FISICA II

Demostraciones teóricas

1) Demostrar el teorema de Gauss del campo electrostático en el vacío, en el caso de una carga puntual, con superficies esféricas de radio arbitrario centradas en la carga.
2) Demostrar que el campo electrostático es irrotacional a partir del hecho de que la fuerza de Coulomb es conservativa.
3) Demuestre las condiciones de borde o frontera que debe satisfacer el campo electrostático
4) Demostrar que las lineas de campo electrostático son perpendiculares a las superficies equipotenciales a partir de la relación entre campo E y potencial V.
5) Demuestre que el campo electrostático cerca de la superficie de un conductor, en el vacío, es normal a ella y su modulo es igual a la densidad de carga del conductor sobre la constante dieléctrica del vacío
6) Demuestre la expresión de la energía de un sistema de n cargas $q_1, q_2, \dots, q_n$ ubicadas en posiciones $r_1, r_2, \dots, r_n$ respectivamente.
7) Demostrar el teorema de Ampere del campo magnetoestatico en el vacío en el caso de una corriente I que circula por un hilo infinito y con curvas circulares de radio arbitrario.
8) Demuestre las condiciones de borde o frontera que debe satisfacer el campo magnetoestatico.
9) Demostrar que las lineas de campo B quedan confinadas dentro del material ferromagnético en los circuitos magnéticos
10) Escriba las ecuaciones de Kirchoff en general. Aplíquelas en un ejemplo.
11) Explique el significado físico de la ley de Lenz.
12) A partir de plantear el formalismo complejo demuestre la ley de Ohm compleja para un circuito RLC serie.
13) Explique en que circunstancias la ley de Ampere del campo magnetoestatico deja de ser valida. Muestre como se deduce el nuevo termino correctivo.
14) Escriba las ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial explicando el sentido físico de las mismas.
15) Demuestre la expresión de la energía interna de un gas ideal.
16) Demuestre que el rendimiento del ciclo de Carnot se puede escribir en función de las temperaturas de las fuentes térmicas
17) Demuestre el teorema de Carnot.
18) Enuncie los enunciados de Kelvin-Plank y de Clausius del segundo principio de la termodinámica y demuestre su equivalencia.
19) A partir de la desigualdad de Clausius demuestre que la entropía es una función de estado.
20) A partir de la desigualdad de Clausius demuestre la formulación entrópica del segundo principio de la termodinámica.
21) Demuestre la expresión de la ecuación de onda.
22) Demuestre la relación existente entre la capacidad calorífica de un gas ideal a volumen constante y la capacidad calorífica a presión constante.
23) Describa los 3 mecanismos por medio de los cuales se trasmite el calor y escriba en cada caso la expresión que permite calcular la energía transmitida por unidad de tiempo.

1) Demostrar el teorema de Gauss del campo electrostático en el vacío, en el caso de una carga puntual, con superficies esféricas de radio arbitrario centradas en la carga.

Por Coulomb:

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\xi_0}\int\frac{dq.(r-r')}{|r-r'|^3} \quad \text{con} \quad r'=(0,0,0)$$

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\xi_0}\int\frac{dq.\cancel{r}}{|r|^3}$$

$$E(r)=\frac{q}{4\pi\xi_0}.\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

Integrando la expresión del campo sobre una superficie esférica:

$$\iint\frac{q}{4\pi\xi_0}.\frac{1}{\cancel{r^2}}.\cancel{r^2}.sen(\theta).d\theta.d\varphi\,\hat{r} \qquad \theta:(0,\pi) \quad \text{y} \quad \varphi:(0,2\pi)$$

$$\frac{q}{\cancel{4\pi}\xi_0}.\cancel{2\pi.2}=\frac{q}{\xi_0}$$

según Gauss, flujo del campo electrostático esta dado por la epresion:

$$\oiint E.ds=\frac{q}{\xi_0}$$

Por lo tanto queda demostrado lo pedido.

2) Demostrar que el campo electrostático es irrotacional a partir del hecho de que la fuerza de Coulomb es conservativa.

Como F es conservativa:

$$\oint F.dl=0$$

Además
$F=q.E$

Por el teorema de Stokes

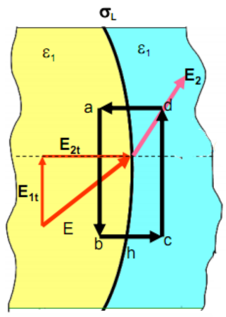
$$\iint rot(\vec{F})ds=\oint\vec{F}.dl$$

$$\iint rot(\vec{F})ds=0$$

$\iint rot(q.\vec{E})ds=0$ Es decir, es irrotacional.

3) Demuestre las condiciones de borde o frontera que debe satisfacer el campo electrostático

Para el campo eléctrico:



Calculo la circulación a través de la curva a-b-c-d.

$$\oint \vec{E}.dl=\int_{a-b} E.dl+\int_{b-c} E.dl+\int_{c-d} E.dl+\int_{d-a} E.dl$$

suponiendo que h es muy pequeño (las distancias b-c y a-d son practicamente nulas), entonces:

$$\oint \vec{E}.dl=\int_{a-b} E.dl+\int_{c-d} E.dl$$

Como es una curva cerrada, la circulación es nula.

$$\oint \vec{E}.dl=0$$

$$\int_{a-b} E_1.dl+\int_{c-d} E_2.dl=0$$

Como la componente normal del campo E_n es perpendicular al desplazamiento en los tramos a-b y c-d, el producto es cero, por lo tanto solo tengo componentes tangenciales.

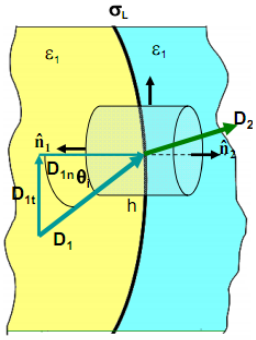
$$-\int_{b-a} E_{tg}.dl+\int_{c-d} E_{tg}.dl=0$$

y resulta que

$$\int_{a-b} E_{tg} \,.\, dl = \int_{c-d} E_{tg} \,.\, dl$$

Por lo tanto: $E_{1_{tg}} = E_{2_{tg}}$

Para el desplazamiento:



$$\oiint \vec{D} \,.\, ds = \iint \sigma_L \,.\, ds$$

Calculo el flujo a través de la superficie gaussiana (cilindro)

$$\oiint \vec{D} \,.\, ds = \iint_{tapa\,1} D \,.\, \hat{n}_1 \,.\, ds + \iint_{tapa\,2} D \,.\, \hat{n}_2 \,.\, ds + \iint_{lateral} D \,.\, \hat{n}_3 \,.\, ds$$

Suponiendo h muy pequeño, la tercer integral resulta nula, entonces

$$-\iint_{tapa\,1} D \,.\, \hat{n}_1 \,.\, ds + \iint_{tapa\,2} D \,.\, \hat{n}_2 \,.\, ds = \iint \sigma_L \,.\, ds$$

El signo menos de la primer integral se debe a que la normal a la tapa y el vector D son opuestos.

Para que se cumpla la igualdad los integrandos deben ser iguales ya que las 3 integrales tienen los mismos limites.

$$-\vec{D}_{1_n} + \vec{D}_{2_n} = \sigma_L$$

Suponiendo que σ = 0 en la superficie que divide los 2 medios

$$\vec{D}_{1_n} = \vec{D}_{2_n}$$

4) Demostrar que las lineas de campo electrostático son perpendiculares a las superficies equipotenciales a partir de la relación entre campo E y potencial V.

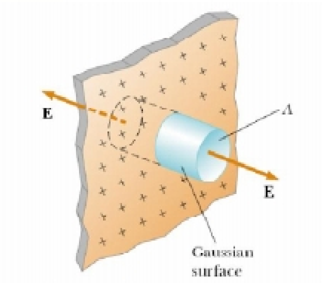
$$\Delta V = -\int \vec{E} \,.\, dl$$

Si me muevo por una linea equipotencial $\Delta V = 0$, por lo tanto

$$0 = -\int \vec{E} \,.\, dl$$

Como $E \neq 0$ y $dl \neq 0$, entonces $E \perp dl$

5) Demuestre que el campo electrostático cerca de la superficie de un conductor, en el vacío, es normal a ella y su modulo es igual a la densidad de carga del conductor sobre la constante dieléctrica del vacío



Es necesario que $E_{tg} = 0$ ya que de lo contrario la carga se movería y esto es imposible debido a que estamos en electrostática, entonces E es normal a la superficie de un conductor (que es equipotencial).

$$\oiint E.ds = \iint_{tapa\,1} E.ds + \iint_{tapa\,2} E.ds + \iint_{lateral} E.ds$$

- La integral sobre la tapa 2 es nula porque esta dentro del conductor y el campo allí es nulo.
- La integral sobre el lateral es nula porque $E \perp n_3$

Por lo tanto solo me queda la integral sobre la tapa 1

$$\oiint E.ds = \iint_{tapa\,1} E.ds = \frac{q}{\xi_0}$$

como el campo es uniforme, lo puedo sacar de la integral y obtengo que

$$\oint\!\!\oint E.ds = E.A_{tapa1}$$

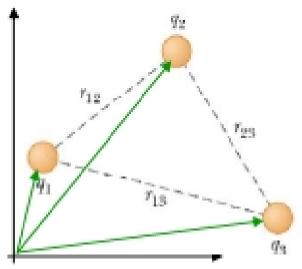
$$E.A_{tapa1} = \frac{q}{\xi_0}$$

$$E = \frac{q}{\xi_0 . A}$$

y como $\frac{q}{A} = \sigma$ donde σ es la densidad de carga superficial, entonces:

$$E = \frac{\sigma}{\xi_0}$$

6) Demuestre la expresión de la energía de un sistema de n cargas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ubicadas en posiciones $r_1, r_2, \ldots, r_n$ respectivamente.



La expresión de la energía U es:

$$\Delta U = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\xi_0} . \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Si solo tengo una carga, ra-rb = 0 ya que la posición es la misma, por lo tanto la energía es nula.

$$U_1 = 0$$

Si tengo 2 cargas:

$$U_2 = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\xi_0} . \frac{1}{|r_2 - r_1|} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\xi_0 . r_{12}}$$

Si tengo 3 cargas:

$$U_3 = \frac{q_1 \cdot q_3}{4\pi\xi_0} \cdot \frac{1}{|r_3 - r_1|} + \frac{q_2 \cdot q_3}{4\pi\xi_0} \cdot \frac{1}{|r_3 - r_2|} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\xi_0 . r_{13}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{4\pi\xi_0 . r_{23}}$$

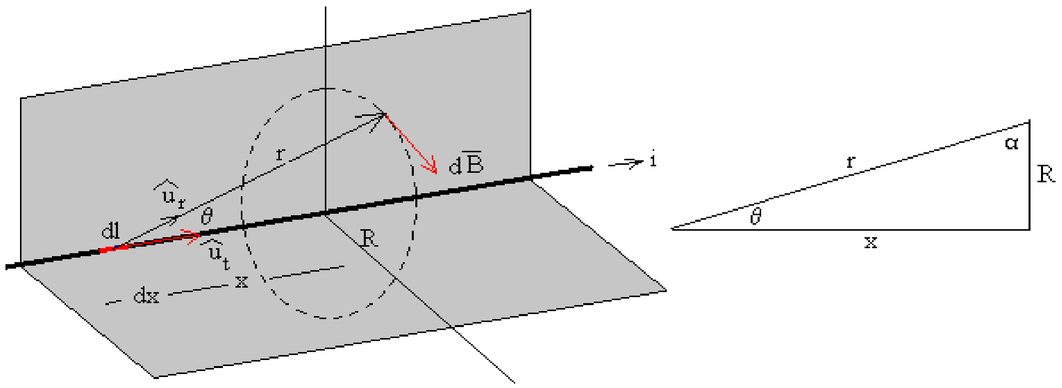
Por lo tanto para n cargas, la energía se puede expresar como:

$$U = \sum \frac{q_i \cdot q_j}{4\pi\xi_0 r_{ij}} \qquad i < j \qquad i \neq j$$

7) Demostrar el teorema de Ampere del campo magnetoestatico en el vacío en el caso de una corriente I que circula por un hilo infinito y con curvas circulares de radio arbitrario.

La ley de Biot-Savart establece que:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I.dl\, x\, \hat{r}}{r^2}$$



$$r = \frac{R}{x}$$

$$\frac{x}{R} = Tg(\alpha)$$

Por lo tanto:

$$dx = R.sec^2(\alpha).d\alpha$$

Reemplazando en la expresión de Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0 . I}{4\pi} \int \frac{dx\, x\, \hat{r}}{r^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 . I}{4\pi}\int\frac{R.sec^2(\alpha).d\alpha.\cos(\alpha)}{(\frac{R}{\cos(\alpha)})^2}$$

$$B=\frac{\mu_0 . I}{4\pi}\int\frac{\cos(\alpha).d\alpha}{R}$$

$$B=\frac{\mu_0 . I}{4\pi.R}\int\cos(\alpha).d\alpha$$

Además en la figura se puede ver que:

$$\cos(\alpha)=sen(\theta)$$

entonces

$$B=\frac{\mu_0 . I}{4\pi.R}\int sen(\theta).d\theta$$

$$B=-\frac{\mu_0 . I}{4\pi.R}.[\cos(\pi)-\cos(0)]$$

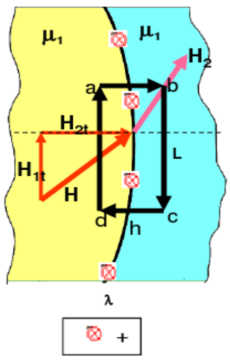
$$B=\frac{\mu_0 . I}{2\pi.R}$$

$$B.2\pi.R=\mu_0 . I$$

Es decir, llego a la expresión de Ampere $\oint B.dl=\mu_0 . I$ $B.L=\mu_0 . I$

8) Demuestre las condiciones de borde o frontera que debe satisfacer el campo magnetoestatico

Para la excitación magnética:



Calculo la circulación a travez de la curva a-b-c-d.

$$\oint \vec{H}\,.dl = \int_{a-b} H.dl + \int_{b-c} H.dl + \int_{c-d} H.dl + \int_{d-a} H.dl$$

suponiendo que h es muy pequeño (las distancias b-c y a-d son practicamente nulas), entonces:

$$\oint \vec{H}\,.dl = \int_{a-b} H.dl + \int_{c-d} H.dl$$

Además,

$$\oint \vec{H}\,.dl = I$$

Y la corriente I se puede expresar como $I = \lambda.L$, entonces:

$$\int_{a-b} H_1 .\, dl + \int_{c-d} H_2 .\, dl = \lambda.L$$

Como la componente normal del vector H_n es perpendicular al desplazamiento en los tramos a-b y c-d, el producto es cero, por lo tanto solo tengo componentes tangenciales.

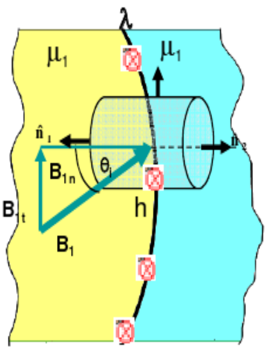
$$-\int_{b-a} H_{tg} .\, dl + \int_{c-d} H_{tg} .\, dl = \lambda.L$$

y si además consideramos que λ = 0 en la separación de medios, resulta que

$$\int_{a-b} H_{tg} .\, dl = \int_{c-d} H_{tg} .\, dl$$

Por lo tanto: $H_{1_{tg}} = H_{2_{tg}}$

Para el campo magnético:



$$\oiint \vec{B}\,.\,ds = O$$

Calculo el flujo a travez de la superficie gaussiana (cilindro)

$$\oiint \vec{B}\,.\,ds = \iint_{tapa\,1} B\,.\,\hat{n}_1\,.\,ds + \iint_{tapa\,2} B\,.\,\hat{n}_2\,.\,ds + \iint_{lateral} B\,.\,\hat{n}_3\,.\,ds$$

Suponiendo h muy pequeño, la tercer integral resulta nula, entonces

$$\iint_{tapa\,1} B\,.\,\hat{n}_1\,.\,ds = \iint_{tapa\,2} B\,.\,\hat{n}_2\,.\,ds$$

Para que se cumpla la igualdad los integrandos deben ser iguales ya que las 2 integrales tienen los mismos limites.

$$\vec{B}_{1_n} = \vec{B}_{2_n}$$

9) Demostrar que las lineas de campo B quedan confinadas dentro del material ferromagnético en los circuitos magnéticos

Para demostrar esto hay que suponer 2 cosas:

1- $B_n \approx 0$
2- μ_r >>> $B_{1_{tg}}$

Es decir que la componente normal del campo magnético es practicamente nula y que la componente tangencial el mucho menor que μ_r del material.

De las relaciones que se obtuvieron en la demostración (8), se tiene que:

(1) $\vec{B}_{1_n} = \vec{B}_{2_n}$
(2) $H_{1_{tg}} = H_{2_{tg}}$

Además la formula que los relaciona es $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Utilizando esta relación y reemplazando en (2) se obtiene que

$$\frac{B_{1tg}}{\mu_0 \mu_{r1}} = \frac{B_{2tg}}{\mu_0 \mu_{r2}}$$

Como fuera del material tengo vacío, $\mu_{r2} = 1$, entonces

$$\frac{B_{1tg}}{\mu_{r1}} = B_{2tg}$$

Como se supuso que μ_r >>> $B_{1_{tg}}$, entonces $B_{2\text{tg}} \approx 0$
Es decir que el campo magnético fuera del material no tiene ni componente normal ni tangencial (son nulas),por lo tanto el campo magnético queda confinado en el material .

10) Escriba las ecuaciones de Kirchoff en general. Aplíquelas en un ejemplo.

Para poder explicar las leyes de Kirchoff es necesario primero definir 3 conceptos:

Nodo: punto donde convergen 3 o mas conductores.
Rama: tramo entre 2 nodos.
Malla: camino cerrado de conductores.

La primer ley de Kirchoff establece que:

"la suma de todas las corrientes que llegan a un nodo es cero".

$$\sum I=0$$

Es decir que la sumatoria de las corrientes que llegan a un nodo es igual a la sumatoria de las que salen del mismo (Conservación de la carga).

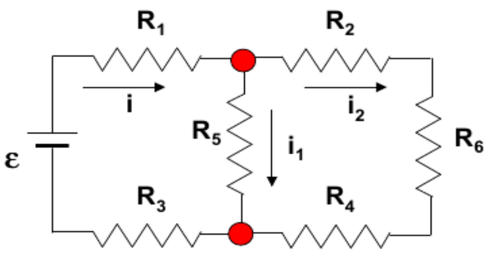
La segunda ley establece que:

"Al recorrer una malla, la sumatoria de las caídas y subidas de tensión debe ser nula"

$$\sum V_i=0$$

Es decir que se debe conservar la energía

Ej:



De la conservación de la carga obtengo que:

* $i-i_1-i_2=0$

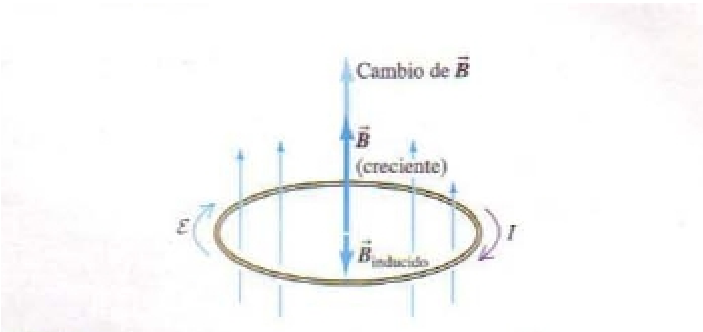
De la conservación de la energía obtengo que:

* $\varepsilon - i(R_1 + R_3) - i_1 . R_5 = 0$

* $-i_2(R_2 + R_4 + R_6) + i_1 . R_5 = 0$

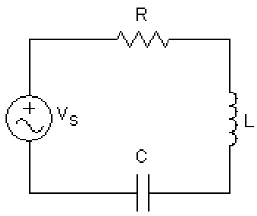
Tengo 3 ecuaciones con 3 incógnitas, por lo tanto puedo despejar los valores de las corrientes.

11) Explique el significado físico de la ley de Lenz.



La ley de Lenz establece que la dirección de cualquier efecto de la inducción magnética es tal que se opone a la causa que lo produjo. De esta manera, el sistema tiende siempre a su estado original. Si el campo aumenta, el flujo magnético aumenta, y por lo tanto se genera una corriente en el sentido opuesto a la generada por el campo magnético (según la regla de la mano derecha) que a su vez genera un campo inducido que se opone al primero.

12) A partir de plantear el formalismo complejo demuestre la ley de Ohm compleja para un circuito RLC serie.



$$V = i.R + L.\frac{di}{dt} + \frac{\int i(t).dt}{C}$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = R\frac{di}{dt} + L.\frac{di^2}{dt^2} + \frac{i}{C} \quad (*)$$

propongo:

$I=I_0.e^{j\omega t}$ y $V=V_0.e^{j\omega t+\varphi}$

Reemplazando en (*)

$$\frac{d(V_0.e^{j\omega t+\varphi})}{dt}=R\frac{d(I_0.e^{j\omega t})}{dt}+L.\frac{d^2(I_0.e^{j\omega t})}{dt^2}+\frac{I_0.e^{j\omega t}}{C}$$

$$V_0.(j\omega).e^{j\omega t+\varphi}=RI_0.(j\omega).e^{j\omega t}+L.(j\omega)^2.I_0.e^{j\omega t}+\frac{I_0.e^{j\omega t}}{C}$$

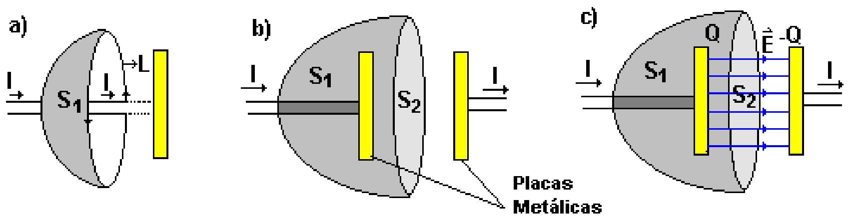
Dividiendo por jω:

$$V_0.e^{j\omega t+\varphi}=RI_0.e^{j\omega t}+L.(j\omega).I_0.e^{j\omega t}+\frac{I_0.e^{j\omega t}}{(j\omega)C}$$

$$V_0.e^{j\omega t+\varphi}=I_0.e^{j\omega t}.(R+j(L.\omega-\frac{1}{\omega C}))$$

Por lo tanto: $V=I.Z$

13) Explique en que circunstancias la ley de Ampere del campo magnetoestatico deja de ser valida. Muestre como se deduce el nuevo termino correctivo.



La ley de Ampere establece que:

$$\oint \vec{H}.dl=I_{enc}=\iint J.ds$$

Si se toma una superficie S_1 fuera del capacitor no hay ningún problema para aplicar la ecuación. Sin embargo si tomamos una superficie S_2 que pase por adentro del capacitor y no intercepte el cable, el lado derecho de la ecuación es nulo mientras que el izquierdo no.
Para resolver esto se considera que la corriente que ingresa al capacitor es directamente la derivada de la carga almacenada en el mismo respecto del tiempo.

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Además como el capacitor se carga en superficie, $Q = \sigma.A$ (donde A es el área de las placas) la corriente se puede poner como:

$$I = \frac{d(\sigma.A)}{dt}$$

Y como $\sigma = |\vec{D}|$ la corriente resulta:

$$I = A.\frac{d|\vec{D}|}{dt}$$

Para obtener la densidad de corriente que es lo que se debe utilizar en la ecuación de Ampere, se divide la corriente por el área de las placas, y así se tiene que:

$$\frac{I}{A} = \vec{J} = \frac{d|\vec{D}|}{dt}$$

Esta corriente se llama corriente de desplazamiento y se la nota $\vec{J}_D$. Por lo tanto la ley de Ampere resulta:

$$\oint \vec{H}.dl = I + \frac{d}{dt}\iint \vec{D}.ds$$

Es decir que se agrega una corriente "falsa". De esta manera cuando estoy fuera de un capacitor, Esta corriente no existe y la expresión de Ampere se reduce a la que ya se conocía, sin embargo, dentro del capacitor las corrientes encerradas no existen pero si existe esta nueva corriente de desplazamiento que evita que no se cumpla la ley de Ampere.

14) Escriba las ecuaciones de Maxwell en forma integral y diferencial explicando el sentido físico de las mismas.

Las ecuaciones de Maxwell son:

1- Ley de Gauss referida a campo eléctrico

- En forma integral: $\oiint \vec{E}.ds = \frac{1}{\xi_0}.\iiint \rho.dv$
- En forma diferencial: $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\xi_0}$

Esta expresión demuestra que las lineas de campo eléctrico divergen de las cargas positivas a las negativas.

2- Ley de Gauss referida a campo magnético

- En forma integral: $\oiint \vec{B}.ds=0$
- En forma diferencial: $\vec{\nabla}.\vec{B}=0$

Esta expresión demuestra que las lineas de campo magnético no divergen, es decir, no existen monopolos magnéticos (no hay fuentes ni sumideros)

3- Ley de Ampere

- En forma integral: $\oint \vec{H}.dl=\iint J_c.ds+\frac{d\iint \vec{D}.ds}{dt}$
- En forma diferencial: $\vec{\nabla} x \vec{H}=J_c+\frac{d\vec{D}}{dt}$

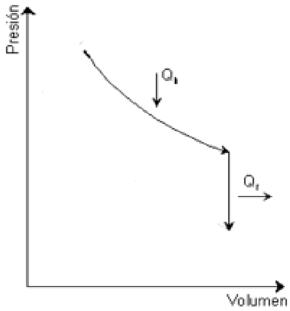
4- Ley de Faraday

- En forma integral: $\oint \vec{E}.dl=-\frac{d\iint \vec{B}.ds}{dt}$
- En forma diferencial: $\vec{\nabla} x \vec{E}=-\frac{d\vec{B}}{dt}$

Esta ley expresa que sobre un circuito se induce una fem ante la variación del flujo del vector inducción magnética. Esta fem tiende a oponerse a la causa que provoco la variación de flujo, es por eso que se escribe con un signo menos.

15) Demuestre la expresión de la energía interna de un gas ideal

Cualquier proceso se puede pensar como una isoterma + una isocora.

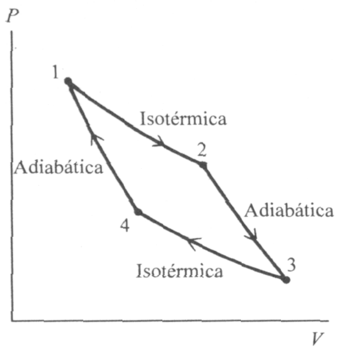


Para el caso de la isoterma, $\Delta U = 0$
Para el caso de la isocora, $\Delta U = Q$

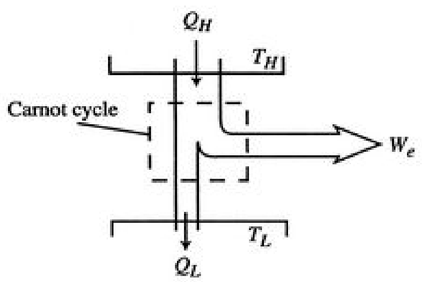
Por lo tanto, como ΔU es función de estado (solo importan el pto inicial y final y no el recorrido), la energía total del sistema es Q.

Para el caso de un gas ideal, $Q = n.c_p.(T_f - T_i)$

16) Demuestre que el rendimiento del ciclo de Carnot se puede escribir en función de las temperaturas de las fuentes térmicas



(1)



(2)

Del segundo dibujo se ve que

$Q_c = W + Q_f$

$$W = Q_c - Q_f$$

Además, la expresión del rendimiento de una maquina es:

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_c}\right|$$

Reemplazando W por la expresión vista anteriormente:

$$\eta = \left|\frac{Q_c - Q_f}{Q_c}\right|$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_f}{Q_c}$$

Del diagrama PV (1)

<u>Tramo (3-4)</u>

Isoterma:

$$\Delta U = 0$$

$$Q = -W$$

$$Q_f = -m.R.T.ln(\frac{V_4}{V_3})$$

De acá se deduce que en el tramo (1-2) $Q_c = -m.R.T.ln(\frac{V_2}{V_1})$

$$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{m.R.T.ln(\frac{V_3}{V_4})}{m.R.T.ln(\frac{V_2}{V_1})}$$

$$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_4 . \ln(\frac{V_3}{V_4})}{T_1 . \ln(\frac{V_2}{V_1})}$$

Tramo (4-1)

Adiabática:

La expresión para las adiabáticas es:

$$T_4 . V_4^{\gamma-1} = T_1 . V_1^{\gamma-1}$$

$$T_4 . V_4^{\gamma-1} = T_1 . V_1^{\gamma-1}$$

Análogamente para el tramo (2-3)

$$T_3 . V_3^{\gamma-1} = T_2 . V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_4 . V_4^{\gamma-1} = T_1 . V_1^{\gamma-1}}{T_3 . V_3^{\gamma-1} = T_2 . V_2^{\gamma-1}}$$

Como T_1 T_2 están sobre la misma isoterma $T_1 = T_2$
Como T_3 T_4 están sobre la misma isoterma $T_3 = T_4$

$$\frac{V_4^{\gamma-1} = V_1^{\gamma-1}}{V_3^{\gamma-1} = V_2^{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Reemplazando en

$$\frac{Q_f}{Q_c} = \frac{T_4 . \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{T_1 . \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$$

obtengo

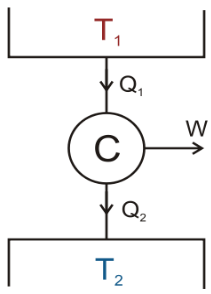
$$\frac{Q_f}{Q_c}=\frac{T_4}{T_1}$$

Donde $T_f=T_4$ y $T_c=T_1$

17) Demuestre el teorema de Carnot.

El teorema de carnot establece que:

"No puede existir una máquina térmica que funcionando entre dos fuentes térmicas dadas tenga mayor rendimiento que una de Carnot que funcione entre esas mismas fuentes térmicas".



Para demostrar esto se supone que existe una maquina cuyo rendimiento es mayor que el de la maquina de carnot. $\eta_{nc}>\eta_c$

Se tiene entonces dos máquinas, una "no carnot" (*nc*) , y otra de Carnot (*c*) , operando entre las mismas fuentes térmicas y absorbiendo el mismo calor de la caliente.

El rendimiento de una maquina esta dado por:

$$\eta=\frac{W}{Q}$$

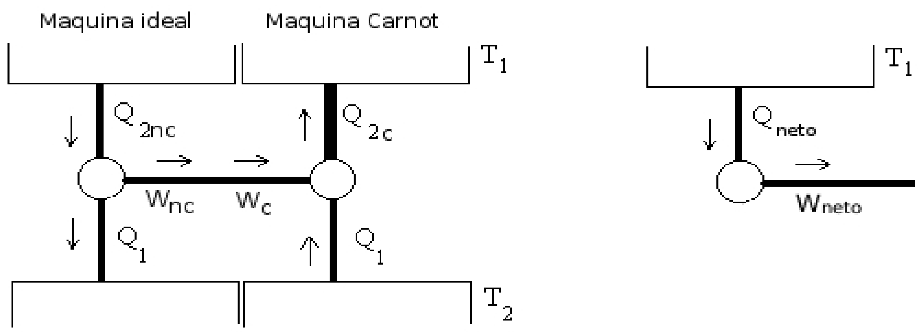
Entonces:

$$\frac{W_{nc}}{Q_{nc}}>\frac{W_c}{Q_c}$$

$$W_{nc}>W_c$$

$$Q_{2\mathrm{nc}}<Q_{2\mathrm{c}}$$

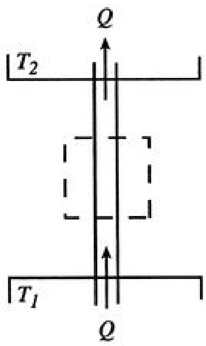
Como la maquina de carnot es reversible, se le puede hacer funcionar como maquina frigorifica. Como $W_{nc} > W_c$, la máquina *nc* puede suministrar a *c* el trabajo W_c que necesita para funcionar como máquina frigorífica, y *nc* producirá un trabajo neto $W_{nc} - W_c$. Al funcionar en sentido inverso, *c* está absorbiendo calor Q_{2c} de la fuente fría y está cediendo calor Q_1 a la caliente.
El sistema formado por las dos máquinas funciona cíclicamente realizando un trabajo $W_{nc} - W_c$ e intercambiando un calor $Q_{2nc} - Q_{2c}$ con una única fuente térmica, lo cual va en contra del segundo principio de la termodinámica. Por lo tanto: $\eta_{nc} \leq \eta_c$



18) Enuncie los enunciados de Kelvin-Plank y de Clausius del segundo principio de la termodinámica y demuestre su equivalencia.

Clausius:

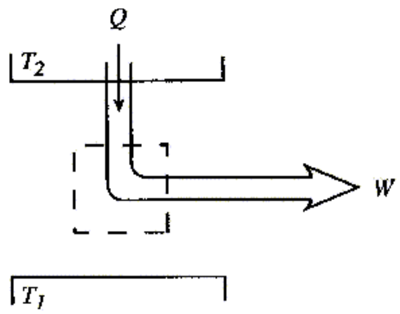
"*no es posible un proceso cíclico cuyo único resultado sea la transferencia de calor de un cuerpo de menor temperatura a otro de mayor*".



No es posible

Kelvin-Plank:

"No es posible construir una maquina cíclica cuyo único resultado sea la conversión de calor en trabajo".



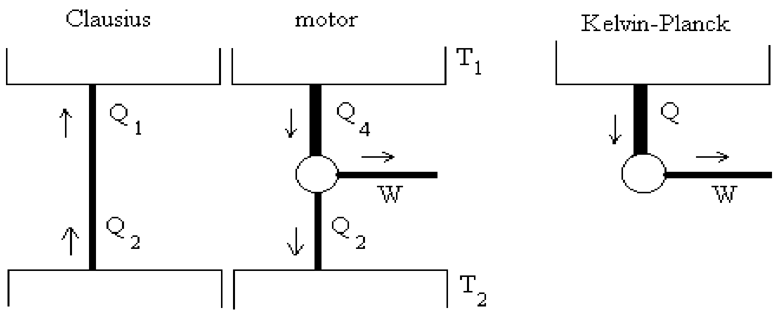
No es posible

Para demostrar su equivalencia hay que demostrar que:

- No Kelvin implica no Clausius
- No Clausius implica no Kelvin

De esta manera, por lógica, Kelvin implica Clusius y Clausius implica Kelvin.

No Clausius implica no Kelvin



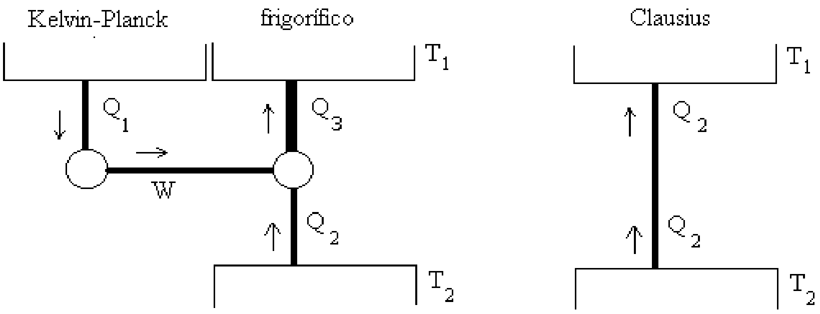
Suponemos una maquina que viole el enunciado de Clausius.
Vemos que si solo se transfiere calor de la fuente fría a la caliente $Q_2 = Q_1$, por lo tanto entra y sale el mismo calor.
Si a esta maquina se le agrega una maquina térmica que cumpla con la primera ley de la termodinámica, se tiene que $Q_4 - Q_2 = W$. Sumando miembro a miembro:

$Q_4 - Q_2 = W$
+
$Q_2 - Q_1 = 0$

$Q_4 - Q_1 = Q = W$

La maquina resultante viola el enunciado de Kelvin-Plank ya que transforma el calor completamente en trabajo.

No kelvin implica no clausius



Suponemos una maquina que viole el enunciado de Kelvin-Plank.

$Q_1 = W$

Si a esta maquina se le agrega una maquina frigorífica que cumpla con la primera ley de la termodinámica, se tiene que $Q_2 - Q_3 = W$.

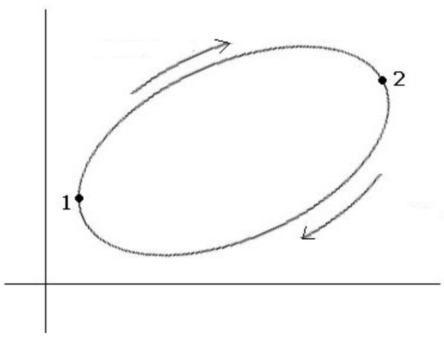
Juntando las 2 expresiones:

$$Q_2 - Q_3 = Q_1$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_3$$

La maquina resultante viola el enunciado de Clausius ya que transfiere calor de una fuente fría a una mas caliente.

19) A partir de la desigualdad de Clausius demuestre que la entropía es una función de estado.



La desigualdad de Clausius establece que:

$$\oint \frac{\partial Q}{T} \leqslant 0$$

$$\Delta S = \oint \frac{\partial Q}{T}$$

$$\Delta S = S_1 - S_1 = 0$$

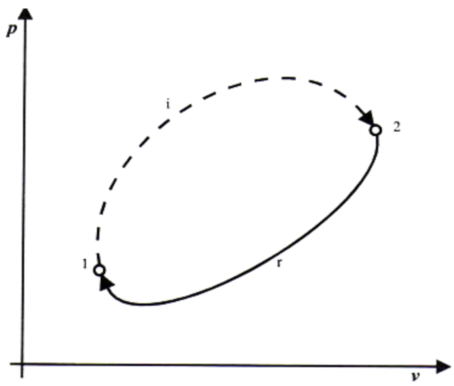
$$\oint \frac{\partial Q}{T} = \int_{1-2} \frac{\partial Q}{T} + \int_{2-1} \frac{\partial Q}{T} = 0$$

$$\int_{1-2} \frac{\partial Q}{T} = -\int_{2-1} \frac{\partial Q}{T}$$

$$\int_{1-2} \frac{\partial Q}{T} = \int_{1-2} \frac{\partial Q}{T}$$

Las dos integrales son iguales, por lo tanto no importa el camino, es decir, S es función de estado

20) A partir de la desigualdad de Clausius demuestre la formulación entrópica del segundo principio de la termodinámica.



Como se vio antes, la desigualdad de Clausius establece que:

$$\oint \frac{\partial Q}{T} \leqslant 0$$

- Es menor que cero si el proceso es irreversible
- Es igual a cero si el proceso es reversible

El tramo punteado (1-2) es un proceso irreversible mientras que el tramo (2-1) es reversible.

$$\int_{1-2} \frac{\partial Q}{T} + \int_{2-1} \frac{\partial Q}{T} = 0$$

reemplazando $\int_{2-1} \frac{\partial Q}{T}$ por $S_1 - S_2$

$$\int_{1-2} \frac{\partial Q}{T} + S_1 - S_2 < 0$$

Como uno de los tramos es irreversible, todo el proceso resulta irreversible, es por eso que el resultado de la suma es menor que cero.

$$\int_{1-2} \frac{\partial Q}{T} < S_2 - S_1 \quad \text{O} \quad \Delta S \geqslant \int_{1-2} \frac{\partial Q}{T}$$

Pasando a diferenciales esta expresión

$$dS \geqslant \frac{\partial Q}{T}$$

Además, por el primer principio de la termodinámica se sabes que

$$\partial Q \geqslant dU + \partial W$$

Reemplazando

$$T.dS \geqslant dU + P.dV$$

21) Demuestre la expresión de la ecuación de onda.

Partiendo de la expresión del rotor del rotor del campo magnético, según lo visto en análisis II:

$$\nabla x \nabla x \vec{B} = \nabla (\nabla . \vec{B}) - \nabla^2 . \vec{B}$$

y reemplazando por:

- $\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$ Ley de Gauss para campo magnético
- $\nabla x \vec{B} = \mu_0 . \xi_0 \frac{d.E}{dt}$

obtengo:

$$\nabla x \mu_0 . \xi_0 \frac{d.E}{dt} = -\nabla^2 . \vec{B}$$

Además,

$$\nabla x (\frac{dE}{dt}) = \frac{d(\nabla x E)}{dt}$$

$$\mu_0 . \xi_0 \frac{d.\nabla x E}{dt} = -\nabla^2 . \vec{B}$$

Reemplazando por

$$\vec{\nabla} x \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$ Ley de Faraday

Se llega a la expresión de la ecuación de onda

$$\mu_0 . \xi_0 \frac{d^2 . B}{dt^2} = \nabla^2 . \vec{B}$$

Análogamente se deduce que la expresión de la ecuación de onda para un campo eléctrico es:

$$\mu_0 . \xi_0 \frac{d^2 . E}{dt^2} = \nabla^2 . \vec{E}$$

22) Demuestre la relación existente entre la capacidad calorífica de un gas ideal a volumen constante y la capacidad calorífica a presión constante.

Si consideramos el proceso a volumen constante

$$\partial Q = n.c_v . dT$$

Como el volumen es constante, no se realiza trabajo, por lo tanto $\partial Q = dU$ y entonces:

$$dU = n.c_v . dT$$

Si ahora consideramos el proceso a presión constante

$$\partial Q = n.c_p . dT \quad (1)$$

En este caso el trabajo realizado es $\partial W = P.dV$

Expresando dW en función del cambio de temperaturas resulta $\partial W = n.R.dT$ (2)

Ahora por la primera ley de la termodinámica:

$$dU = \partial Q - \partial W$$

reemplazando los términos de la derecha por (1) y (2)

$$dU = n.c_p.dT - n.R.dT$$

Como la energía interna de un gas ideal depende solo de las temperaturas entre las que varia el mismo, dU es el mismo obtenido a volumen constante. Por lo tanto:

$$n.c_v.dT = n.c_p.dT - n.R.dT$$

De esta igualdad se llega a que:

$$c_v = c_p - R$$

Es decir:

$$c_p - c_v = R$$

23) **Describa los 3 mecanismos por medio de los cuales se trasmite el calor y escriba en cada caso la expresión que permite calcular la energía transmitida por unidad de tiempo.**

Los 3 mecanismos a través de los cuales el calor se transmite son:

Conducción: El calor usa un medio material (generalmente en estado solido), propagándose mediante la agitación térmica de moléculas que excitan a sus vecinas. En este mecanismo no hay transporte macroscópico de materia.

La expresión que nos dice la cantidad de calor por unidad de tiempo es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda.S.\vec{\nabla} T$$

Donde:

$[\lambda] = \frac{Kcal}{m.h.^oC}$: Coeficiente de conductividad del material.

$[S] = m^2$:superficie perpendicular al flujo de calor

$[\vec{\nabla} T] = \frac{^{o}C}{m}$: Gradiente de temperatura

Convección: El calor se transporta junto con el medio material (liquido o gas). En este mecanismo hay transporte macroscópico de materia.

La expresión que nos dice la cantidad de calor por unidad de tiempo es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = h.S.(T_c - T_f)$$

Donde:

$[h] = \frac{Kcal}{h.m^2.\,^{o}C}$:Coeficiente de convección

$[S] = m^2$: Superficie perpendicular al flujo de calor

$[T_c - T_f] = {}^{o}C$: Diferencia de temperaturas (siempre positivo)

Radiación: El Calor se transporta a través de ondas de radiación. No necesita de un medio para propagarse. En este mecanismo no hay transporte de materia.

La expresión que nos dice la cantidad de calor por unidad de tiempo es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sigma.\varepsilon.S.(T_c^{\,4} - T_f^{\,4})$$

Donde:

$[\sigma] = 5{,}67.10^{-8} \frac{Watt}{^{o}C^4.m^2}$

$0 < \varepsilon < 1$:Coeficiente de emisividad

$[S] = m^2$: Superficie perpendicular al flujo de calor

$[T_c - T_f] = {}^{o}C$ Diferencia de temperaturas (siempre positivo).