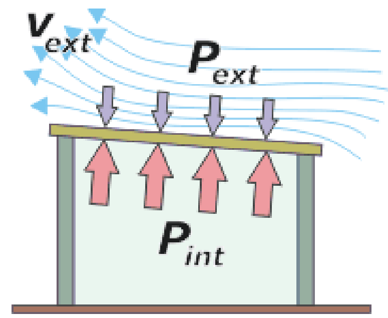
PROBLEMAS DE HIDRODINAMICA
CAUDAL – ECUACION DE CONTINUIDAD – BERNOULLI
Fluidos no viscosos e incompresibles.

H1)

El caudal medio de la sangre que circula en un tramo de un vaso sanguíneo que no presenta ramificaciones es de 1 litro por minuto. Densidad aproximada de la sangre 1 kg/lt.
a) ¿Cuál es la velocidad media de la sangre en un tramo en el que vaso tiene un radio interior de 0,5 cm?
b) ¿Y si el radio interior del vaso es de 0,25 cm?

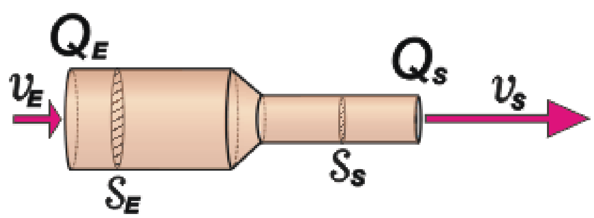
H2)

a) ¿A qué se debe que bajo los efectos del viento los techos de chapa tienden a volarse hacia arriba?
b) Algunos productos de limpieza vienen en envases plásticos provistos de un gatillo pulverizador. Explique el funcionamiento de este dispositivo.
c) ¿Por qué es peligroso pararse muy cerca del borde de un andén?



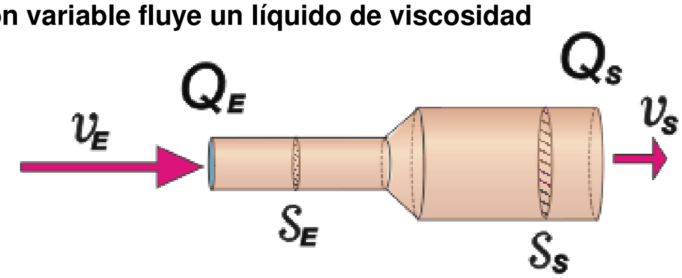
H3)

Un líquido de densidad 1 kg/lt se mueve a razón de 3 mm/seg por un tubo horizontal de 2 cm de diámetro. En cierta parte, el tubo reduce su diámetro a 0,5 cm.
a) ¿Cuál es la velocidad del líquido en la parte angosta del tubo?
b) ¿Cuál es la diferencia de presión del líquido a ambos lados del angostamiento?
c) ¿Bajo qué hipótesis son válidas sus respuestas?



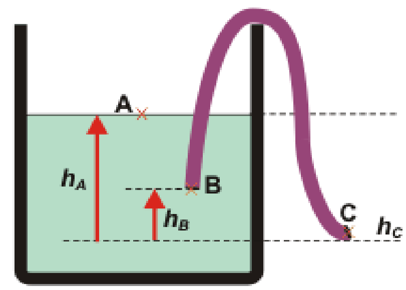
H4)

Por un caño horizontal de sección variable fluye un líquido de viscosidad insignificante. Calcular la diferencia de presión entre los extremos del caño en función de la velocidad de entrada, *v*, y la densidad del líquido, *δ*, si:
a) la sección a la salida del caño es el triple que la de entrada,
b) el diámetro a la salida del caño es el triple que el de la entrada.



H5)

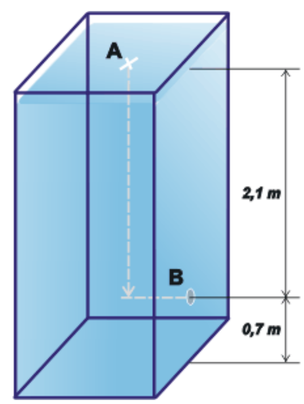
Se llena una manguera con nafta y se cierra por sus dos extremos. Se introduce un extremo en un depósito de nafta a *0,3m* por debajo de la superficie y el otro a *0,2 m* por debajo del primer extremo y se abren ambos extremos. El tubo tiene una sección transversal interior de área $4 \times 10^{-4}\ m^2$. La densidad de la nafta es 680 $kg\ m^{-3}$.



a) ¿Cuál es la velocidad inicial de la nafta?
b) ¿Cuál es el caudal inicial del flujo?

H6)

Se tiene un recipiente de sección cuadrada mucho mayor que 1 cm^2, lleno de agua hasta una altura de 2,8 m con una pequeña abertura de sección 1 cm^2 a 0,7 m de altura, tapada por un corcho.
a) Calcular la presión manométrica sobre el corcho.
b) Si se extrae el corcho, calcular la velocidad de salida del líquido.



H7)

Para un tubo horizontal de sección variable, como muestra la figura, con un fluido viscoso que entra por un extremo y sale por el otro, determine para los puntos A, B y C, qué opción es la correcta.

a) La velocidad en C es menor que en A.
b) Las velocidades y presiones en los tres puntos son iguales.
c) Las presiones en A y C son iguales.
d) La velocidad y la presión en A son mayores que en B.
e) La veloc. en A es menor que en B, y la presión en A es mayor que en C.
f) La diferencia de presión entre A y B es la misma que entre C y B.

H8)

Por un caño horizontal fluye un líquido de viscosidad insignificante, densidad 1000 kg/m^3 y velocidad 2 m/s. En un tramo la cañería se angosta disminuyendo su diámetro a la mitad. Entonces, la presión en la parte ancha de la cañería:

a) es inferior a la presión en la parte angosta en 6 kPa,
b) es inferior a la presión en la parte angosta en 30 kPa,
c) es igual a la presión en la parte angosta,
d) excede a la presión en la parte angosta en 6 kPa,
e) excede a la presión en la parte angosta en 12 kPa,
f) excede a la presión en la parte angosta en 30 kPa.

H9)

Se oprime el émbolo de una jeringa de modo que por la aguja sale líquido con caudal Q. Si se alivia la presión sobre el émbolo de modo de reducir el caudal a la mitad, considerando un líquido ideal, la diferencia de presión entre el líquido que se mueve por la aguja, A, y el que se mueve por el émbolo, E, respecto de su valor anterior es:

a) el doble, siendo en cada caso la presión en A mayor a la de E,
b) el doble, siendo en cada caso la presión en E mayor a la de A,
c) la mitad, siendo en cada caso la presión en A mayor a la de E
d) la mitad, siendo en cada caso la presión en E mayor a la de A,
e) un cuarto, siendo en cada caso la presión en E mayor a la de A,
f) un cuarto, siendo en cada caso la presión en A mayor a la de E.

H10)

Un caño horizontal de 5 cm^2 de sección, que transporta agua (considerarla fluido ideal) a 2 m/seg tiene un tramo de 2,5 cm^2 de sección. Entonces, la diferencia de presión entre
ambas secciones, expresada en pascales, es:

a) 500	**b) 1,5**	**c) 6.000**
d) 1.500	**e) 375**	**f) 5**

H11)

¿Qué fuerza produce un viento de 120 km/h sobre un techo de chapa de 3m x 3m? Considerar la densidad del aire 1,2 g/lt.

a) 2.500 kgr	**b) 500 ton**	**c) 250 kgr**
d) 150 kgr	**e) 31 kgr**	**f) 600 kgr**

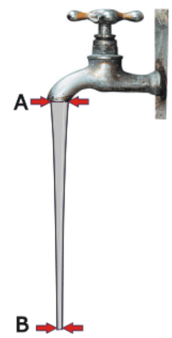
H12)

Un tanque de agua de 6.000 litros de capacidad se encuentra a 20 m de altura. ¿Qué presión, en atm por encima de la atmosférica, debería proveer la empresa que suministra el agua para que la misma llegue hasta el tanque?

a) 4 b) 1 c) 10 d) 2 e) 20 f) 0,2

H13)

Una canilla tiene una sección de 2 cm^2 y por ella circula agua con un caudal volumétrico de 12 litros por minuto. Si el chorro tiene una longitud de 45 cm, determinar la sección inferior del mismo*.



RESOLUCIONES Y RESPUESTAS

RH1) Este ejercicio se resuelve simplemente aplicando la relación (a veces llamada de continuidad) que dice que el caudal es igual al producto entre la sección del conducto y la velocidad media del fluido:

$Q = S . v$

de ahí despejamos la velocidad

Rta: $v = 21,2$ cm/s
Si el radio interior fuese la mitad del anterior, entonces la velocidad va a ser cuatro veces mayor. Hacé la cuenta vos.

RH2) El principio de Bernoulli tiene algunas aristas contrarias a la intuición. Este ejercicio nos ofrece 3 ejemplos en los que se nota este aspecto en el que, si nos agarran desprevenidos, reponderíamos contariamente a lo que ocurre en la realidad, y cuya explicación descansa en la predicción de Bernoulli.

Supongamos que un día de tormenta se produce una ráfaga de viento muy violenta. En ese momento una ventana mal cerrada puede abrirse inesperadamente. Podríamos prever que el viento presiona con fuerza sobre la ventana que es abierta hacia adentro de la casa. Lo que ocurre es lo contrario, se abre hacia afuera.

Exactamente el mismo fenómeno ocurre cuando se vuelan las chapas de techo, que salen volando para desgracia de los ocupantes de la vivienda. No se trata de que el viento las enganche desde los aleros o salientes. Lo que ocurre es que se cumple el principio de Bernoulli:

$$P_{int} + \tfrac{1}{2}\delta_{aire}\, v_{int}^2 = P_{ext} + \tfrac{1}{2}\delta_{aire}\, v_{ext}^2$$

En esta comparación entre el interior de la vivienda y el exterior, he borrado los términos de la energía potencial, ya que en el fenómeno que voy a explicar no hay diferencias de altura.

Como la velocidad del viento en el interior de la vivienda es nulo podemos prescindir del segundo término:

$$P_{int} = P_{ext} + \tfrac{1}{2}\delta_{aire}\, v_{ext}^2$$

Acá vemos claramente que la presión interior debe ser mayor que la exterior ya que debe ser igual a la suma de la presión exterior más el término de energía cinética del viento. La diferencia entre la presión exterior e interior es mayor cuanto mayor sea la velocidad del viento. Esa diferencia de presiones es la que empuja techos o ventanas hacia el exterior.

El asunto del pulverizador es complicado, debido a que en el mercado existen varios mecanismos que funcionan de diferente manera. Uno de ellos es éste.

El que utiliza el principio de Bernoulli es el mismo que el aerógrafo, que se utiliza para pintar y es el que usan los chapistas para pintar los autos. Consiste en un chorro de aire de gran velocidad que pasa por la desembocadura de un tubo cuyo extremo inferior está sumergido en el depósito de pintura, igual que estaría una chimenea con una abertura dentro de la vivienda y el otro sobre el techo. La diferencia de presión entre el interior y el exterior hace que la columna de pintura ascienda y al alcanzar la corriente de aire es arrastrado y puverizado por éste.

Todavía se consiguen aerógrafos escolares para pintar con témperas, en los que la corriente de aire se logra soplando con la boca.

La última pregunta nos previene de que las fuerzas producidas por la diferencia de presión, producidas a su vez por la diferencia de velocidad del aire entre un lugar y otro, pueden desplazarnos sin querer hacia lugares peligrosos.

Si vas a youtube y buscás con este simple criterio: Bernoulli, vas a encontrar cantidad de videos en los que se observan desplazamientos inesperados provocados por corrientes de aire, hacia el lado opuesto al que nuestra intuición lo hubiera previsto.

DESAFÍO: ¿Por qué la trayectoria de la pelota adquiere comba si se la impulsa con rotación sobre sí misma?

Rta: El giro (o *spin*) produce una corriente de aire alrededor de la pelota, de un lado acompaña el desplazamiento de la pelota y del otro va en contra. Eso produce una diferencia de presión de aire de desvía a la pelota de costado.

RH3) Un típico ejercicio de fluidos en el que lo importante es que manejes los números y las unidades con fluidez.

Acordate que una sección circular es igual a: $S = (\pi/4)\ d^2$, de modo que...

$$S_E = (\pi/4)\ d_E^2 = (\pi/4)\ 4\ cm^2$$

$$S_S = (\pi/4)\ d_S^2 = (\pi/4)\ 0.25\ cm^2$$

Ahora, el principio de continuidad (conservación de la cantidad de materia) asegura:

$$Q_E = Q_S$$

$$S_E\ .\ v_E = S_S\ .\ v_S$$

Vs = Ve.SE/Ss

a) $v_S = 48\ mm/s$

Ahora tenemos que usar la ecuación de Bernoulli. Pero no vamos a poder zafar -como en el caso anterior en el que se cancelaban las unidades no homogéneas- de pasar todas las unidades a un sistema único. Pasemos todo a **MKS** y de paso calculemos los cuadrados de las velocidades, que es lo que requiere Bernoulli.

$v_E = 3\ mm/s = 3\ x10^{-3}\ m/s$

$v_E^2 = 9 \times 10^{-6}\ m^2/s^2$

$v_S = 48\ mm/s = 48 \times 10^{-3}\ m/s$

$v_S^2 = 2.304 \times 10^{-6}\ m^2/s^2$

Ahora sí, vamos a Berni:

$\Delta P = \frac{1}{2}\delta\ (v_E^2 - v_S^2)$

$\Delta P = \frac{1}{2}\ 1.000\ kg/m^3\ (9 \times 10^{-6}\ m^2/s^2 - 2.304 \times 10^{-6}\ m^2/s^2)$

$\Delta P = -\ \frac{1}{2}\ 10^3\ kg/m^3\ .\ 2,3 \times 10^{-3}\ m^2/s^2$

b) $\Delta P = -\ 1,15\ Pa$

La respuesta **c)** requiere fundamentalmente que des las características de los fluidos ideales (aquellos a los que puede aplicarse el principio de Bernoulli), o sea: que no sean viscosos, que no cambie el caudal, que sean irrotacionales, que sean laminares, que no sean dulces ni salados, ni contengan sustancias alucinógenas...

RH4) Acá otro problema típico de conservación de energía en un fluido (Bernoulli). Vamos con la primera parte en la que la sección de salida triplica la de entrada.

Escrita como ecuación, la condición del ejercicio dice:

$3\ S_E = S_S$

Eso tiene su consecuencia en la velocidad, y en la velocidad al cuadrado, ya que:

$Q_E = Q_S$

$S_E\ .\ v_E = S_S\ .\ v_S$

$S_E\ .\ v_E = 3\ S_E\ .\ v_S$

$v_E = 3\ v_S$

$v_E^2 = 9\ v_S^2$

$v_E^2 / 9 = v_S^2$

Ahora podemos plantear la ecuación de Bernoulli (sin los términos de energía potencial ya que todo ocurre a la misma altura).

$\Delta P = \frac{1}{2}\delta\ (v_E^2 - v_S^2)$

$\Delta P = \frac{1}{2}\delta\ (v_E^2 - v_E^2 / 9) = \frac{1}{2}\delta\ (8/9)\ v_E^2$

$\Delta P = (4/9)\ \delta\ v_E^2$ **a)**

La nueva condición del ejercicio relaciona los diámetros de los tubos, no sus secciones:

$3\ d_E = d_S$

$9\ d_E^2 = d_S^2$

pero a partir de ello podemos relacionar las secciones (acordate que una sección circular es igual a $S = (\pi/4)\ d^2$

$9\ (\pi/4)\ d_E^2 = (\pi/4)\ d_S^2$

$9\ S_E^2 = S_S^2$

Y esto tiene su consecuencia en la velocidad, y en la velocidad al cuadrado, ya que:

$Q_E = Q_S$

$S_E\ .\ v_E = S_S\ .\ v_S$

$S_E\ .\ v_E = 9\ S_E\ .\ v_S$

$v_E = 9\ v_S$

$v_E^2 = 81\ v_S^2$

$v_E^2\ /\ 81 = v_S^2$

Ahora planteamos la ecuación de Bernoulli

$\Delta P = ½\delta\ (v_E^2 - v_S^2)$

$\Delta P = ½\delta\ (v_E^2 - v_E^2/\ 81\ ) = ½\delta\ (80/81)\ v_E^2$

$\Delta P = (40/81)\ \delta\ v_E^2$ **b)**

En ambos casos se trata de un aumento de presión ya que en la salida siempre tenemos menor velocidad que en la entrada y, estando a la misma altura, a menor velocidad mayor debe ser la presión.

RH5) Ahí tenés el esquema correcto del dispositivo enunciado. Se llama sifón, es el sistema con el que se evacúan aquellos recipientes que no tienen agujero de desagote y que no se pueden volcar. Si uno sigue el procedimiento descripto en el enunciado, verá que por el extremo de afuera de la manguera sale el chorro que desagota al recipiente y continúa vaciándolo mientras se cumpla que ese extremo esté más bajo que la superficie libre del líquido. Sólo pensar que el líquido avanza por el tramo ascendente hace que parezca mágico. Pero es Bernoulli puro.

De todos modos el problemita este presenta dos o tres dificultades interesantes.

La primera es saber elegir los puntos de la corriente que vamos a comparar con la ecuación de Bernoulli. Está claro que el punto **C** debe aparecer, ya que nos piden hallar la velocidad del chorro de salida por la manguera. Pero ¿con cuál lo comparo, con **B** (ese es el primer impulso) o con **A**?

La respuesta es que sólo comparando con **A** hallaremos la solución. Pero en principio no hay cómo saberlo: sólo la experiencia te lo irá enseñando. Si probamos la otra comparación el problema no sale y listo; no es grave, porque inmediatamente probamos el otro par... y ahí sí.

$$h_A = 0{,}5\ m,\ h_B = 0{,}2\ m,\ h_C = 0\ m$$

$$P_A + \delta\ g\ h_A + ½\delta\ v_A{}^2 = P_C + \delta\ g\ h_C + ½\delta\ v_C{}^2$$

Las presiones en ambos puntos son iguales: en ambas se trata de la presión atmosférica, porque el líquido está en contacto con el aire; de modo que se cancelan. Si tomamos el nivel cero en la posición del punto **C**, su energía potencial se anula. Y la altura de **A** es ***h_A= 0,5 m, la suma de las dos diferencias de altura del enunciado. Miremos lo que queda:***

$$\delta\ g\ h_A + ½\delta\ v_A{}^2 = ½\delta\ v_C{}^2$$

$$g\ h_A + ½ v_A{}^2 = ½ v_C{}^2$$

Acá aparece la segunda dificultad: no tenemos el valor de la velocidad del fluido en **A**, que no es otra cosa que la velocidad con que desciende el nivel de nafta del tanque. Por suerte hiciste este ejercicio, porque en varios otros vas a poder razonar de la misma manera: la velocidad en **A** es despreciable respecto de la velocidad en **C**, de modo que podés tirar todo ese término. Como ya sé que te parece un recurso mentiroso, después de hacer el problema te voy a demostrar por qué es correcto proceder así. Vamos de nuevo:

$$g\ h_A = ½ v_C{}^2$$

ahora despejamos ***v_C y calculamos***

$$v_C = (\ 2\ g\ h_A\ )^{½}$$

$$v_C = (\ 2\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 0{,}5\ m\ )^{½}$$

$$v_C = 3{,}16\ m/s$$

Conocida la velocidad y la sección, el caudal es sencillo:

$$Q_C = S_C\ .\ v_C = 4 \times 10^{-4}\ m^2\ .\ 3{,}16\ m/s$$

$$Q_C = 1{,}26 \times 10^{-3}\ m^3/s$$

Te voy a justificar que nuestro recurso de despreciar la velocidad en **A** respecto de la velocidad en **C** era válido. Supongamos que el depósito tenía ***0,2 m²*** de sección (lo imagino lo más chico posible para no favorecer mi postura). En ese caso, por aplicación de la misma propiedad de continuidad, ***$Q_C = Q_A = S_A\ .\ v_A$, obtenemos***

$\boldsymbol{v_A = 6{,}3 \times 10^{-3}\ m/s}$

la resolución por Bernoulli habría quedado así:

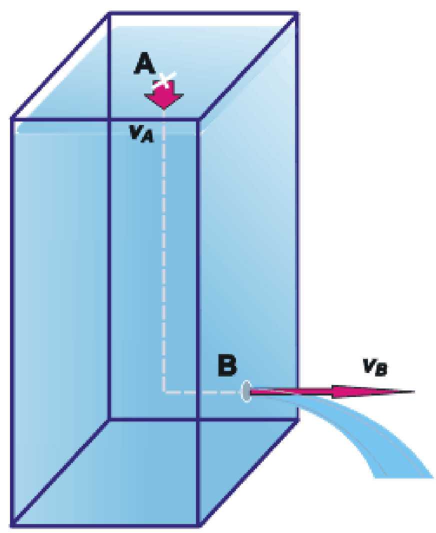
$\boldsymbol{v_C = (2\ g\ h_A + v_A^2)^{½}}$

Y eso da... *¡*exactamente lo mismo que antes*!* Recién aparece una diferencia en la 5ta. cifra decimal. La razón es que cuando un número es mucho mayor que otro, al elevarlos al cuadrado (como nos pide Bernoulli) la diferencia es muchísimo mayor y eso justifica despreciar al más chico.

Todavía nos queda discutir la tercera dificultad, que consiste en lo siguiente: las preguntas del enunciado dicen *velocidad inicial* y *caudal inicial*. ¿Por qué dicen *inicial*? Los inexpertos suelen asociar la palabra *inicial* a la entrada de la corriente, y la palabra *final* a la salida. Pero eso no tiene nada que ver con nuestro problema. El asunto es que cuando la nafta empiece a salir la altura del nivel superior se va a modificar, y eso hace que la velocidad de salida se modifique también (disminuyendo).

Era por eso.

RH6) La primera parte del ejercicio es muy, pero muy sencilla. Se trata de una situación estática... hidrostática, que resolveremos, justamente, con el principio general de la hidrostática.



Tomemos dos puntos que nos van a servir para las dos partes del ejercicio: el punto **A** sobre la superficie libre del líquido y el punto **B** justo al lado del orificio (ahora tapado por el corcho).

$\boldsymbol{\Delta P = \delta\ g\ \Delta y}$

Como nos piden la presión manométrica, eso significa que la presión en el punto **A** vale cero, y la diferencia de presión resulta ser la presión en **B**, la presión sobre la parte interna del corcho.

La diferencia de profundidad no es otra que la profundidad a la que se encuentra el corcho. Queda así:

$\boldsymbol{P_B = \delta\ g\ y_B}$

$\boldsymbol{P_B = 1.000\ kg/m^3\ .\ 10\ m/s^2\ .\ 2{,}1\ m}$

$\boldsymbol{P_B = 21.000\ Pa}$

La segunda parte es claramente dinámica, porque el líquido comienza a fluir: se escapa velozmente por el orificio y desciende lentamente el nivel superior. Vamos a tener que aplicar el principio de Bernoulli.

$\boldsymbol{P_A + \delta\ g\ h_A + ½\delta\ v_A^2 = P_B + \delta\ g\ h_B + ½\delta\ v_B^2}$

Ahí aparece nuestra incógnita que es la velocidad del líquido en el agujero, v_B. **Y el *resto parece interminable.***

Pero puede resumirse bastante; por ejemplo: la presión en el punto **B** será -valga lo que valga- igual a la presión en **A**, ya que el líquido está en ambos lugares en contacto libre con la atmósfera y sometido exclusivamente a su presión; por lo tanto podemos cancelarlos.

La altura de **B** (ojo que Bernoulli habla de alturas, no de profundidades) podemos considerarla cero, y la de **A**, ***2,1 m***. Así vuela el término de la energía potencial de **B**.

Aún así, con lo hecho hasta ahora esta parte del ejercicio no saldría, ya que tenemos una sola ecuación y dos incógnitas, fijate:

$\delta\ g\ h_A + ½\delta\ v_A^2 = ½\delta\ v_B^2$

Pero todavía podemos volar un término más ya que la velocidad con que desciende el líquido en el punto **A** es muy pequeña respecto al punto **B**. Para los expertos es lógico que esa gran diferencia autoriza la cancelación del término de energía cinética del punto **A**, pero supongo que vos te lo debés tomar como una trampa sucia de la peor calaña. Y que si a vos se te ocurriera hacer algo así en un examen te iniciarían juicio por difamación de la ciencia con tres años de prisión no excarcelable. Hagamos lo siguiente: por ahora creeme que se puede prescindir de ese término, y después de hallar el resultado, te lo voy a justificar. Entonces el asunto nos queda así:

$\delta\ g\ h_A = ½\delta\ v_B^2$

suprimimos la densidad en ambos miembros y despejamos la velocidad de **B**.

$v_B^2 = 2\ g\ h_A$

v_B = 6,48 m /s

La deuda: el enunciado aclara que la sección del recipiente, ***S_A, es mucho mayor que la de la abertura, S_B. Haciendo una suposición austera, digamos unas 100 veces más grande. Si aplicamos el principio de continuidad entre esos dos puntos tenemos:***

$S_A\ .\ v_A = S_B\ .\ v_B$

$100\ S_B\ .\ v_A = S_B\ .\ v_B$

$100\ v_A = v_B$

$v_A = v_B\ /\ 100$

Si incorporás esta relación a la ecuación de Bernoulli -cuando todavía no habíamos despreciado el término de la velocidad- nos va a quedar una única incógnita, ***v_B, y el nuevo valor -calculalo- nos va a dar 6,48 m /s... creo que nos merecíamos ese permiso.***

RH7) Vamos a tratar de establecer todas las relaciones que podamos entre las velocidades y las presiones de esos tres segmentos del tubo... luego nos fijamos cuál de las proposiciones coincide o no con ellas.

Lo más fácil es el asunto de las velocidades: como el caudal debe ser el mismo en toda la tubería (***$Q_A = Q_B = Q_C$) los productos de sección por velocidad deben ser iguales también: $S_A\, v_A = S_B\, v_B = S_C\, v_C$. Luego, siendo las secciones A y C iguales (o casi iguales) y la sección B menor a ellas... debe ocurrir que:***

$v_A = v_C$

$v_B > v_A$

$v_B > v_C$

Ahora vamos con las presiones. Como el fluido es viscoso debe haber una caída de presión a lo largo del tubo... pero eso cuenta sólo si el tubo es de sección constante (que no lo es), de modo que sólo sirve para comparar la sección **A** con la **C**.

$P_A > P_C$

Para comparar la sección **B** con las otras dos es un poco más problemático. Según el principio de Bernoulli, al aumentar la velocidad disminuye la presión. Eso pasa justamente con el paso de **A** hacia **B**... que coincide con la disminución de presión por viscosidad a lo largo del recorrido, de modo que acá no hay duda...

$P_A > P_B$

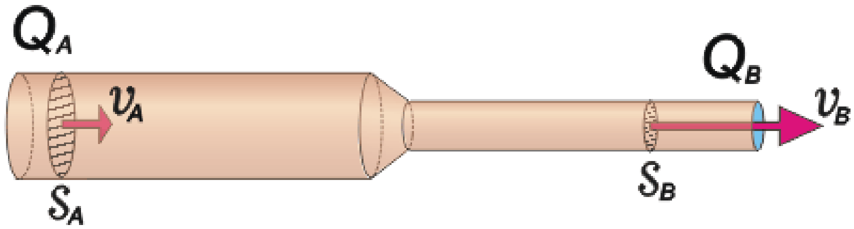
Pero en el último par no podemos tener certeza, porque el efecto de la viscosidad tiende a disminuir la presión al pasar de **B** a **C**... pero el efecto Bernoulli tiende a generar un aumento de presión en el mismo pasaje (por disminución de la velocidad). No hay datos para decidir qué efecto prevalece (incluso podrían compensarse exactamente).

Pero con las certezas que pudimos encontrar hasta ahora... hay una sola que coincide con alguna de ellas y no contradice ninguna. Te dejo el punteo a vos.

respuesta **e)**, la única verdadera.

DESAFÍO: Rehacer el ejercicio pero, ahora, en posición vertical ascendente. Y luego descendente.

RH8) Acá hay otro problema típico de conservación de energía (Bernoulli). Verás que entendido esto el ejercicio tiene un 90% de álgebra y apenas un 10% de Física. Resignados, las posiciones **A** y **B**:



El principio de continuidad relaciona los caudales en ambos sectores del caño:

$Q_A = Q_B$

y también relaciona velocidades y secciones, pero el enunciado del problema no relaciona las secciones sino los diámetros (el doble de los radios).

$D_A = 2 \, . \, D_B$

$r_A = 2 \, . \, r_B$

$r_A^2 = 4 \, . \, r_B^2$

$\pi \, . \, r_A^2 = 4 \, . \, \pi \, . \, r_B^2$

$S_A = 4 \, . \, S_B$

Ahora volvamos al principio de continuidad

$S_A \, . \, v_A = S_B \, . \, v_B$

$4 \, . \, S_B \, . \, v_A = S_B \, . \, v_B$

$4 \, . \, v_A = v_B$

Con esto podés saber cuánto vale la velocidad en **B**; pero contenete, no lo averigües, tratá de soportarlo. Pasemos a Bernoulli (la expresión reducida, sin los términos que hablan de las diferentes alturas):

$P_A + ½\delta \, v_A^2 = P_B + ½\delta \, v_B^2$

reordeno para que el resultado sea la respuesta al problema,

$P_B - P_A = ½\delta \, v_A^2 - ½\delta \, v_B^2$

$P_B - P_A = ½\delta \, (v_A^2 - v_B^2)$

ahora recuerdo esa relación entre velocidades que me contuve de usar:

$4 \, . \, v_A = v_B$

$16 \, . \, v_A^2 = v_B^2$

esto lo meto en la de Bernoulli que estaba esperando:

$P_B - P_A = ½\delta\ (v_A{}^2 - 16\ .\ v_A{}^2)$

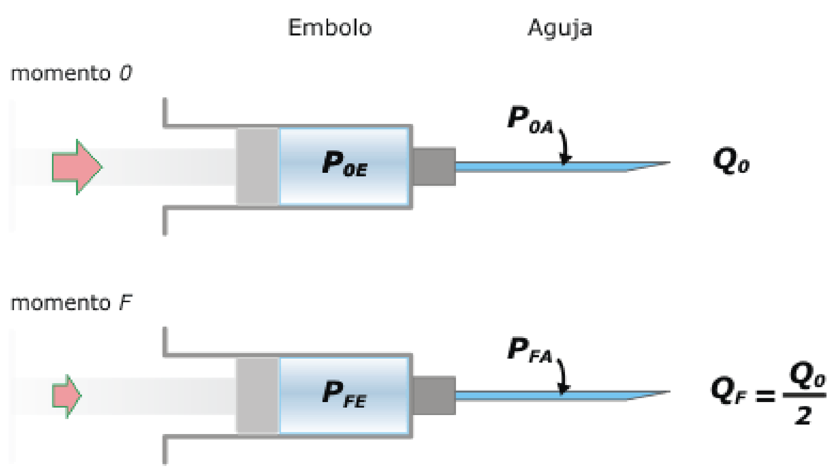
$P_B - P_A = -\ ½\delta\ 15\ .\ v_A{}^2$

$P_B - P_A = -\ ½\ .\ 15\ .\ 1000\ kg/m^3\ .\ 4\ m^2/s^2$

$P_B - P_A = -\ 30\ kPa$ **_respuesta f)_**

NOTAS: era obvio que la presión en **B** debía ser menor ya que, al no haber diferencia por desnivel, ahí la velocidad era mayor (¿viste que no hubo que calcular cuánto valía la velocidad en la parte angosta?).

RH9)



Con este esquemita sencillísimo que hice ya alcanza para definir todas las variables que entran en juego en el ejercicio. Pese a que en el texto voy a volver a hacerlo no siempre es tan claro y práctico como en el esquema.

Si vos querés que el líquido fluya hacia la derecha no cabe otra posibilidad que la presión sea mayor en el émbolo y menor en la aguja. Eso ya te permite descartar las opciones **a)**, **c)** y **f)**.

Vamos a la resolución. Como lo que estamos inyectando es un líquido ideal (probablemente un remedio para la gripe, o algo así) podemos utilizar el **Principio de Bernoulli**. Con él describo el momento inicial

$P_{0E} + \delta\ g\ h_{0E} + ½\delta\ v_{0E}{}^2 = P_{0A} + \delta\ g\ h_{0A} + ½\delta\ v_{0A}{}^2$

A menos que se trate de una jeringa gigante la diferencia de altura es despreciable... en el sentido que las diferencias de presión que provoca la diferencia de altura son insignificantes en comparación con las que provoca la diferencia de caudal. No vale decir que la diferencia de alturas es cero porque el dibujo en el esquemita te lo hice con la jeringa dispuesta horizontalmente: el tema es que aunque estuviese vertical, la diferencia de altura es despreciable.

Entonces vamos a despreciar los términos de altura (de presión hidrostática) y vamos a reagrupar los otros términos para operar más cómodamente.

$\Delta P_0 = ½\delta\, v_{0A}^2 - ½\delta\, v_{0E}^2$

$\Delta P_0 = ½\delta\, (v_{0A}^2 - v_{0E}^2)$

El enunciado nada nos dice sobre las velocidades del líquido; en cambio habla de caudales. Eso me incita a expresar las velocidades en función de los caudales. Eso es fácil ya que para cualquier fluido se cumple siempre que el caudal, ***Q***, es igual al producto entre la velocidad del fluido, ***v***, y la sección transversal del conducto, ***S***. Entonces:

$v_{0E} = Q_0 / S_E \quad \rightarrow \quad v_{0E}^2 = Q_0^2 / S_E^2$

$v_{0A} = Q_0 / S_A \quad \rightarrow \quad v_{0A}^2 = Q_0^2 / S_A^2$

No hace falta que te marque que el caudal siempre es el mismo en cualquier parte del trayecto (principio de continuidad), por eso puse Q_0 ***en lugar de*** Q_{0E} ***y*** Q_{0A}.

Ahora vuelvo a escribir la última expresión que teníamos de Bernoulli, pero esta vez lo hago en función de los caudales.

$\Delta P_0 = ½\delta\, [(Q_0^2 / S_A^2) - (Q_0^2 / S_E^2)] \qquad [1]$

El mismo proceso nos llevaría a describir la situación final de este modo

$\Delta P_F = ½\delta\, [(Q_F^2 / S_A^2) - (Q_F^2 / S_E^2)]$

Y es dato del problema que el caudal en la segunda instancia es la mitad del caudal en la primera instancia. O sea:

$Q_F = Q_0 / 2 \quad \rightarrow \quad Q_F^2 = Q_0^2 / 4$

Si reemplazo esto en la última ecuación, queda:

$\Delta P_F = ½\delta\, [(Q_0^2 / 4S_A^2) - (Q_0^2 / 4S_E^2)]$

Sacando esos cuatros como factor común y luego fuera del paréntesis,

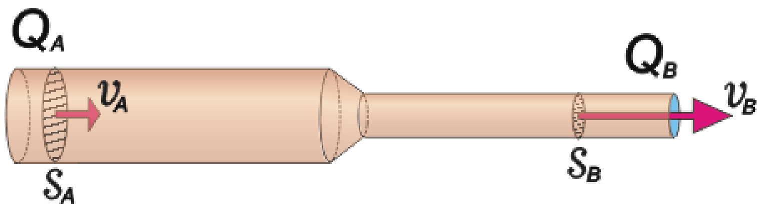
$\Delta P_F = ¼\, ½\delta\, [(Q_0^2 / S_A^2) - (Q_0^2 / S_E^2)] \qquad [2]$

Ahora si comparás **[1]** con **[2]** coincidirás conmigo en que:

$\Delta PF = ¼\, \Delta P0$ respuesta **e)**

RH10) Si consideramos que se trata de un fluido ideal, donde la viscosidad vale cero, entonces podemos pedirle ayuda a nuestro amigo Bernoulli que nos la va a prestar con seguridad.

Voy a llamar **A** a la parte ancha y **B** a la angosta.



Los datos que aporta el enunciado permiten afirmar que:

$S_A = 2\ S_B$

Eso tiene su consecuencia en la velocidad, y en la velocidad al cuadrado, ya que el principio de continuidad afirma que:

$Q_A = Q_B$

$S_A \, . \, v_A = S_B \, . \, v_B$

$2\ S_B \, . \, v_A = S_B \, . \, v_B$

$2\ v_A = v_B$

$4\ v_A{}^2 = v_B{}^2$

Ahora podemos plantear la ecuación de Bernoulli (sin los términos de energía potencial ya que todo ocurre a la misma altura).

$\Delta P = \frac{1}{2} \delta\ (v_A{}^2 - v_B{}^2)$

$\Delta P = \frac{1}{2} \delta\ (v_A{}^2 - 4\ v_A{}^2) = - \frac{1}{2} \delta\ 3\ v_A{}^2$

$\Delta P = - \frac{1}{2}\ 1.000\ kg/m^3 \, . \, 3 \, . \, 4\ m^2/s^2$

$\Delta P = - 6.000\ Pa$ ***respuesta c)***

El signo menos me indica que la presión disminuyó desde **A** hasta **B**, lo cual es lógico porque la predicción de Bernoulli es que a mayor velocidad, menor presión.

DESAFÍO: Si invirtiésemos el sentido del movimiento del agua, ¿qué ocurriría con la diferencia de presión?
Rta: Nada, valdría lo mismo, no cambiaría de módulo ni signo.

RH11) Acá tenés un ejercicio revelador. La cuestión numérica, la aplicación de la ecuación de Bernoulli -que es lo que tenemos que usar-, todo eso es bastante sencillo, vas a ver; pero lo interesante es que te muestra fenómenos insospechados. Primero pasemos las magnitudes a unidades homogéneas, operables entre sí.

$v = 120\ km/h = 33{,}33\ m/s$

$\delta = 1{,}2\ g/lt = 1{,}2\ kg/m^3$

Ahora sí, vamos a Berni. Entre arriba y abajo del techo de chapa la diferencia de altura es despreciable, de modo que no vamos a utilizar los términos de energía potencial. Acá la cuestión importante es la cinética: en el exterior de la casa el viento tiene una velocidad alta, que llamaré v_E, ***y en el interior de la casa la velocidad del viento,*** v_I, ***es nula (a menos que tengamos abiertas las ventanas, cosa poco recomendable un día tan ventoso).***

$\Delta P = \frac{1}{2}\delta\ (v_E^2 - v_I^2)$

El orden en que que realices la resta es arbitrario. La cuestión física es que afuera la presión es menor y adentro, mayor. Sacando v_I ***porque vale cero, queda:***

$\Delta P = \frac{1}{2}\delta\ v_E^2$

$\Delta P = \frac{1}{2}\, 1{,}2\ kg/m^3\ (33{,}33\ m/s)$

$\Delta P = 667\ Pa$

Eso implica que sobre el techo habrá una fuerza neta aplicada de:

$F = \Delta P\ .\ A = 667\ Pa\ .\ 9\ m^2$

F = *6.000* N **=** *600* kgf

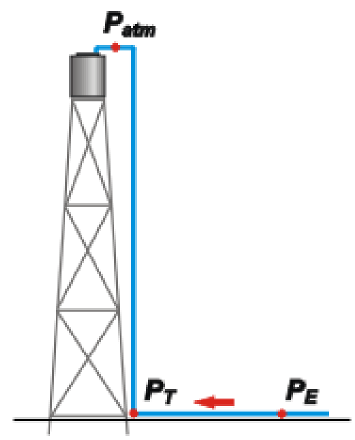
Suficiente para levantar cuatro personas paradas en el techo. Como ves, se trata de una fuerza muy grande... insospechadamente grande. Eso nos advierte de la necesidad de asegurar los techos convenientemente. Es cierto que un viento de **120** km/h no es habitual en Buenos Aires ni en otras grandes ciudades. Pero tampoco te olvides que una chapa de techo pesa apenas *15* kgf**.**

DESAFÍO: En una tormenta porteña -de esas inolvidables- el viento puede alcanzar ráfagas de **100** km/h. ¿Cuánto vale la fuerza sobre una chapa real, de 3 metros por 1? **139** kgf

---

RH12) Este ejercicio es muy fácil... sólo se requiere acordar alguna cosita no dicha, dada como obvia por el autor, y que no siempre lo es para los estudiantes, sobre todo para aquellos que salen poco de sus peceras. Vamos... no te ofendas.

Mirá este esquema, traté de hacerlo coincidir lo más que pude con el enunciado del ejercicio, ¿te parece?: 20 metros, 6.000 litros...



Llamé ***P_E* (por presión que provee la empresa) y *P_T* (por presión debida al tanque) a las respectivas presiones que juegan en el ejercicio.**

Se trata de presiones hidrostáticas... porque no interesa que el fluido esté o no en movimiento. Si se quiere que el agua ascienda el caño vertical y llene el tanque la presión en el caño horizontal (***P_E*) tiene que ser mayor (o por lo menos igual) a la presión en la parte inferior del caño vertical.**

En el tanque, no nos interesa que el agua esté bajo presión, aunque inevitablemente va a estar presionada por la atmósfera (no tendría sentido fabricar tanques herméticos).

Podés ignorar esa presión atmosférica que tanto empuja en el tanque como en la empresa proveedora de aguas... o, si vos querés, podés pensar en una escala de presiones relativas, en las que la presión atmosférica valga cero.

Ese era todo el secreto. El resto lo hace **Bernoulli**

$P_E \leq P_T$

$P_E \leq \delta\ g\ \Delta h_T$

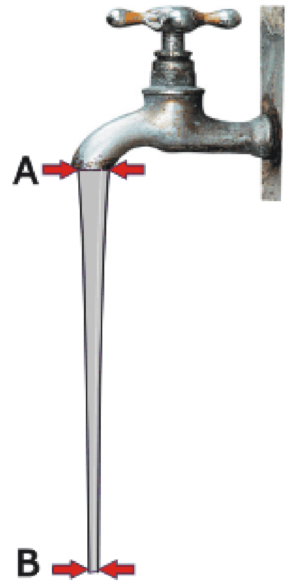
$P_E \leq 1.000\ (kg/m^3)\ 10\ (m/s^2)\ 20\ m$

$P_E \leq 200.000\ Pa$

$P_E \leq 2\ atm$ respuesta **d)**

OBSERVACION: Yo diría que el autor del ejercicio es muy pretencioso, o vive en una ciudad de tipo 5 estrellas. En la Argentina las cosas son diferentes. En la ciudad de Buenos Aires y sus alrededores, por ejemplo, la empresa proveedora de agua corriente se compromete a suministrar el fluido a una presión relativa de *1 atmósfera*. De modo que sólo se llenarían los tanques que se hallen a alturas por debajo de los 10 metros. De hecho la Ley que regula el suministro indica la presión de ese modo: ***10 m.c.a.*** (presión equivalente a una *columna de agua de 10 metros*). Para lograrlo tratan de tener siempre llenos cuatro tanques gigantes de agua (72.000 litros cada uno) en la terraza de cuatro edificios-tanque situados en los cuatro puntos más altos de la ciudad: Balvanera, Caballito, Villa Devoto y Constitución.

RH13) Debemos suponer que el chorrito de agua es completamente laminar y que el fluido se comporta en forma ideal. Hechas estas suposiciones todo va a restringirse a aplicar Bernoulli apropiadamente.



Ubiquemos dos posiciones: **A** inmediatamente a la salida de la canilla; y **B** 45 centímetros más abajo.

Aplicando el principio de continuidad podemos conocer la velocidad con la que sale el agua de la canilla:

$\boldsymbol{Q_A = S_A \cdot v_A}$

de donde

$\boldsymbol{v_A = S_A / Q_A =}$

$\boldsymbol{v_A = 2 \times 10^{-4}\ m^2 / 12\ lt/min =}$

$\boldsymbol{v_A = 2 \times 10^{-4}\ m^2 / 2 \times 10^{-4}\ m^{-3}/s}$

$\boldsymbol{v_A = 1\ m/s}$

Tengamos ese número a mano, ya lo vamos a necesitar. Ahora sí, planteamos la conservación de la energía (o sea, la ecuación de Bernoulli) entre A y B.

$PA + \delta\ g\ hA + ½\ \delta\ vA^2 = PB + \delta\ g\ hB + ½\ \delta\ vB^2$

Las presiones en ambos puntos son iguales: en ambas se trata de la presión atmosférica, porque el agua está en contacto con el aire tanto a la salida de la canilla como a lo largo de todo el recorrido de chorro (volveremos a charlar sobre este asunto al final); de modo que se cancelan.

$\delta\ g\ hA + ½\ \delta\ vA^2 = ½\ \delta\ vB^2$

$g\ hA + ½\ vA^2 = ½\ vB^2$

Si tomamos el nivel cero en la posición del punto B, su energía potencial se anula. Y la altura de A es hA= 0,45 m:

vB = 3,16 m/s

Con ese valor volvemos a la ecuación de continuidad... (¡No hace falta que te recuerde que el caudal es el mismo en cualquier punto del corrito!)

QA = QB = SB . vB

SB = QB / vB

SB = 2 x 10-4 m-3/s / 3,16 m/s

$\boldsymbol{S_B = 0{,}63 \times 10^{-4}\ m^2 = 0{,}63\ cm^2}$

Quizás, la parte más interesante del ejercicio consiste en que la idea de la caída libre del chorro de agua nos saca un poco de contexto. Estamos acostumbrados a aplicar el principio de Bernoulli a situaciones en las que los fluidos están confinados en cañerías, mangueras, recipientes o lo que sea... en cambio, en este ejercicio...

¡En este ejercicio *también!* Se trata de una caño hecho de aire cuyas paredes ejercen sobre el agua una presión de 101.000 pascales, un caño invisible y de paredes muy gruesas, un caño ideal... pero un caño al fin.