipolo es 0, en B no uniforme F neta $\neq 0$
(hacia B mas débil si μ contrario a B, hacia B mas intensos si $\mu \parallel B$)**

Bobina ideal

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad B l = \mu_0 n l i$$

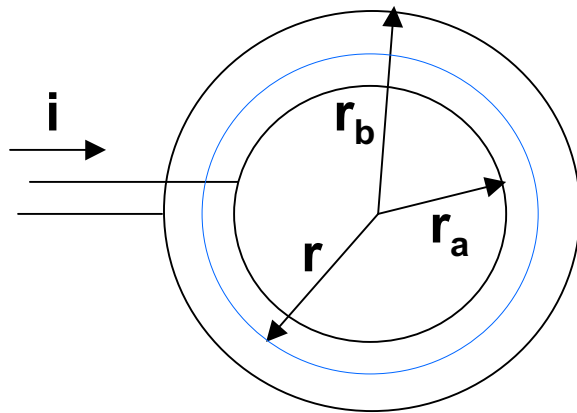


n: Nro vueltas por unidad long.

$$B = \mu_0 n i$$

Bobina ideal:
B homogéneo
B constante

Toroide



$$B 2 \pi r = \mu_0 N i$$

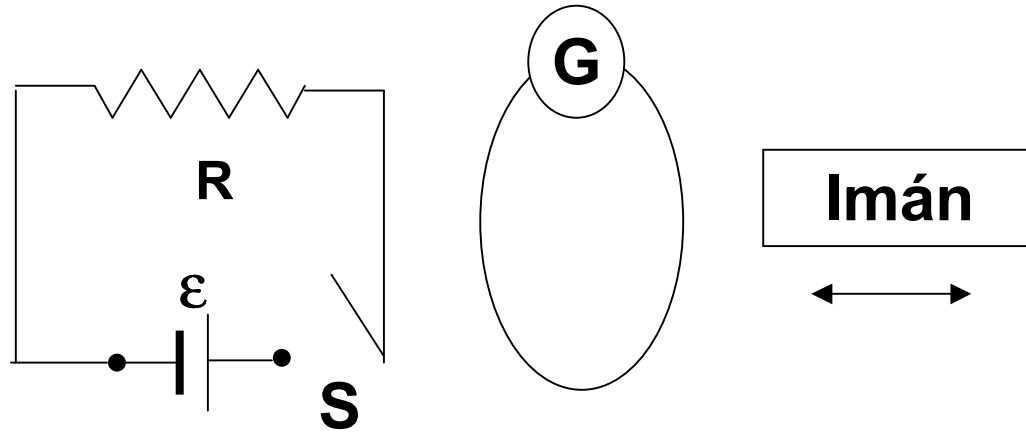
$$B = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r}$$

$$\text{si } r_b - r_a \ll r \Rightarrow r_m \cong \frac{r_b + r_a}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r_m} = \mu_0 n i$$

Inducción

Observación experimental



Al cerrar S, G marca i
Con S cerrada, G en 0
Al mover imán, G marca i
Imán quieto, G en cero

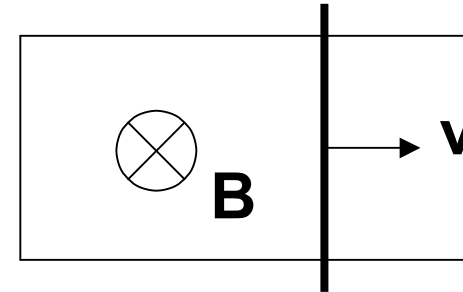
La causa es ΔB ?

La causa es $\Delta\phi$ en t $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$$\varepsilon = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Ley de Faraday

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$



No; si
 $B = k_1 / t$
 $S = k_2 t$
 $\Rightarrow i = 0$

ε no localizada

$$\varepsilon = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

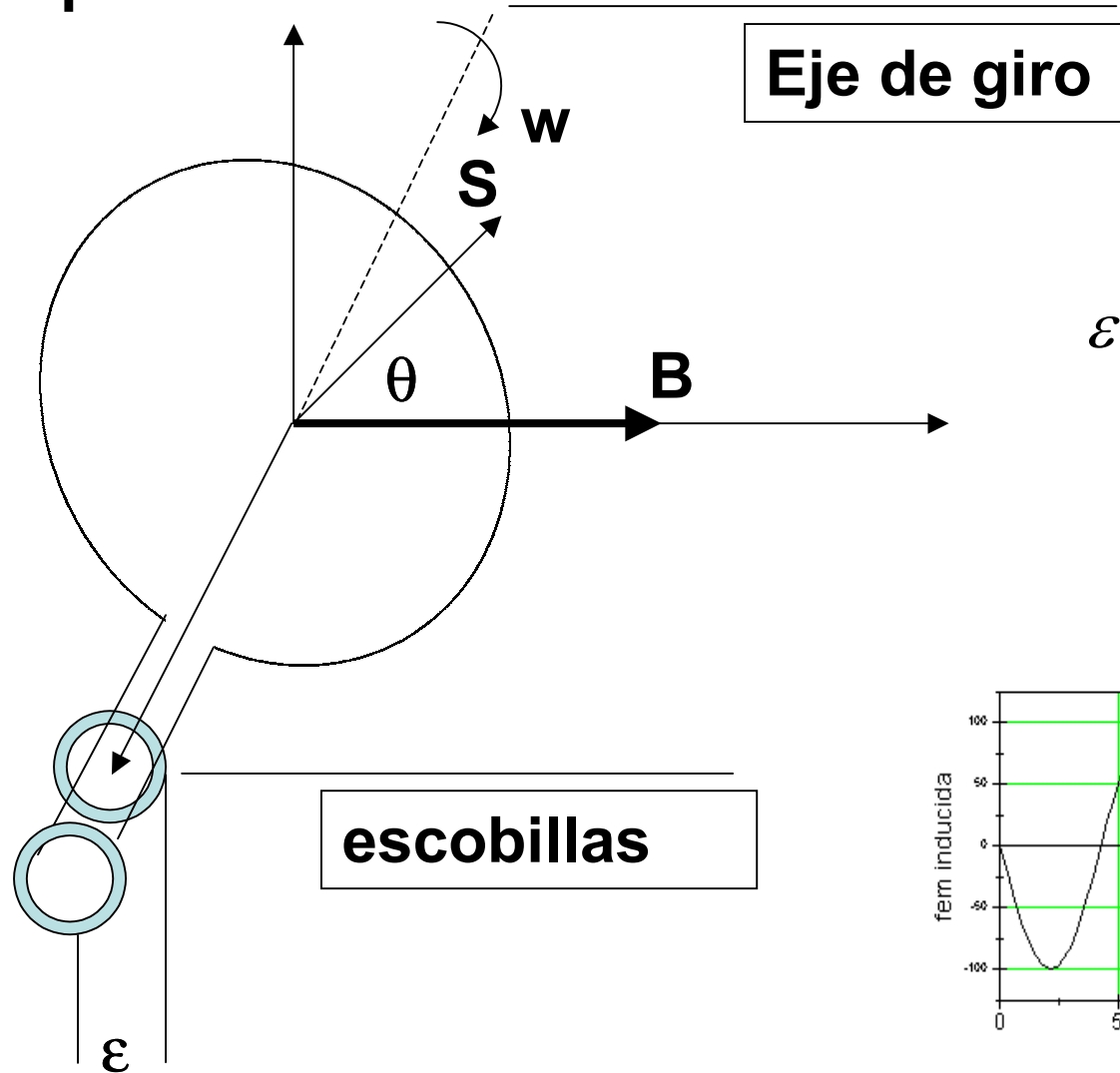
ε localizada

$$\varepsilon = -\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Si N espiras

$$\varepsilon = -N \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Importancia!!

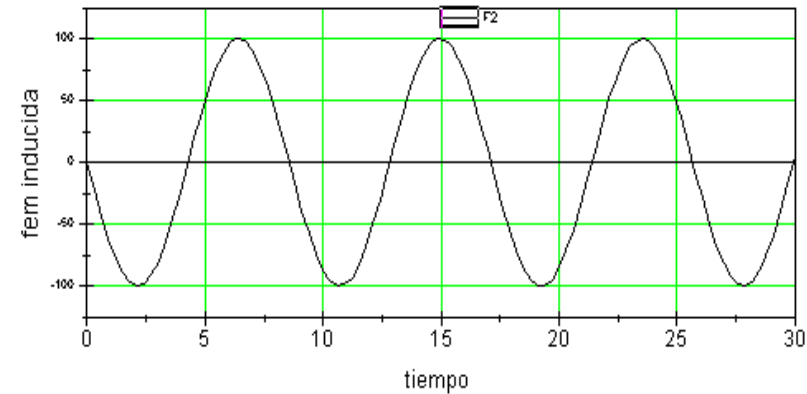


$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos \theta$$

$$\theta = \omega t$$

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -B S \omega \sin \omega t$$

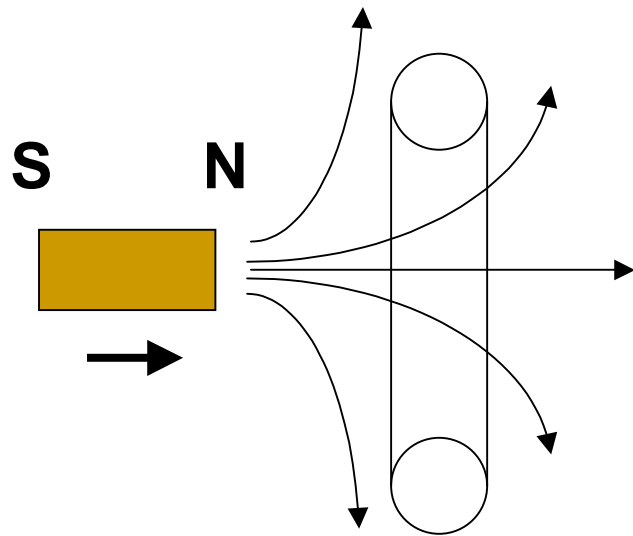
$$\epsilon = \epsilon_0 \sin \omega t$$



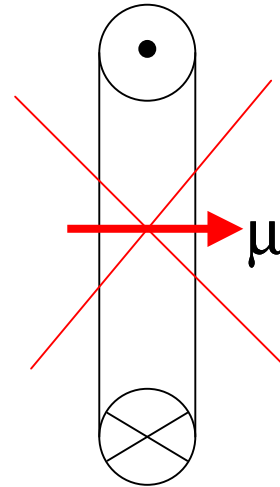
Si N espiras en serie $\epsilon = -N \frac{d\phi}{dt} = -N B S \omega \sin \omega t$

Ley de Lenz

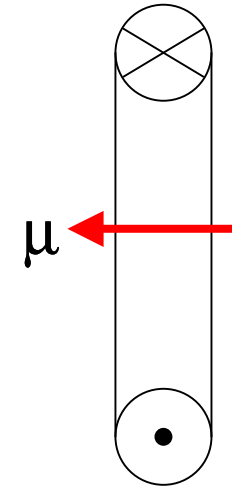
Define el sentido de la fem inducida



Sentido?



Creación de energía

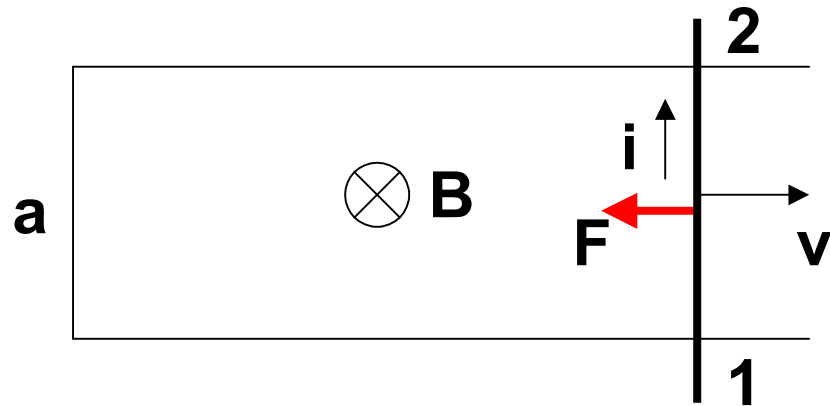


El sentido de la fem inducida será aquel que se oponga al cambio que la está generando

En el caso presente la fem se opone al crecimiento de ϕ

Si imán se aleja la fem actúa en sentido contrario

Fem en cargas en movimiento



$$\vec{F}_q = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow i$$

$$\vec{F} = i \vec{a} \wedge \vec{B}$$

ε ($\Rightarrow i \Rightarrow F$) se opone al cambio que la está generando (el aumento de flujo de B debido a v)

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi = B S$$

$$\phi = B a v t$$

$$\varepsilon = B a v$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B a v}{R}$$

$$\Delta V_{1-2} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F}_q \cdot d\vec{l} = v B a$$

Fem localizada?

Siempre que hay q con v

$$\varepsilon = \int_1^2 (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

En general

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Válida para cualquier trayectoria, aunque no sea un

$B(t) \Rightarrow E \ni$ circulación de E es igual a la variación en t del flujo de B a través de la superficie delimitada por la trayectoria de circulación

Potencia disipada

$$P = i^2 R = \left(\frac{B a v}{R} \right)^2 R = \frac{(B a v)^2}{R}$$


La fuerza F se opone al movimiento de la varilla hacia la derecha con velocidad v, y para mantener el movimiento hay que aplicar una fuerza igual y contraria

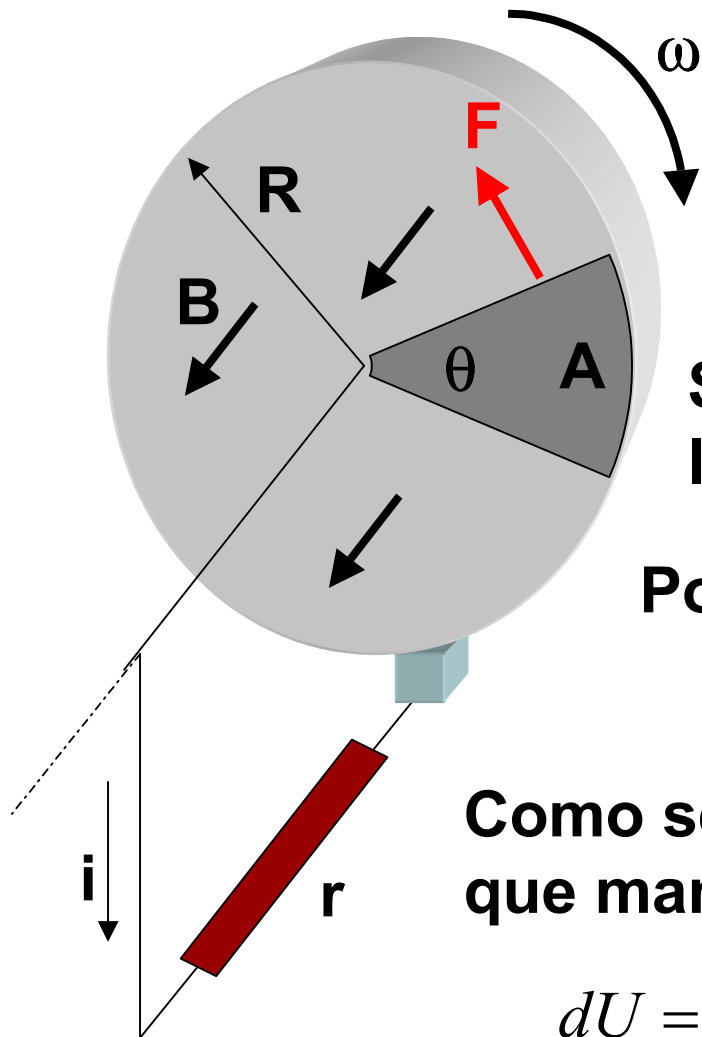
$$F = i a B = \frac{B a v}{R} a B = \frac{B^2 a^2 v}{R}$$

Esta F hace un trabajo cuya potencia es

$$P = \frac{dW}{dt} = F v = \frac{(B a v)^2}{R}$$


La potencia entregada para mantener el movimiento de la barra se disipa en la resistencia

Dinámico de Faraday



$$A = \frac{\theta}{2\pi} \pi R^2 = \frac{\theta R^2}{2} = \frac{\omega t R^2}{2}$$

$$\phi = B A = B \frac{\omega t R^2}{2}$$

$$|\varepsilon| = \frac{d\phi}{dt} = \frac{B \omega R^2}{2} \quad i = \frac{B \omega R^2}{2r}$$

Sentido?: opuesto al cambio que genera la fem inducida, a sea al aumento de A

Potencia disipada

$$P = i^2 r = \frac{(B \omega R^2)^2}{4 r^2} r = \frac{(B \omega R^2)^2}{4 r}$$

Como se suministra?: con F = y contraria a F que mantenga w

$$dU = F \frac{R}{2} d\theta \quad P = \frac{dU}{dt} = F \frac{R}{2} \omega$$

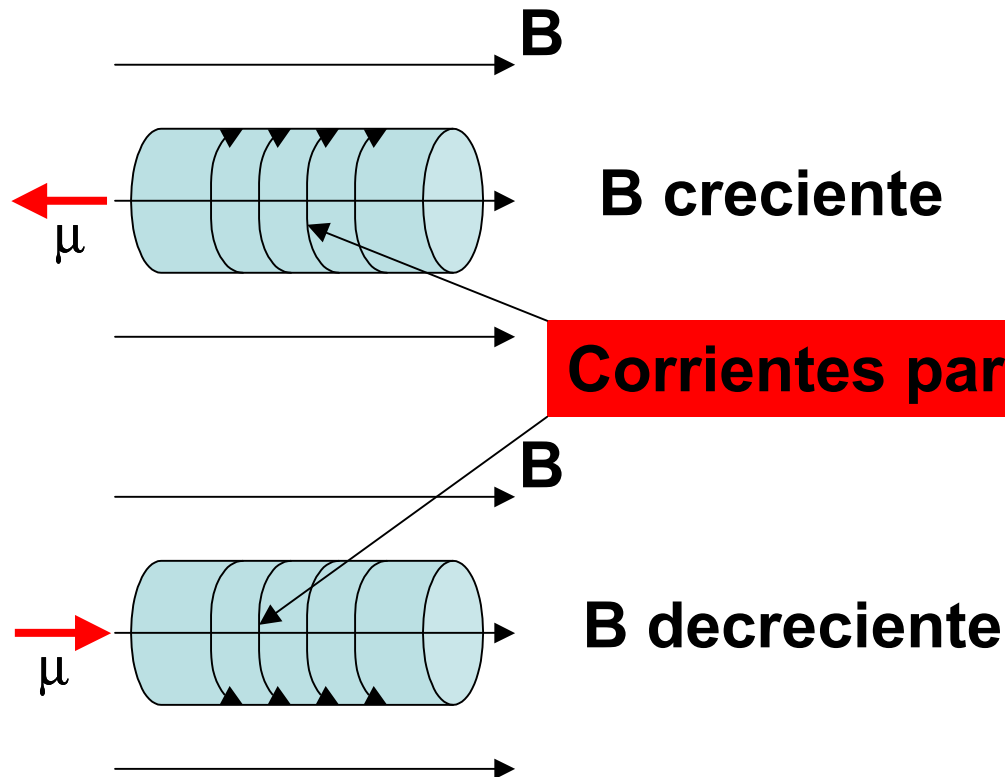
$$F = i R B \quad P = \left(\frac{B \omega R^2}{2r} R B \right) \frac{R}{2} \omega = \frac{B^2 \omega^2 R^4}{4r}$$



Corrientes parásitas (i_p)(F. o Eddy) $-\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

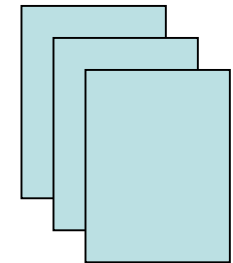
E en plano $\perp$ a B



i producida por fem inducida en plano $\perp$ a B genera un μ que se opone al crecimiento (decrecimiento) de B

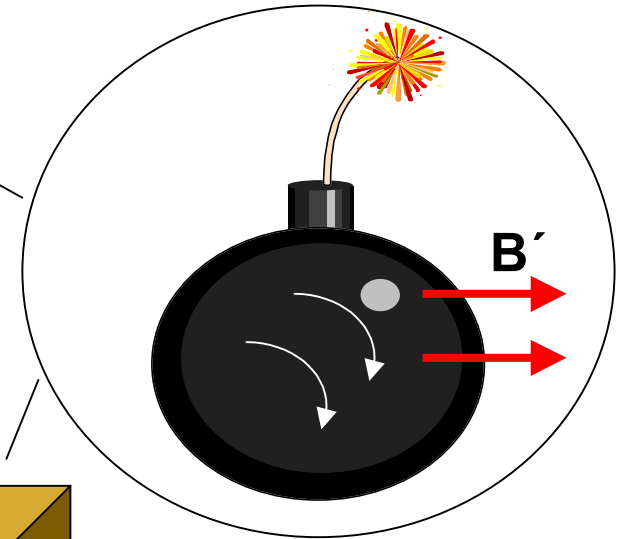
i_p producen pérdidas de energía por disipación Joule

En núcleos ferromagnéticos material en chapas aisladas eléctricamente para limitar pérdidas

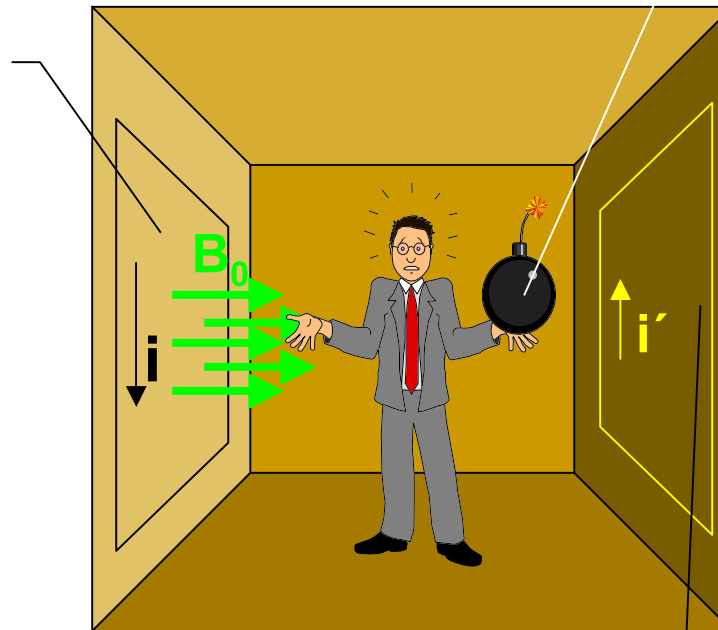


Detectores de metales

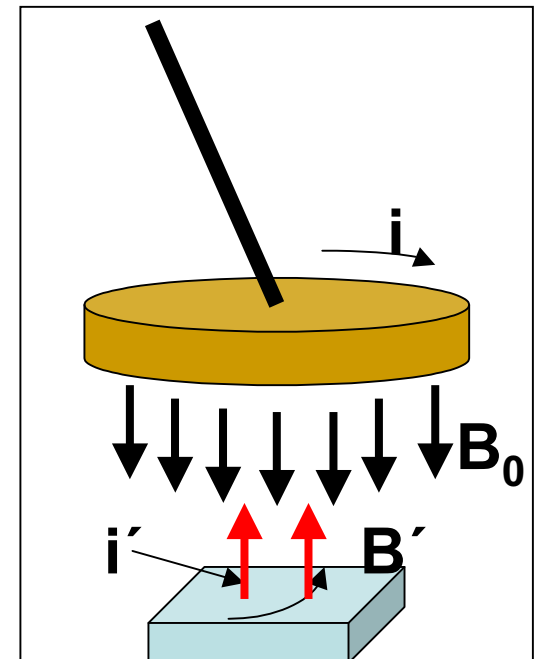
Sobre un objeto metálico se inducen i parásitas que, a su vez, producen un campo alterno B'



Bobina transmisora que genera B_0 alterno



Bobina receptora donde B' genera i' detectable



Autoinducción

Se vio que en bobina ideal $B = \mu_0 n i$

En general $B \propto i \Rightarrow \phi \propto i$

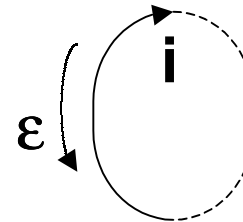
$$\phi = L i$$

L: coeficiente de autoinducción, depende de la geometría del circuito

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

$$[L] = [Wb A^{-1}] = [T m^{-2} A^{-1}]$$

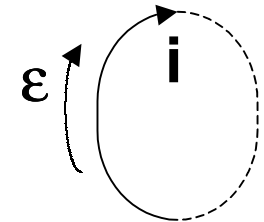
ε actúa en dirección opuesta al cambio de i



i crece

$$\frac{di}{dt} > 0$$

ε opuesto i

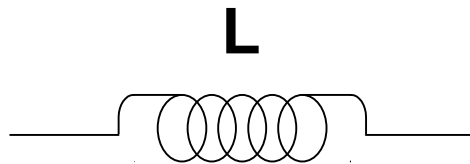


i decrece

$$\frac{di}{dt} < 0$$

ε igual i

símbolo



ε : fem inducida en una bobina por su propia corriente

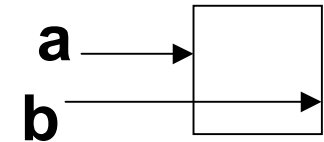
L de bobina ideal

$$\phi = N B S = N \mu_0 n i S$$

$$L = \frac{\phi}{i} = \mu_0 n^2 l S$$

Solo depende de factores geométricos (idem C)

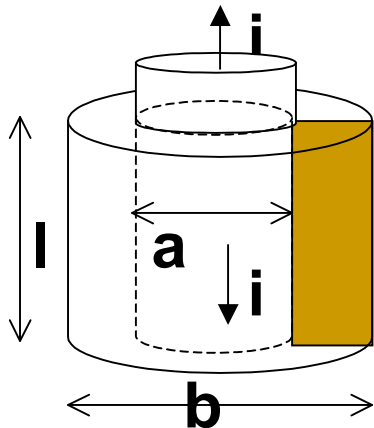
L de un toroide (sección cuadrada y radios a y b)



$$B = \frac{\mu_0 N i}{2 \pi r} \quad \phi = \int_a^b \frac{\mu_0 N^2 i}{2 \pi r} (b - a) dr$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2 \pi} (b - a) \ln \frac{b}{a}$$

L de dos cilindros coaxiales de longitud L y diámetros a y b con i en sentido opuesto



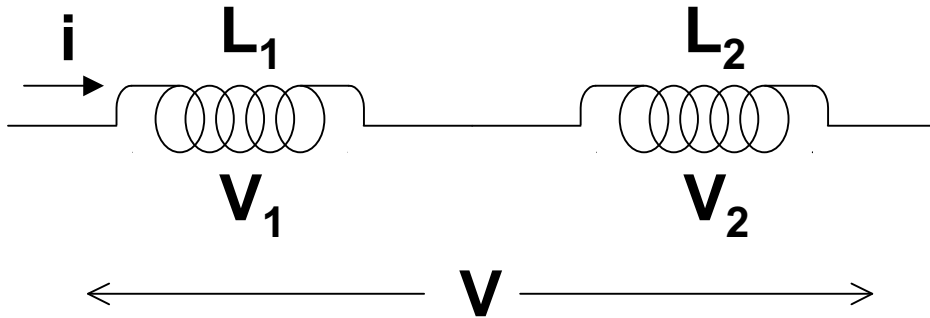
$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r}$$

$$\phi = \int_a^b \frac{\mu_0 i}{2 \pi r} l dr = \frac{\mu_0 i}{2 \pi} l \ln \frac{b}{a}$$

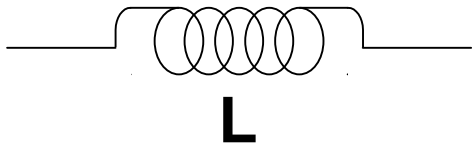
$$\left. \begin{array}{l} r < a/2 \\ r > b/2 \end{array} \right\} B = 0$$

$$L = \frac{\mu_0}{2 \pi} l \ln \frac{b}{a}$$

Inductancias en serie y paralelo

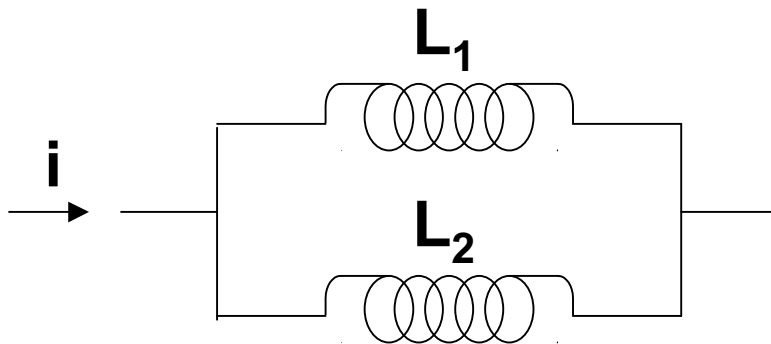


$$V = V_1 + V_2 = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}$$



$$V = L \frac{di}{dt}$$

$$L = \sum_j L_j$$

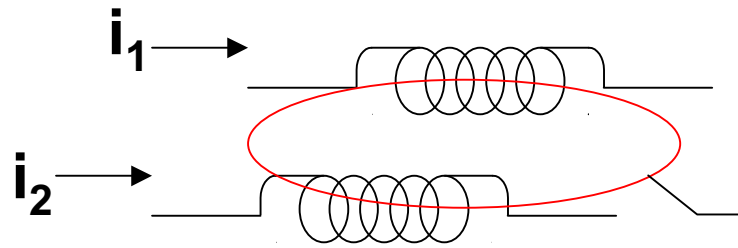


$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow di = di_1 + di_2$$

$$\frac{V}{L} dt = \frac{V}{L_1} dt + \frac{V}{L_2} dt$$

$$\frac{1}{L} = \sum_j \frac{1}{L_j}$$

Inducción mutua



$$\phi_1 = L_1 i_1 + M_{1-2} i_2$$

$$\phi_2 = M_{2-1} i_1 + L_2 i_2$$

acoplados

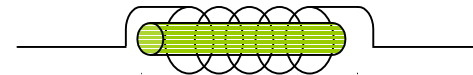
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{1-2} \frac{di_2}{dt}$$
$$\varepsilon_2 = -M_{2-1} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Acoplamiento magnético: se puede intercambiar energía entre dos circuitos mediante campos electromagnéticos variables

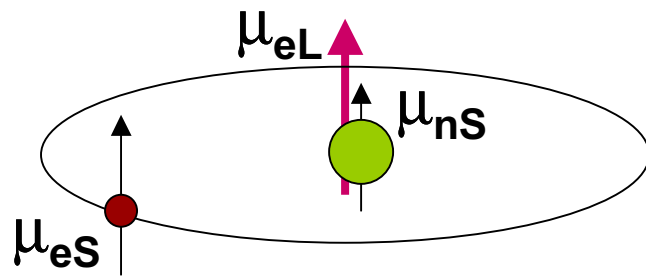
Se puede ver (Kipp, pag.) que $M_{1-2} = M_{2-1}$

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad 0 < k < 1$$

k=1: acoplamiento total: todo el flujo creado por 1 pasa por 2



Materiales magnéticos



3 momentos magnéticos

μ_{eL} : orbital electrónico

μ_{eS} : de spin electrónico

μ_{nS} : de spin nuclear

Analizando μ_{eL}

$$i = \frac{q}{T} = \frac{e}{2\pi r/v}$$

$$\mu = \frac{e v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e v r}{2}$$

$L = m v r$ **Momento angular =>** $\mu = \frac{e}{2m} L$

$$L = n \frac{h}{2\pi} \quad h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$\mu_B = \frac{e}{2m} \left(\frac{h}{2\pi} \right) = \frac{e h}{4\pi m}$$

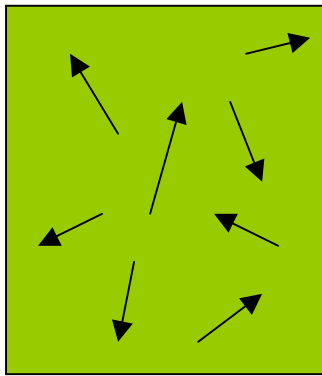
Magnetón de Bohr

$$\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^{-2} (\text{J T}^{-1})$$

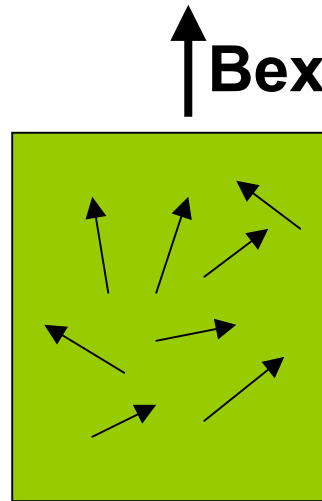
$$\mu_{eS} \cong 1,001 \mu_B$$

$$\mu_{nS} \cong (1/300) \mu_B$$

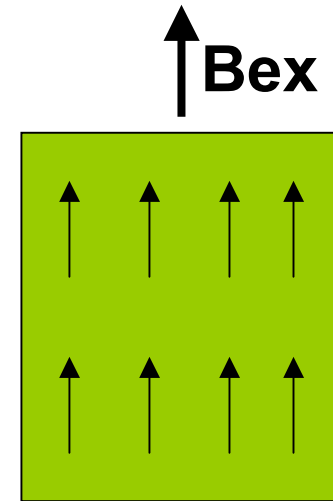
El comportamiento magnético de un material se puede estudiar analizando el de sus momentos magnéticos elementales



**Orientación al azar
por agitación térmica**



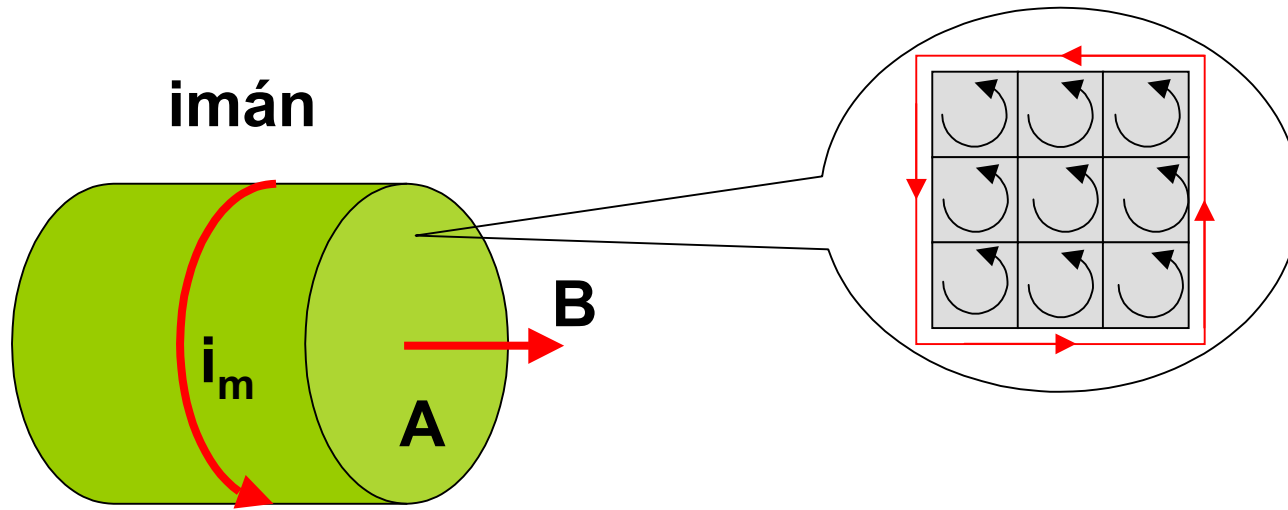
**Alineación parcial
en campo débil**



**Saturación en campo
fuerte**

μ neto de un material es la resultante de sus μ elementales

**μ neto: definido por dos procesos competitivos: agitación
térmica (T) y tendencia a alineación por B_{ex} y B internos**



I_m : corriente imaginaria que produce el mismo B que el material magnetizado

I_m : i de magnetización

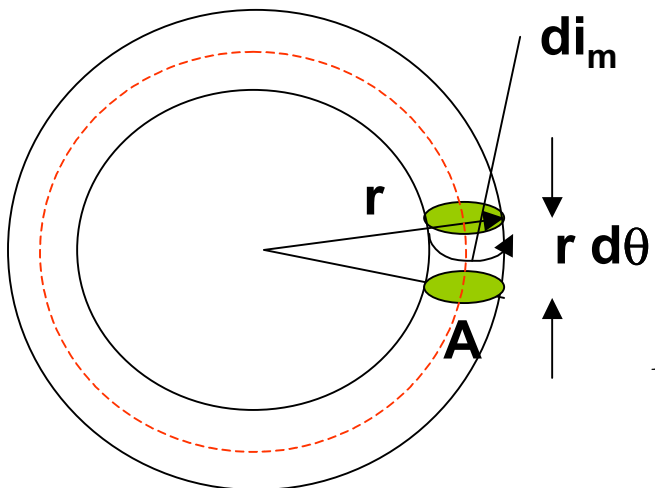
B puede pensarse como producida por i_m $\mu_T = i_m A$

Se define $\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_T}{Vol}$ (análogamente a $\vec{P} = \frac{\vec{p}_T}{Vol}$)

Vector magnetización

Si M no es constante

$$d\vec{\mu}_T = \vec{M} dV \Rightarrow \vec{\mu}_T = \int \vec{M} dVol$$



$$dVol = A r d\theta \quad di_m = \frac{d\theta}{2\pi} i_m$$

$$M = \frac{A di_m}{A r d\theta} = \frac{di_m}{r d\theta} = \frac{i_m}{2\pi r}$$

$$i_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

$$[M] = A / m$$

Si material está en toroide de N vueltas, B estará compuesto de dos componentes: el de las corrientes reales y el de las corrientes de magnetización

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (N i + i_m) = \mu_0 (N i + \oint \vec{M} \cdot d\vec{l})$$

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = N i$$

Si $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H}$ **Vector intensidad de campo magnético**

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Equivalente a $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N i$$

H depende solo de las i reales

En vacío $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

En material $\vec{M} \propto \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \chi \vec{H}$

χ : susceptibilidad magnética (adimensional)

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

μ : permeabilidad magnética

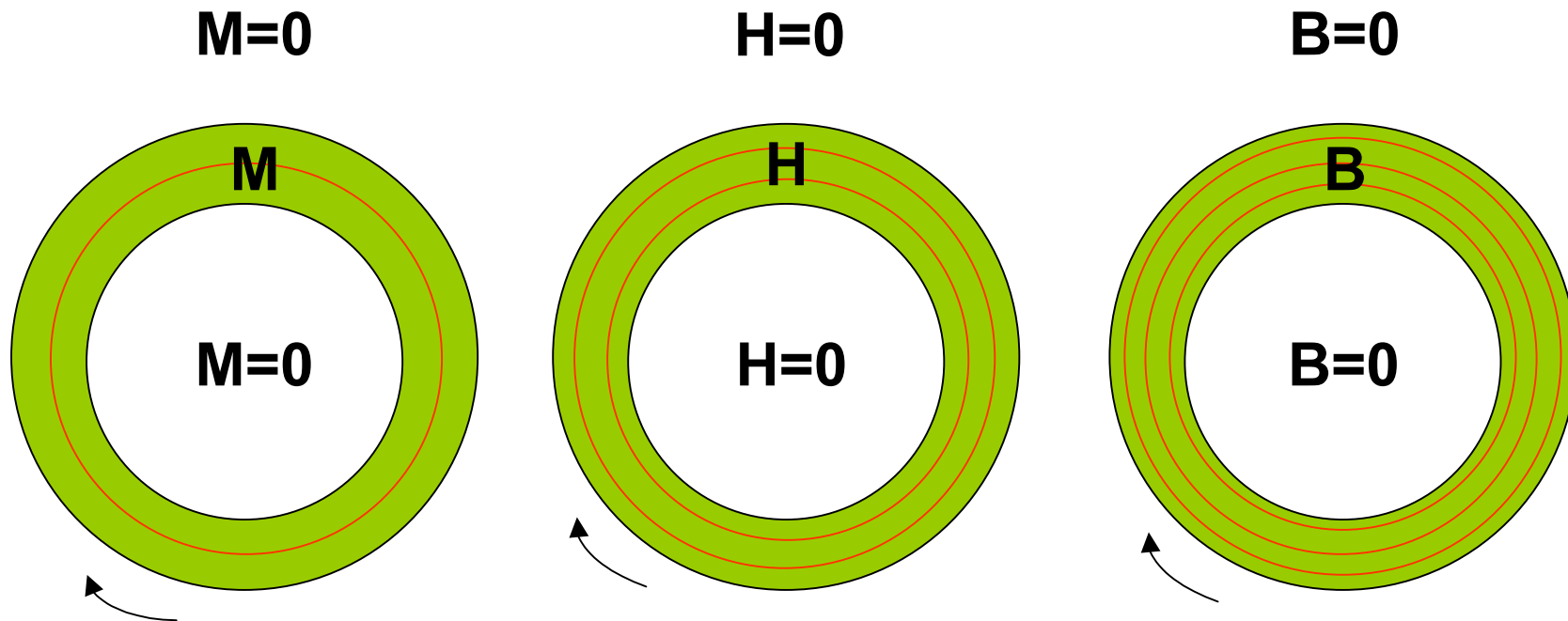
$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \quad (1 + \chi) = \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r$$

Permeabilidad relativa

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

Muestra toroidal uniformemente magnetizada



En material con $\chi > 0$, B aumenta respecto al valor en vacío

Energía del campo magnético

En una bobina $|\varepsilon| = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{d\phi}{dt}$

Potencia $P = \frac{dU}{dt} = \varepsilon i = L i \frac{di}{dt}$

$$U = \int P dt = \int L i di$$

$$U = \frac{1}{2} L i^2$$

Energía almacenada en los campos magnéticos de la bobina (cte. o variable según lo sea i)

Densidad de energía $u = \frac{U}{Vol} = \frac{\frac{1}{2} L i^2}{A S} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 n^2 l S}{l S} \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}$

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Expresión válida en general

En material magnético $u = \frac{1}{2\mu} B^2$

Materiales con distinto comportamiento magnético básico

Paramagnético: $\chi > 0$, $\chi \sim 0,00001 - 0,003$; alineación relativa de dipolos elementales debido a campo externo limitada por agitación térmica. Al quitar H la magnetización desaparece. Efecto presente en todos los materiales.

Diamagnético: $\chi < 0$, $\chi \sim -0,00029 - -0,00001$; alineación relativa de dipolos elementales debida a campo externo limitada por agitación térmica y con resultante opuesta a H. Al quitar H la magnetización desaparece. Efecto presente en todos los materiales pero

Ferromagnético: Fe, Co, Ni, Gd o aleaciones que los contengan, $\chi > 5000$; alineación de los dipolos elementales con campo externo y entre si. Al quitar H queda magnetización remanente.

Materiales paramagnéticos

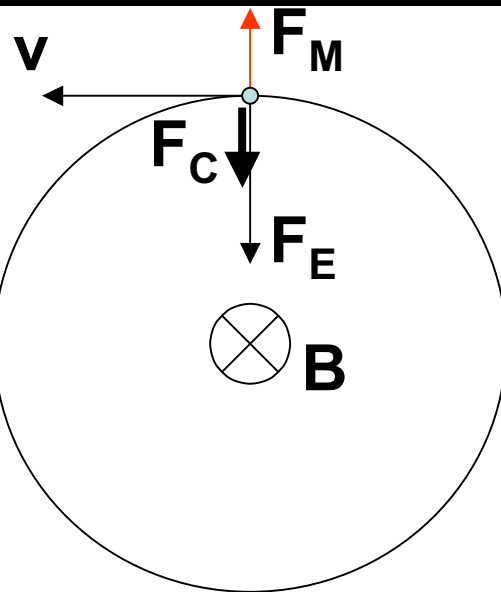
χ disminuye al aumentar T por la agitación térmica

En muchos casos $M = C \frac{B}{T}$ **Ley de Curie**

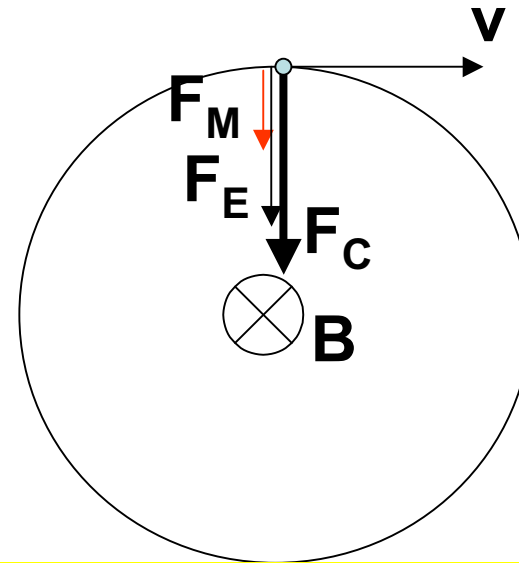
Susceptibilidades a T=20 °C

Material	$\chi \cdot 10^{-5}$
Uranio	40
Platino	26
Aluminio	2,2
Sodio	0,72
Oxígeno gaseoso	0,19

Materiales diamagnéticos

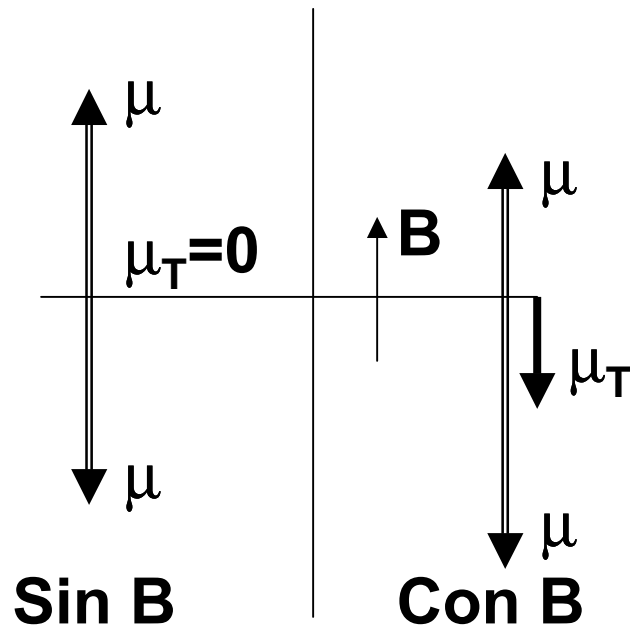


$$F_C = m \frac{v^2}{r}$$



Principio de exclusión de Pauli

Susceptibilidades a T=20 °C

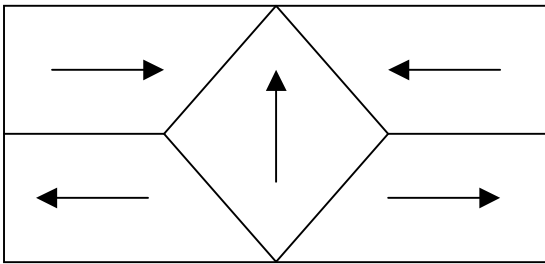


Material	$\chi \cdot 10^{-5}$
Bismuto	-16,6
Mercurio	-2,9
Plata	-2,6
Plomo	-1,8
Cobre	-1,0

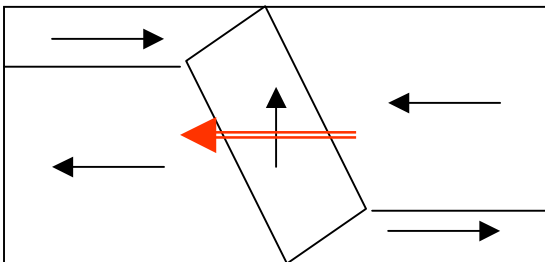
$\chi \sim$ independiente de T

Materiales ferromagnéticos

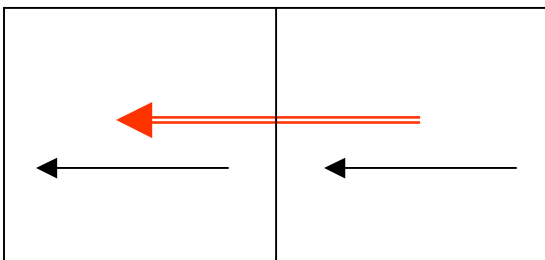
Fuertes interacciones magnéticas entre μ atómicos producen alineaciones totales en regiones llamadas “dominios magnéticos” ($\sim 10^{-6}$ m hasta mm) aun sin campo exterior



$B_0=0$, dominios orientados al azar



$B \neq 0$, crecen dominios con orientaciones favorables a expensas de los otros (desplazamiento de paredes de dominios)



B lo suficientemente intenso como para producir alineación total de dominios

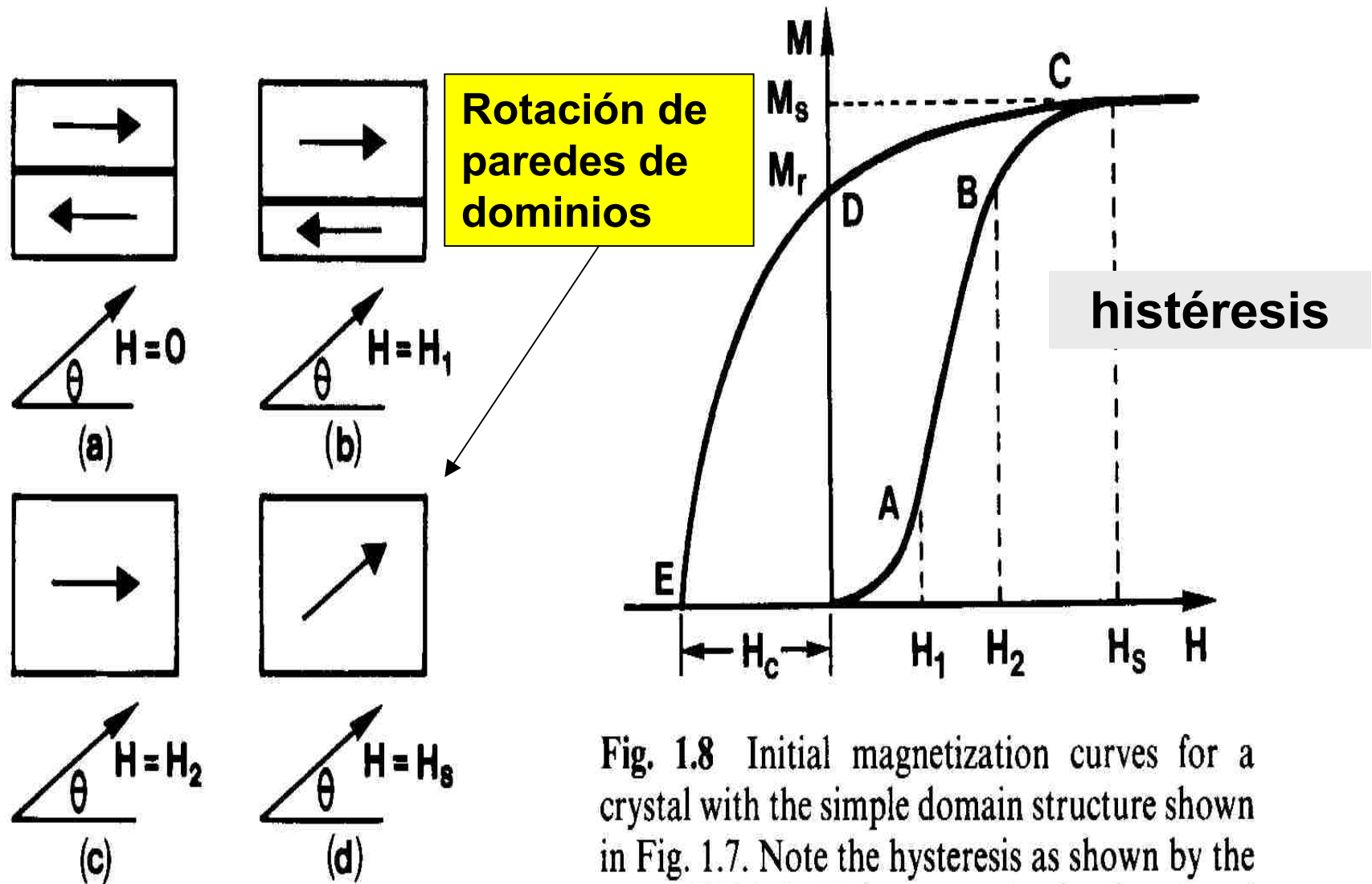
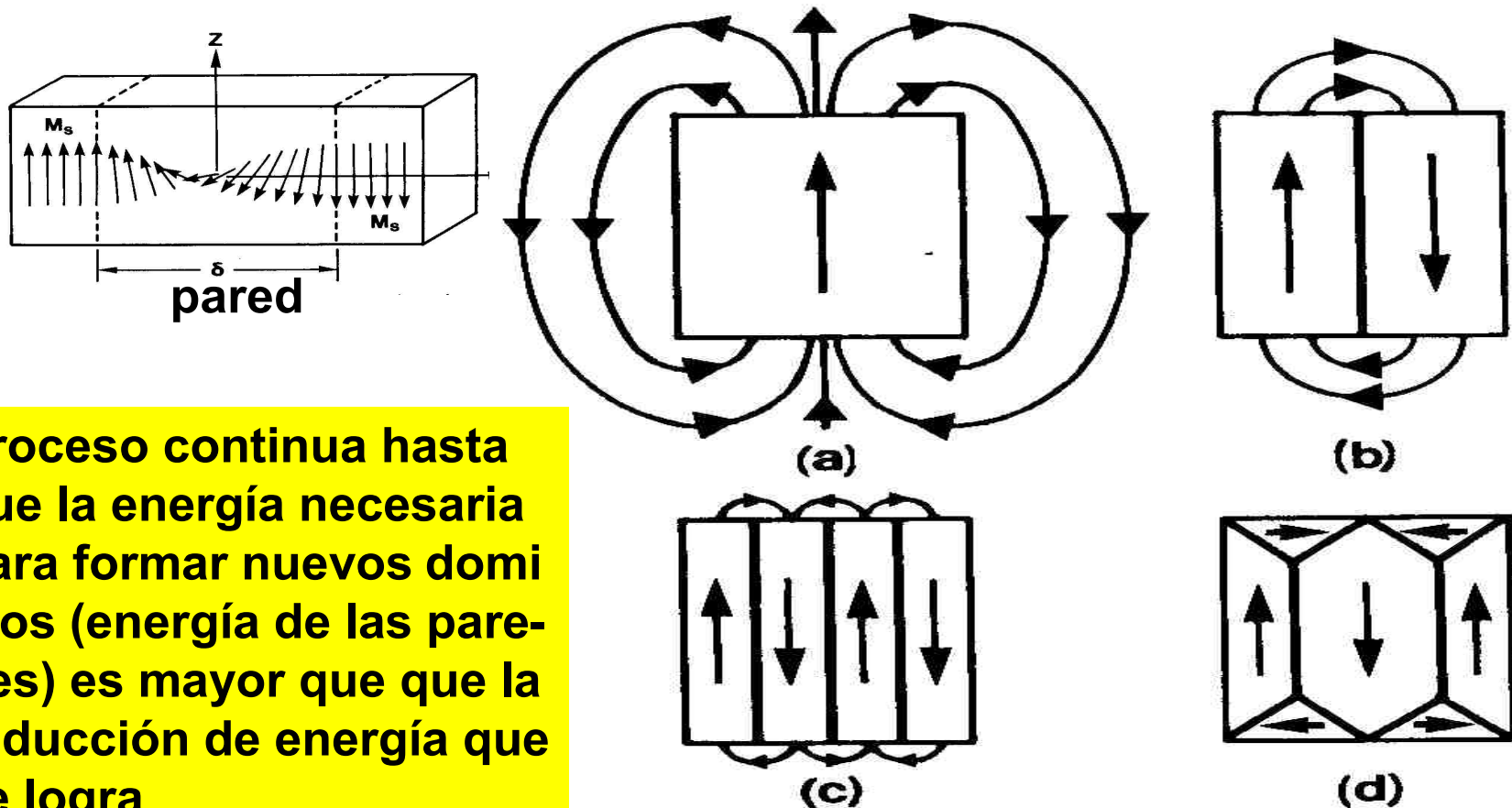


Fig. 1.7 Changes in domain structure with increasing applied field.

Fig. 1.8 Initial magnetization curves for a crystal with the simple domain structure shown in Fig. 1.7. Note the hysteresis as shown by the curve CDE. At E the magnetization is reduced to zero in a reverse applied field H_c known as the coercivity.

Por que se forman los dominios magnéticos?

Formación espontánea de dominios en materiales ferromagnéticos de manera de reducir la energía asociada con la pérdida de flujo magnético en el espacio circundante



Proceso continua hasta que la energía necesaria para formar nuevos dominios (energía de las paredes) es mayor que la reducción de energía que se logra

Existe una temperatura para cada material ferromagnético (T de Curie) por encima de la cual se vuelve paramagnético

Si M de material magnetizado en toroide colapsa porque se pone en cc los bornes de la bobina

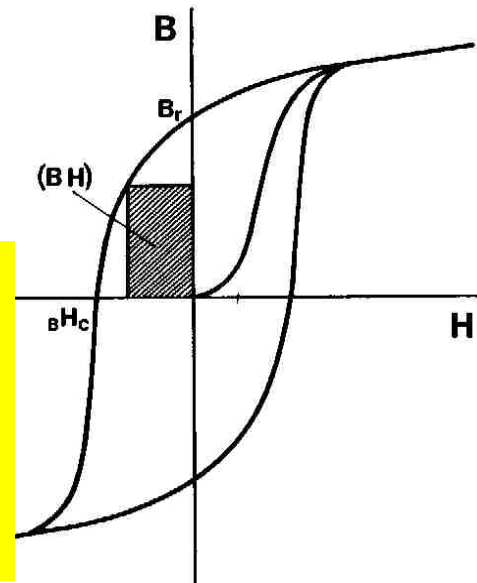
$$dU_m + \varepsilon i dt = dU_m - N \frac{d\phi}{dt} i dt = 0$$

$$d\phi = A dB \quad H = \frac{Ni}{2\pi r} = \frac{Ni}{l}$$

$$dU_m = H l A dB = H Vol dB$$

$$\frac{\Delta U_m}{Vol} = \int H dB$$

Material	T Curie (°C)
Fe	770
Co	1122
Ni	358
Gd	16
Ds	-188



Energía disipada en cada ciclo es igual al área encerrada por la curva de histéresis

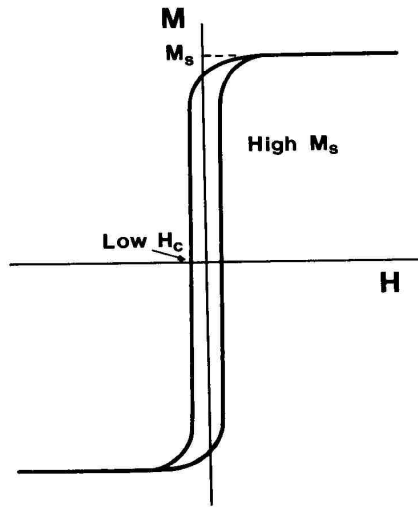


Fig. 1.9 $M-H$ hysteresis loop.

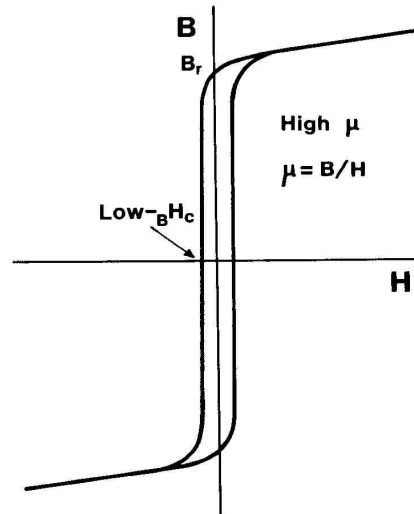
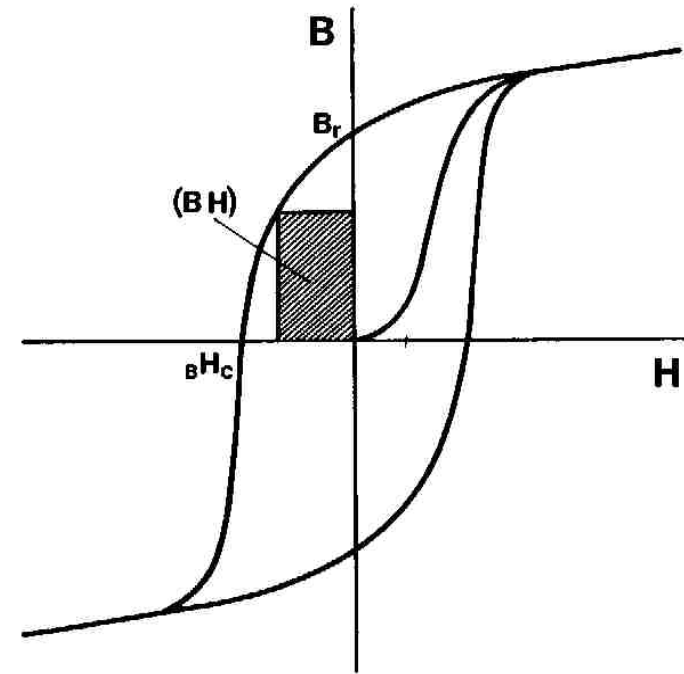


Fig. 1.10 $B-H$ hysteresis loop. Note that this curve does not saturate, because B continues to increase with H even after the material magnetization has reached saturation, $B = \mu_0(M + H)$, so $B = \mu_0(M_s + H)$.

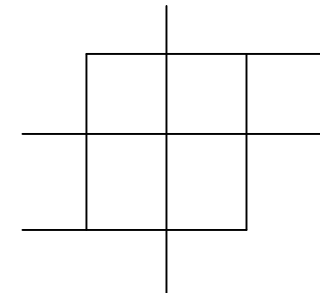


$1-10 \text{ Am}^{-1}$ materiales muy blandos
 $>10^6 \text{ Am}^{-1}$ materiales duros SmCo_5

Magnetos blandos: núcleos en campos alternativos

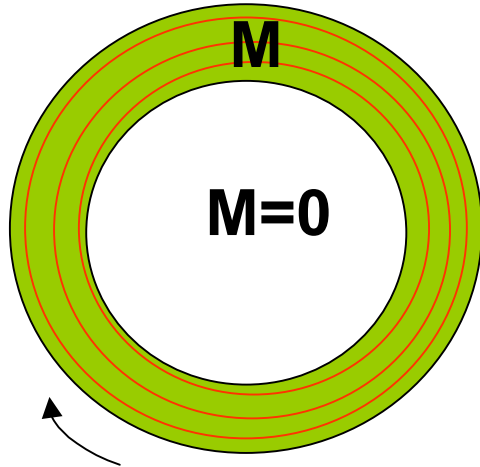
Magnetos duros: imanes permanentes

Memorias magnéticas: histéresis rectangular



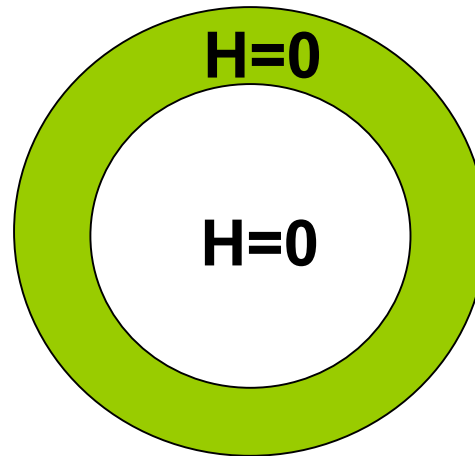
Imanes permanentes

$$M=0$$



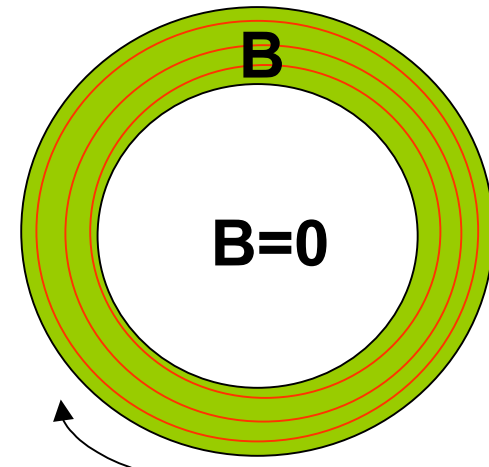
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_m$$

$$H=0$$

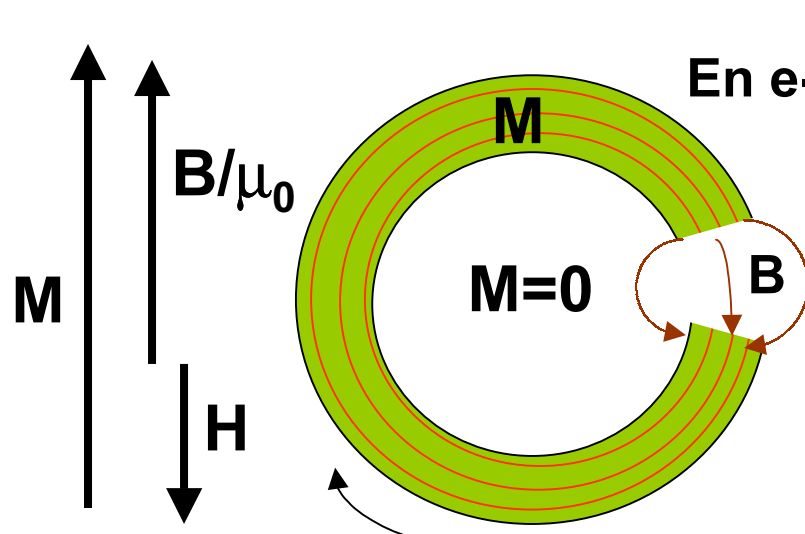


$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{l} = i_m \quad B = \mu_0 M$$

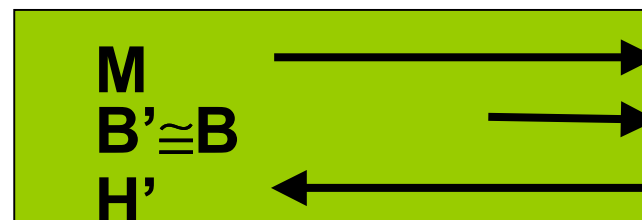
$$B=0$$



Con entrehierro, M en material no cambia y en e-h $M=0$; B producido por i_m que se redujo en $\Delta i_m = (\Delta\theta/2\pi)i_m$ cambia poco en el material si $\Delta\theta$ es chico respecto al valor anterior ($\mu_0 M$) y fuera idem, salvo distorsión



En e-h $H = \frac{B}{\mu_0}$ y como $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

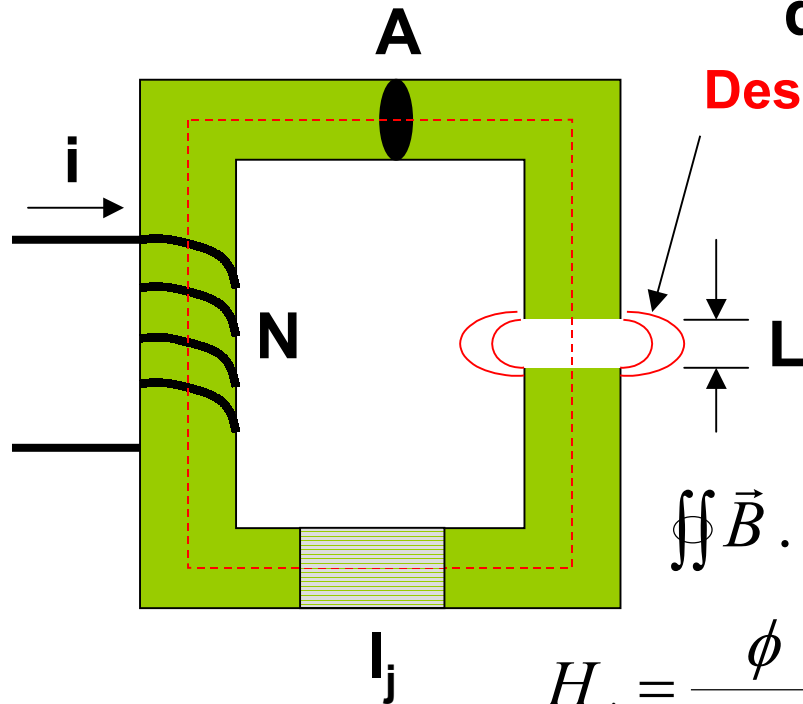


H en el material tiene sentido contrario

$M=0$
 $B = \mu_0 H$
 H

Circuitos magnéticos

Líneas de B creado por i confinadas dentro del material ferromagnético



Despreciando efectos de borde

Si material compuesto por varias partes de long l_j y permeabilidad μ_j

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_j H_j l_j = N i$$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = B A = \mu H A = cte$$

$$H_j = \frac{\phi}{\mu_j A_j}$$

$$\sum_j \frac{\phi}{\mu_j A_j} l_j = N i$$

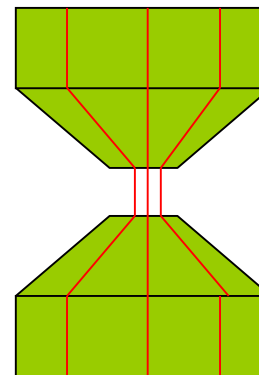
$$\phi R = f_{mm}$$

f_{mm} : fuerza magnetomotriz
R: reluctancia

En nuestro caso

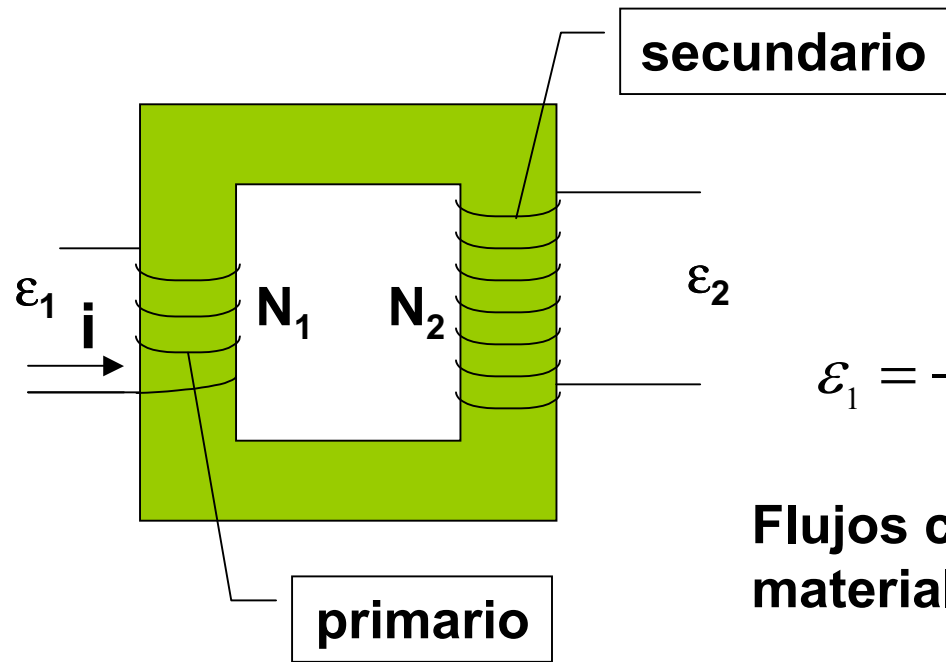
$$B A = \frac{N i}{\frac{l}{\mu A} + \frac{L}{\mu_0 A}}$$

$$B = \frac{\phi}{A}$$



Con geometría de las piezas polares se puede controlar intensidad de B

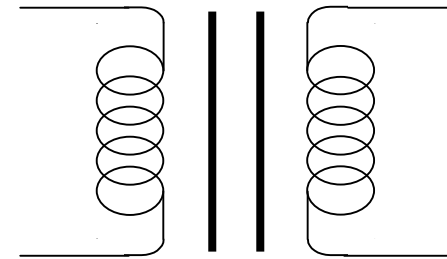
Bobina de inducción y Transformador



$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad \varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

Flujos concatenados por material ferromagnético

símbolo



$$\varepsilon_2 = \frac{N_2}{N_1} \varepsilon_1$$

Bobina de inducción si ε_1 es de cc: se obtiene ε_2 alta para excitar bujías de encendido de automotores a partir de una fem baja (12 V de batería) al conectar y desconectar el circuito

Transformador para reducir o aumentar una tensión de alterna (fuentes de aparatos electrónicos, transmisión de energía, etc)

Transmisión de energía

Solo económico transmisión con alto V pues pérdidas dependen de i^2

Ejemplo: transmisión de 10^8 W por línea con $R=1\Omega$

$$P = 10^8 \text{ W} = \varepsilon i$$

Una posibilidad: $\varepsilon = 10^6 \text{ A}$, $V = 10^2 \text{ V}$

$$\text{Potencia disipada } P = i^2 R = (10^6)^2 1 = 10^{12} \text{ W}$$

Disparate: 10^4 veces > potencia necesaria

Pero si $i = 10^3 \text{ A}$ y $V = 10^5 \text{ V}$

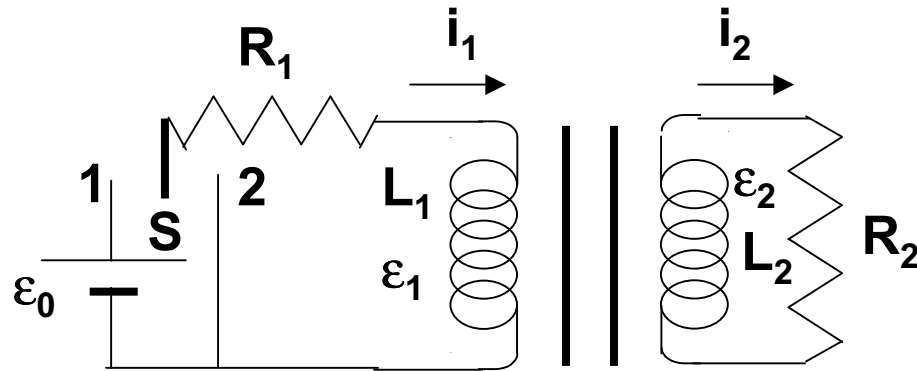
$$\text{Potencia disipada } P = i^2 R = (10^3)^2 1 = 10^6 \text{ W}$$

Razonable: pérdidas
1 % de la potencia
requerida

Difícil fabricar generadores de 10^5 V . Bajar R es caro pues se necesitan conductores gruesos y el Cu es caro

Solución: generación a bajos V; elevación mediante transformadores a V adecuados para transmisión; en destino reducción de voltajes con transformadores a niveles adecuados para el consumo

Bobina de inducción



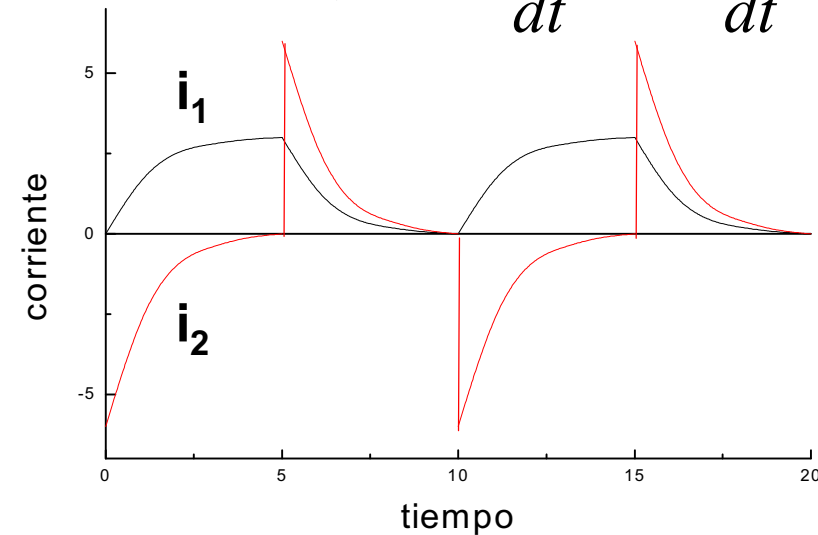
S alternativamente en 1 y 2 (platinos en distribuidor)

$$\varepsilon_0 - i_1 R_1 + \varepsilon_1 = 0 \quad -i_1 R_1 + \varepsilon_1 = 0$$

$$\varepsilon_2 - i_2 R_2 = 0$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} \\ \varepsilon_2 = -\sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$



Operando (pasos en McKelvey/856)

Con S en 1

$$i_1(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_1} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$i_2(t) = -\frac{\varepsilon_0}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} e^{-t/\tau}$$

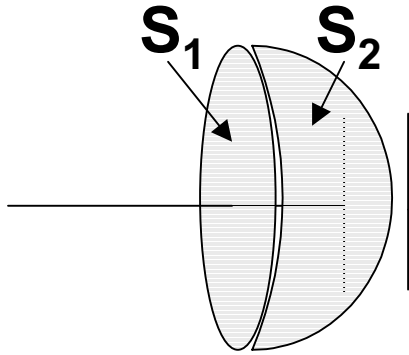
$$\Delta V_{R_2} = i_2 R_2 = -\varepsilon_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} e^{-t/\tau} = -\varepsilon_0 \frac{N_2}{N_1} e^{-t/\tau}$$

Si $N_1/N_2=1000$ con batería de 12 V se tienen picos de 12000 V

Ecuaciones de Maxwell

Corriente de desplazamiento

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$



El mismo contorno corresponde a dos superficies: por S_1 pasa i y por S_2 $i=0$

?

Maxwell propuso reemplazar i por $i_c + i_d$

i_c : corriente de conducción

i_d : corriente de desplazamiento

i_d debe estar relacionada con la rapidez de cambio de E

$$i_c = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \div \text{por } A \Rightarrow j_c = \frac{d\sigma}{dt} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow j_c = \epsilon \frac{dE}{dt} = j_d \quad \text{continuidad}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 j_c S = \mu_0 \epsilon \frac{dE}{dt} S = \mu_0 \epsilon \frac{d\phi_E}{dt} \quad i_c = i_d = \epsilon \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_d)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon \frac{d\phi_E}{dt}$$

$$\phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Las cargas eléctricas son las fuentes y sumideros de los E

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

No existen los monopolos (fuentes) magnéticos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Campos magnéticos variables en el tiempo crea campos eléctricos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 j_c + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Campos eléctricos variables en el tiempo generan campos magnéticos

Ecuación de las ondas electromagnéticas En vacío

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En una dimensión

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{B} = \nabla^2 \vec{B} - \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

**Ecuación de onda
de velocidad v**

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$