Resumen Teórico de 62.01 Física I

Autor: Bernardo Ortega

Índice:

Sistemas de Partículas

Cinemática de un Centro de Masa:

- Vector posición: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{M_T}$ con $n \in \mathbb{N}$

- Vector velocidad: $\vec{v}_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i}{M_T}$ con $n \in \mathbb{N}$

- Vector aceleración: $\vec{a}_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i}{M_T}$ con $n \in \mathbb{N}$

Energía de un Centro de Masa:

- Energía Cinética: $\mathrm{E}_c = \dfrac{1}{2} \cdot M_T \cdot V_{cm}^2$

Choque (Colisiones):

Existen tres tipos distintos de colisiones:

1) Choque Plástico o Inelástico
2) Choque Perfectamente Elástico
3) Choque Explosivo

Observación:

En los Choques (Colisiones) la cantidad de movimiento se conserva es decir $\vec{p}_f = \vec{p}_i$ siempre y cuando la $\sum F_{ext} = 0$

1) Choque Plástico o Inelástico:

Es aquel choque que tiene la máxima pérdida de energía.

$$\Delta E_c < 0$$

Valor del coeficiente de restitución: $e = 0$

Nota:

El coeficiente de restitución es calculado como $e = \frac{|v_r|}{|v_i|}$

Formula del choque plástico:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

2) Choque Elástico

Es aquel choque en el que se conserva la energía cinética.

$$\Delta E_c = 0$$

Valor del coeficiente de restitución: $e = 1$

Fórmula del choque elástico:

$$m_1 \cdot \vec{v}_{1i} + m_2 \cdot \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{1f}$$

3) Choque Explosivo

Es aquel choque en el que hay un incremento de la energía

$$\Delta E_c > 0$$

Valor del coeficiente de restitución: ¡¡¡¡NO PUEDE DEFINIRSE!!!!

Momento cinético:

$$\vec{L}_{LAB} = \underbrace{\vec{L}_{CM}}_{\text{Spin}} + \underbrace{M_T \cdot \left(\vec{r} \times \vec{v}_{CM}\right)}_{\text{Orbital}}$$

Cuerpo Rígido:

El cuerpo rígido puede realizar 3 tipos de movimientos:

1) Traslación Pura: Puede moverse sin girar, las velocidades de c/punto del cuerpo rígido es la misma

2) Rotación Pura: Puede girar sin moverse, las velocidades de c/punto del cuerpo rígido son distintas

3) Rototraslación Pura: Es la rotación efectuada a un eje que se desplaza

Proposición: Un cuerpo rígido tiene 6 grados de libertad, 3 para el CM y otros 3 de rotación.

Lema:

El campo de velocidades de un Cuerpo Rígido que realiza una rotación pura, esta íntegramente determinado por el eje de rotacion y la $\vec{\omega}$ (es decir, el campo de velocidades no dependen del origen de coordenadas.)

Aclaración: Campo de velocidades $\mathrm{V}(r)$ es $\mathrm{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Cinemática del Cuerpo Rígido:

Dados 2 puntos de un cuerpo rígido A y B distanciados por un vector $\vec{r}$, podemos definir que:

$$\vec{\mathrm{V}}_B = \vec{\mathrm{V}}_A + \underbrace{\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)}_{\text{Velocidad de Rotacion}}$$

Entonces podemos deducir que

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{\mathrm{V}}_B}{\partial t}}_{a_B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathrm{V}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)$$

Entonces $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{A \to B} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)_{A \to B}$

Por lo tanto la formula de $\vec{a}_B$ me queda como:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{A\to B} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)_{A\to B}$$

Energía del Cuerpo Rígido:

- Energía Cinética: $\mathrm{E}_C = \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{I}\cdot\omega^2}_{\substack{\mathrm{E}_C \text{ de} \\ \text{Rotación}}} + \underbrace{\frac{1}{2}M_T \cdot v_{cm}^2}_{\substack{\mathrm{E}_C \text{ del} \\ \text{Centro de Masa}}}$

- Energía Potencial Gravitatoria: $\mathrm{E}_{\mathrm{pg}} = m \cdot g \cdot h_{CM}$

Momento de Inercia:

Propiedad: Una de las propiedades mas importantes del Momento de Inercia de un Cuerpo Rígido es, La Propiedad Aditiva $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$

- Radio de giro baricéntrico: $\mathrm{I} = mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\mathrm{I}}{m}}$

- Distintos momentos de inercia:

1) Barra: $\mathrm{I}_{\mathrm{Barra}} = \frac{ML^2}{12}$

2) Disco y Cilindro: $\mathrm{I}_{\substack{\text{disco}\\ \text{cilindro}}} = \dfrac{MR^2}{2}$

3) Esfera: $\mathrm{I}_{\text{esfera}} = \dfrac{2}{5}MR^2$

4) Anillo: $\mathrm{I}_{\text{anillo}} = MR^2$

Teorema de Steiner:

Sea un punto A que dista a una distancia a del centro de masa de un cierto cuerpo rígido, entonces podemos calcular el momento de inercia I_{A} de la siguiente manera:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \mathrm{I}_{\mathrm{CM}} + ma^2$$

Dinámica del Cuerpo Rígido:

$$\sum \vec{\mathrm{F}} = m\vec{a}_{CM}$$

Dinámica Incursiva:

Sea una fuerza $\vec{\mathrm{F}} = \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ entonces $\int \vec{\mathrm{F}}\,\mathrm{dt} = \int \mathrm{d}\vec{p}$ entonces podemos transcribirla como

$$\vec{\mathrm{J}} = \underbrace{m\left(\vec{v}_{CMf} - \vec{v}_{CMi}\right)}_{\text{Traslación}}$$

Si además al impulso podemos escribirlo como $\vec{\mathrm{J}} = \int \vec{\mathrm{F}}\,\mathrm{dt}$, multiplicamos ambos miembros por el vector $\vec{r}$ entonces nos queda

$\vec{r} \times \vec{\mathrm{J}} = \vec{r} \times \int \vec{\mathrm{F}}\,\mathrm{dt}$ como $\vec{r}$ pertenece a una fracción muy chiquita de tiempo entonces

$$\vec{r}\times\vec{J} = \underbrace{\int \vec{r}\times\vec{F}\ dt}_{\text{Torque}}$$

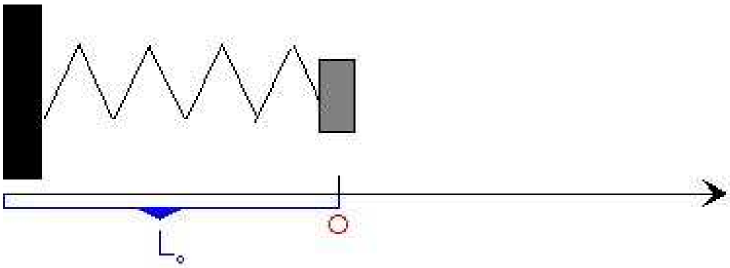
$$\vec{r}\times\vec{F} = \underbrace{\frac{\partial\vec{L}}{\partial t}}_{\text{momento cinético}}$$

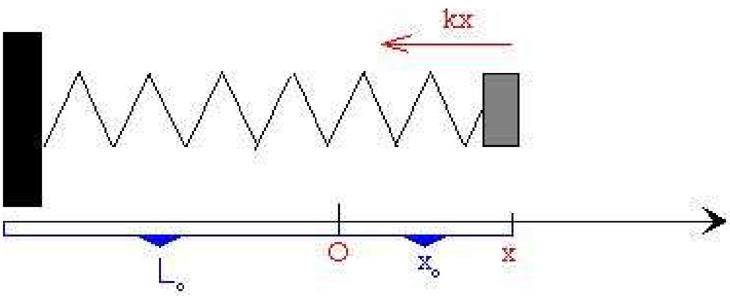
por lo tanto nos queda $\vec{r}\times\vec{J} = \int \frac{d\vec{L}}{\cancel{dt}}\ \cancel{dt}$ Entonces $\vec{r}\times\vec{J} = \Delta\vec{L}$ si sabemos que $\Delta\vec{L} = I\left(\vec{\omega}-\vec{\omega}_o\right)$ entonces la formula nos queda:

$$\underbrace{\vec{r}\times\vec{J} = I\cdot\Delta\vec{\omega}}_{\text{Rotación}}$$

Movimiento Armónico Simple

- PRIMER CASO





Si $\Delta x = x - \underbrace{\cancel{l_0}}_{\text{0 en el sist. elegido}}$, entonces aplicando la 2da ley de Newton y despreciando todo tipo de rozamiento nos queda que

$\sum \mathrm{F} = m.a$ entonces nos queda $-k \cdot x = m \cdot a$, ahora si a la $a = \frac{\partial^2 x}{\partial \mathrm{t}^2}$ entonces se retranscribe en la ecuación de newton y nos queda $-k \cdot x = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \mathrm{t}^2}$ se la iguala a 0 y nos queda una <u>Ecuación Diferencial Lineal Homogénea de Segundo Orden</u> de este estilo: $m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \mathrm{t}^2} + k \cdot x = 0$ dividimos por la masa y nos queda que $\frac{\partial^2 x}{\partial \mathrm{t}^2} + \frac{k \cdot x}{m} = 0$.

La resolución de esta ecuación diferencial se la va a obviar ya que no es tema de estudio en la materia, así que la solución de esta ecuación es: $x(\mathrm{t}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)$

Aclaraciones:
• ω: Son las pulsaciones (ó frecuencia angular), es decir es la frecuencia propia o característica del sistema, también conocida como autofrecuencia. $\omega = 2\pi \cdot f$, con f = frecuencia
• φ: Fase Inicial
• A : Amplitud

Demostración del cálculo de la pulsación

- Si $\dfrac{\partial x}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{V} = \mathrm{A} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)$

- Si $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \mathrm{t}^2} = \mathrm{a} = -\mathrm{A} \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)$

Ahora si sabemos que $\mathrm{a} = -\omega^2 \cdot x$ y que $\omega = \mathrm{cte}$ entonces podemos decir que $\mathrm{a} = \mathrm{cte} \cdot x$ esta es la relación característica de un Movimiento Armónico Simple.

Ahora si reemplazamos esto en la Ec. Diferencial nos queda que

$$-\cancel{\mathrm{A}} \cdot \omega^2 \cdot \cancel{\mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)} + \frac{k}{m} \cdot \cancel{\mathrm{A}} \cdot \cancel{\mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)} = 0 \quad \text{entonces} \quad -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Despejamos y nos queda que: $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$

Demostración del cálculo de la Amplitud y la Fase Inicial

Si $x(\mathrm{t} = 0) = x_0$ y $\mathrm{V}(\mathrm{t} = 0) = 0$ son las condiciones iniciales, entonces nos queda que

$$\begin{cases} A\cdot \operatorname{sen}(\varphi) = x_0 & (\mathrm{I}) \\ \\ A\cdot\omega\cdot\cos(\varphi) = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Entonces si de (II) $\quad \cos(\varphi) = 0 \therefore \varphi = \frac{\pi}{2}, \cancel{\frac{3\pi}{2}}$ entonces nos queda que $\varphi = \frac{\pi}{2}$

ahora reemplazamos en (I) $\quad \underbrace{A\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} = x_0 \Rightarrow A = x_0$

Por lo tanto nos queda que:

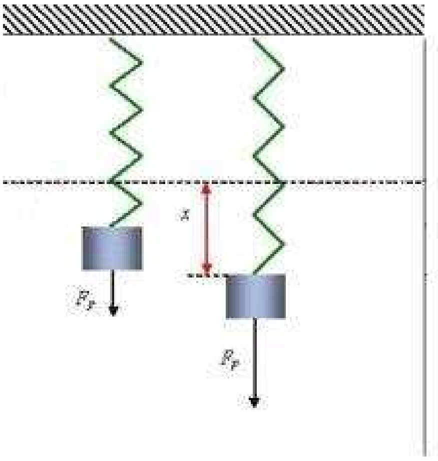
$$x(t) = x_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\omega\cdot t + \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{Fase} \\ \text{Inicial}}} \right)$$

Nota:
Si en el instante inicial $x_0 = 0$, La Fase Inicial tambien es 0

$$V(t) = x_0 \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$a(t) = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2} \right)$$

- <u>SEGUNDO CASO:</u>



Aplicando la 2da ley de Newton nos queda que $m \cdot g - k \cdot x = m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ despejamos un poco y tenemos una <u>Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden No Homogénea</u> de la forma $m \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k \cdot x = m\, g$ dividimos todo por la masa $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{k \cdot x}{m} = g$ como se ha mencionado anteriormente no se va a mostrar la resolución de la ecuación diferencial pero si su resultado.

<u>Nota:</u> La solución de una <u>Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden No Homogénea</u> se expresa de la siguiente manera: $x(\mathrm{t}) = \underbrace{\text{Sol. Homogenea}}_{x(\mathrm{t}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)} + \text{Sol. Particular}$

<u>CALCULO DE LA SOLUCIÓN PARTICULAR:</u>

Si se piensa que $x = \mathrm{cte}$ entonces reemplazando en la Ec. Diferencial nos queda $\frac{k}{m} \cdot \mathrm{cte} = g$ entonces $\underbrace{\mathrm{cte} = g \cdot \frac{m \cdot g}{k} = x_{\mathrm{eq}}}_{\text{Solución Particular}}$

Por lo tanto la Solución de la Ec. Diferencial es: $x(\mathrm{t}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi) + x_{\mathrm{eq}}$

Demostración del cálculo de la Amplitud y la Fase Inicial

Si $x(\mathrm{t}=0)=x_0$ y $\mathrm{V}(\mathrm{t}=0)=0$ son las condiciones iniciales, entonces nos queda que

$$\begin{cases} \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}(\varphi)+x_{\mathrm{eq}}=x_0 & (\mathrm{I}) \\ \\ \mathrm{A}\cdot\omega\cdot\cos(\varphi)=0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Entonces si de (II) $\cos(\varphi)=0 \therefore \varphi=\frac{\pi}{2},\cancel{\frac{3\pi}{2}}$ entonces nos queda que $\varphi=\frac{\pi}{2}$

ahora reemplazamos en (I) $\mathrm{A}\cdot\underbrace{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}+x_{\mathrm{eq}}=x_0 \Rightarrow \mathrm{A}=x_0-x_{\mathrm{eq}}$

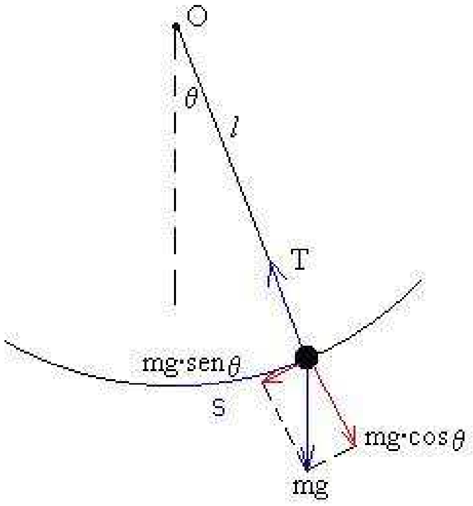
Por lo tanto nos queda que:

$x(\mathrm{t})=\left(x_0-x_{\mathrm{eq}}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\omega\cdot\mathrm{t}+\frac{\pi}{2}\right)+x_{\mathrm{eq}}$ en este caso $x_{\mathrm{eq}}\neq 0$

$\mathrm{V}(\mathrm{t})=\left(x_0-x_{\mathrm{eq}}\right)\cdot\omega\cdot\cos\left(\omega\cdot\mathrm{t}+\frac{\pi}{2}\right)$ en este caso $x_{\mathrm{eq}}\neq 0$

$\mathrm{a}(\mathrm{t})=-\left(x_0-x_{\mathrm{eq}}\right)\cdot\omega^2\cdot\mathrm{sen}\left(\omega\cdot\mathrm{t}+\frac{\pi}{2}\right)$ en este caso $x_{\mathrm{eq}}\neq 0$

<u>Aplicación del movimiento armónico simple a un péndulo ideal</u>



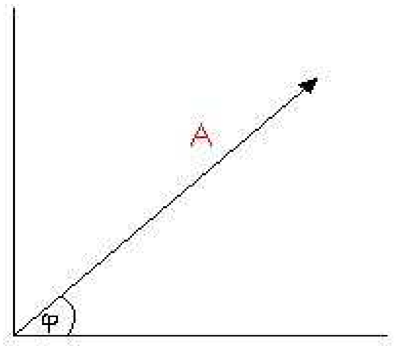
Planteamos la 2da ley de Newton: $-\cancel{m}\cdot g\cdot \mathrm{sen}(\theta)=\cancel{m}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ entonces despejando nos queda $m\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+m\cdot g\cdot \mathrm{sen}(\theta)=0$

<u>Observación:</u> $S=\theta\cdot l$

Entonces aplicando la observación tenemos que $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{l}\cdot \mathrm{sen}(\theta)=0$ por propiedad se sabe que si θ es un ángulo muy chico entonces $\mathrm{sen}(\theta)\cong\theta$.

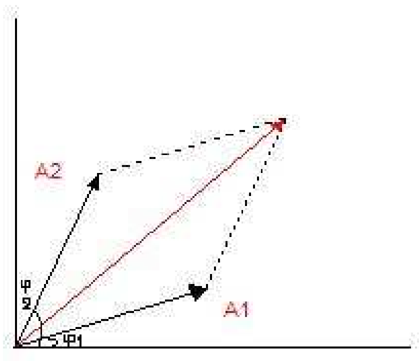
Por lo tanto reemplazando en la Ec. Diferencial nos queda que $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{l}\cdot\theta=0$ y la solución a esta ecuación diferencial es $\theta(\mathrm{t})=\mathrm{A}\cdot \mathrm{sen}(\omega\cdot \mathrm{t}+\varphi)$

Método Fasorial



Si $x(\mathrm{t}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi)$, el método fasorial consiste en tratar a $x(\mathrm{t})$ como un fasor (vector).

> Nota:
> Un **fasor** o **vector giratorio** es una constante en número complejo que representa la amplitud compleja (magnitud y fase) de una función de tiempo sinusoide. Usualmente se expresa como una exponencial, como un número complejo o como un vector. Los fasores se utilizan en ingeniería para simplificar los cálculos con sinusoides, ya que permiten reducir un problema de ecuaciones diferenciales a uno algebraico cuando la frecuencia del sistema es constante.



Si tenemos $x_1(\mathrm{t}) = \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi_1\right)$ y $x_2(\mathrm{t}) = \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{sen}\left(\omega \cdot \mathrm{t} + \varphi_2\right)$

Teorema del Coseno

$$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + 2 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \cos\left(\varphi_2 + \varphi_1\right)}$$

$$\mathrm{Tg}\left(\alpha\right) = \frac{\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\varphi_1\right) + \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{sen}\left(\varphi_2\right)}{\mathrm{A}_1 \cdot \cos\left(\varphi_1\right) + \mathrm{A}_2 \cdot \cos\left(\varphi_2\right)}$$

- PRIMER CASO

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$

Aplicamos el teorema del coseno.

$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + 2 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \underbrace{\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}_{0}}$ por lo tanto $\mathrm{A} = \sqrt{\left(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2\right)^2}$

entonces nos queda que $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$

$\mathrm{Tg}\left(\alpha\right) = \dfrac{\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\varphi_1\right) + \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{sen}\left(\varphi_2\right)}{\mathrm{A}_1 \cdot \cos\left(\varphi_1\right) + \mathrm{A}_2 \cdot \cos\left(\varphi_2\right)}$ entonces $\mathrm{Tg}\left(\alpha\right) = \dfrac{\mathrm{sen}\left(\varphi_1\right) \cancel{\left(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2\right)}}{\cos\left(\varphi_1\right) \cancel{\left(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2\right)}}$

entonces $\mathrm{Tg}\left(\alpha\right) = \mathrm{Tg}\left(\varphi_1\right)$ por lo tanto $\alpha = \varphi_1$

- SEGUNDO CASO

A_1, A_2 y $\varphi_1 - \varphi_2 = 180º$

Aplicamos el teorema del coseno.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\cdot A_1 \cdot A_2 \underbrace{\cdot \cos\left(\underbrace{\varphi_2 - \varphi_1}_{180º}\right)}_{-1}}$$ por lo tanto $A = \sqrt{\left(A_1 - A_2\right)^2}$

entonces nos queda que $A = A_1 - A_2$

- TERCER CASO

$x(t) = A_1 \cdot \mathrm{sen}\left(\omega \cdot t + \varphi_1\right)$

$y(t) = A_2 \cdot \mathrm{sen}\left(\omega \cdot t + \varphi_2\right)$

Aplicando el teorema del coseno llegamos a que

$$\frac{x^2}{A_1^2} \pm \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2\cdot x \cdot y}{A_1 \cdot A_2} \cdot \cos(\varphi) - \mathrm{sen}^2(\varphi) = 0$$

Nota:

Considérese a $\varphi = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

Fisicamente vamos a considerar en la ecuación $\frac{x^2}{A_1^2} \pm \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2\cdot x \cdot y}{A_1 \cdot A_2} \cdot \cos(\varphi) - \mathrm{sen}^2(\varphi) = 0$ el signo $+$

Algunos casos particulares:

- Si $\varphi = 0$ entonces $\varphi_1 = \varphi_2$ quiere decir q tienen la misma fase inicial.

  Entonces nos queda: $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2 \cdot x \cdot y}{A_1 \cdot A_2} = 0$ factorizamos $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0$

  entonces $y = \frac{A_2}{A_1} x$

- Si $\varphi = 0$ siguiendo el razonamiento del caso anterior nos queda que
  $\left(\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0$ entonces $y = -\frac{A_2}{A_1} x$

- Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ siguiendo el razonamiento del caso anterior nos queda que

  $$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

  Observemos que esta es la ecuación de una Elipse de Radio 1, ahora si vemos que la $A_1 = A_2$ obtendríamos la ecuación de una Circunferencia.

Ondas

<u>Definición</u>

Una onda es un fenómeno físico en el cual hay transferencia de energía y cantidad de movimiento sin desplazamiento de materia

Clasificación de ondas

Existen 6 maneras diferentes de clasificar ondas:

1) **<u>Ondas Viajeras o Progresivas:</u>** son aquellas ondas que viajan hasta toparse con algún obstáculo. <u>Ejemplo:</u> El sonido

2) **<u>Ondas Estacionarias:</u>** Esta confinada en un recinto, es decir esta limitada a una región del universo. <u>Ejemplo:</u> Cuerda de guitarra

3) **<u>Ondas Mecánicas o Materiales:</u>** Son aquellas que necesitan un medio material (sólido, liquido o gaseoso) para poder propagarse. <u>Ejemplo:</u> El sonido

4) **<u>Ondas Electromagnéticas:</u>** Se pueden propagar en el vacío. <u>Ejemplo:</u> Luz, Radio, U.V, Rayos X, etc…

5) **<u>Ondas Longitudinales:</u>** La dirección de propagación de la onda y el movimiento de las partículas son paralelos entre si. <u>Ejemplo:</u> El Sonido

6) **<u>Ondas Transversales:</u>** La dirección de propagación de la onda y el movimiento de las partículas son perpendiculares entre si. <u>Ejemplo:</u> Cuerdas de guitarra

Propiedades y Características

1) Toda onda tiene una perturbación de un estado de equilibrio. <u>Ejemplo:</u> Charco de Agua

2) Toda onda implica el movimiento de muchos puntos, estos puntos tienen que estar acoplados entre si

3) La influencia de los límites, es decir que toda onda se propaga pero tiene límites

4) Principio de superposición: La onda resultante se puede pensar como la superposición de ondas individuales pero cada onda individual no es afectada por las demás

Expresión matemática

Ecuación de una onda

Variables:

-Eje x
-Variable oscilando y, también puede reemplazar a la δ
-Tiempo t

$$\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}_{\text{Ecuación de una onda}}$$

Esta ecuación diferencial admite muchas soluciones, por ende la solución que se va a utilizar es:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - kx + \varphi)$$

Aclaraciones:

- C = Velocidad de propagación: Depende del tipo de onda y del medio donde se propaga

- $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ = Velocidad de oscilación: siempre da una función periódica

-si a $y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - kx)$ fijamos x nos queda un Movimiento Armónico Simple

- ω = Pulsación y $\omega = 2\pi \cdot f$ la f (frecuencia) de la onda y las partículas son iguales

- A = Amplitud de la onda

- k = Numero de onda y $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ con λ = Longitud de onda

Nota:

-La f y λ son inversamente proporcionales

-si derivamos 2 veces a la función $y(x,t)$ llegamos a que $C = \lambda \cdot f$

Sentido de propagación

Por convención:

- Si $y(x,\text{t}) = \text{A}\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot\text{t} - \text{k}x + \varphi\right)$ la onda se propaga en sentido **positivo** con respecto al eje *x*
- Si $y(x,\text{t}) = \text{A}\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot\text{t} + \text{k}x + \varphi\right)$ la onda se propaga en sentido **negativo** con respecto al eje *x*

Ondas que se propagan en cuerdas

$$\text{C} = \sqrt{\frac{\text{T}}{\mu}}$$

Aclaraciones: - T = Tensión de la cuerda - μ =Densidad lineal de masa => $\mu = \frac{\partial m}{\partial x} = \frac{m}{\text{L}}$

Ondas que se propagan en varillas

$$\text{C} = \sqrt{\frac{\vartheta}{\delta}}$$

Aclaraciones: - ϑ = Modulo de Young

Interferencia (1ra Parte)

Solo hay interferencia cuando hay ondas.

$$\left.\begin{aligned} y_1(x,\mathrm{t}) &= \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(\omega\cdot\mathrm{t}-\mathrm{k}x+\varphi_1\right) \\ y_2(x,\mathrm{t}) &= \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(\omega\cdot\mathrm{t}-\mathrm{k}x+\varphi_2\right) \end{aligned}\right\}\text{Conseción}$$

Principio de superposición

$$y_1(x,\mathrm{t})+y_2(x,\mathrm{t})=\mathrm{A}\cdot\left[\mathrm{sen}\left(-\omega\cdot\mathrm{t}+\mathrm{k}x+\varphi_1\right)+\mathrm{sen}\left(-\omega\cdot\mathrm{t}+\mathrm{k}x+\varphi_2\right)\right]$$

Propiedad trigonométrica:

$$\mathrm{sen}\left(\alpha\right)+\mathrm{sen}\left(\beta\right)=2\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Aplicando la propiedad trigonométrica a la formula nos queda:

$$\mathrm{A}\cdot\left[\mathrm{sen}\left(-\omega\cdot\mathrm{t}+\mathrm{k}x+\varphi_1\right)+\mathrm{sen}\left(-\omega\cdot\mathrm{t}+\mathrm{k}x+\varphi_2\right)\right]=2\mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(-\omega\cdot\mathrm{t}+\mathrm{k}x+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\overbrace{\varphi_2-\varphi_1}^{\Delta\varphi}}{2}\right)$$

entonces

$$\boxed{\underbrace{2\mathrm{A}\cdot\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}_{\mathrm{A'}}\cdot\mathrm{sen}\left(-\omega\cdot\mathrm{t}+\mathrm{k}x+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$ Ecuación de la onda resultante.

Algunos casos:

- Si $\Delta\varphi=0$ entonces $\mathrm{A'}=2\mathrm{A}$ es una interferencia constructiva
- Si $\Delta\varphi=\pi$ entonces $\mathrm{A'}=0$ es una interferencia destructiva

Ondas estacionarias

$$y_1(x,t) = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - kx + \varphi_1)$$

$$y_2(x,t) = A \cdot \mathrm{sen}(-\omega \cdot t - kx + \varphi_2)$$

entonces $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ aplicando la propiedad trigonométrica nos queda

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = \underbrace{2 \cdot A \cdot \mathrm{sen}\underbrace{\left(kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{\text{Espacial}}}_{\text{A(x) depende de la posición}} \cdot \cos\underbrace{\left(\omega \cdot t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{Temporal}}$$

Nodos: Puntos que nunca oscilan, si $A(x) = 0$ entonces $k \cdot x_n + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = n\pi$

despejamos x_n y nos queda $x_n = \frac{n \cdot \pi}{k} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2 \cdot k}$ si $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ entonces nos queda

$\boxed{x_n = \frac{n \cdot \lambda}{2} - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \lambda}{4\pi}}$ Posición de un nodo

Observación:

La distancia entre nodo y nodo tiene que darme media longitud de onda es decir

$$x_n' - x_n = n \cdot \frac{\lambda}{2} - n' \cdot \frac{\lambda}{2} = \overbrace{(n - n')}^{N} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Vientres: son aquellos puntos que tienen la máxima amplitud y el

$\mathrm{sen}\left(k \cdot x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = 1$ entonces $A(x) = 2A$ por lo tanto

$$k\cdot x_v + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$$ despejamos x_v entonces nos queda

$$\boxed{x_v = \frac{(2n+1)\cdot\lambda}{4} - \frac{(\varphi_1+\varphi_2)\cdot\lambda}{4\pi}}$$ Posición de un vientre

<u>Observación:</u>

La distancia entre vientre y vientre tiene que dar media longitud de onda es decir

$$x_v' - x_v = \frac{\cancel{2}\,\overbrace{(n-n')}^{N}\cdot\lambda}{\cancel{4}_2} = N\cdot\frac{\lambda}{2}$$

<u>Observación:</u>

La distancia entre vientre y nodo se puede calcular como:

$$x_v - x_n = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{4} - n'\cdot\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda\cdot\left(\left(\frac{n-n'}{2}\right)+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{\lambda}{4}\underbrace{\left(2(n+n')+1\right)}_{\text{N (es impar)}}$$

Tubos

Tubos abiertos

- Desde el punto de vista de la elongación en ambos extremos del tubo se tiene un vientre
- Desde el punto de vista de la presión en ambos extremos del tubo se tiene un nodo

En el estado fundamental se obtiene:

- La longitud de onda se expresa como: $\lambda_o = 2\mathrm{L}$ con $\mathrm{L} =$ a la longitud del tubo
- La frecuencia inicial de una onda se expresa como: $f_o = \dfrac{\mathrm{C}}{2\mathrm{L}}$
- La frecuencia de una onda se expresa como $f = \dfrac{n \cdot \mathrm{C}}{2\mathrm{L}}$

Tubos cerrados

- Desde el punto de vista de la elongación en el extremo inicial del tubo se tiene un vientre y en el extremo final se tiene un nodo
- Desde el punto de vista de la presión en el extremo inicial del tubo se tiene un nodo y en el extremo final se tiene un vientre

En el estado fundamental se obtiene:

- La longitud de onda se expresa como: $\lambda_o = 4\mathrm{L}$ con $\mathrm{L} =$ a la longitud del tubo
- La frecuencia inicial de una onda se expresa como: $f_o = \dfrac{\mathrm{C}}{4\mathrm{L}}$
- La frecuencia de una onda se expresa como $f = \dfrac{n \cdot \mathrm{C}}{4\mathrm{L}}$

Energía de ondas

La energía de ondas en el equilibrio se puede escribir como: $E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{max}^2$ ahora para saber como es el valor de V_{max} se tiene que observar la ecuación del **Movimiento Armónico Simple**.

Si en un movimiento armónico simple la posición es: $x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi)$ entonces derivando esta expresión respecto del tiempo se obtiene q la velocidad es: $V(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi)$, ahora la V_{max} se obtiene cuando el $cos(\omega \cdot t + \varphi) = 1$ por lo tanto $V_{max} = A \cdot \omega$.

Entonces si se tenía que:

$E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{max}^2$ entonces $E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2$ si $\omega = 2\pi \cdot f$ reemplazando en la ecuación nos queda que:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 4\pi^2 \cdot A^2 \cdot f^2$$

ahora para averiguar como es m tenemos q utilizar la siguiente expresión: $\mu = \frac{\partial m}{\partial l}$ entonces $\partial m = \mu \cdot \partial l$, ahora si $\partial l = c \cdot \partial t$ entonces nos queda que $\partial m = \mu \cdot c \cdot \partial t$.

Si $E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 4\pi^2 \cdot A^2 \cdot f^2$ reemplazando nos queda $\partial E_M = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot c \partial t \cdot 4\pi^2 \cdot A^2 \cdot f^2$.

Esta expresión es bastante incomoda para trabajar ya que tenemos ∂E_M y ∂t, para deshacernos de ellos tenemos que trabajar con **Potencia** si la potencia se escribe como: $P = \frac{\partial E_M}{\partial t}$ entonces:

$$\boxed{P = \frac{\partial E_M}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot c \cdot 4\pi^2 \cdot A^2 \cdot f^2}$$

Intensidad de una onda (sonido)

Observación:

Tienen que tener la misma fase, es decir el **arg** del Sen tiene que ser el mismo y tienen que estar a la misma altura.

Ecuación de la intensidad

$$I = \frac{P}{S}$$

Aclaraciones:

- I = Intensidad
- P = potencia
- S = Superficie

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\mu}{S}}_{\delta_{aire}} \cdot c \cdot A^2 \omega^2$$

Retranscribimos la ecuación y nos queda que:

$$\boxed{I = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} \cdot \delta_{aire} \cdot c \cdot A^2 \omega^2}$$

Nivel de Intensidad

$$NI = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Aclaraciones:

I_0 = Intensidad mínima audible. $I_0 = 10^{-12}\,\dfrac{w}{cm^2}$

I = Intensidad medida

El nivel de intensidad mínima audible es: $NI = 0db$

$1db$ es el menor cambio que un oído humano puede escuchar.

Aclaraciones:

-Amplitud → Volumen

-Frecuencia → Tono o Altura

-Timbre → Número y Calidad de los Armónicos

Rango de audición humana

$\underbrace{20Hz}_{\text{intrasonidos}}$ ------------------------------ $\underbrace{20000Hz}_{\text{ultrasonidos}}$

Interferencia (2da Parte)

Existen 2 tipos de interferencia, la **Resonancia** y el **Batido**.

Resonancia

Ocurre cuando dos sistemas físicos tienen la misma frecuencia es decir $f_1 = f_2$

Batido

Ocurre cuando dos sistemas físicos tienen frecuencias parecidas es decir $f_1 = f_2 + 2\delta$ con $2\delta =$ Diferencia muy pequeña entre f_1 y f_2.

Supongamos que tenemos 2 ondas $y_1(x,\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(\omega_1\cdot\mathrm{t} - \mathrm{k}x + \varphi_1\right)$ e $y_2(x,\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(\omega_2\cdot\mathrm{t} - \mathrm{k}x + \varphi_2\right)$.

Ahora retranscribamos $y_1(x,\mathrm{t})$:

$y_1(x,\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(2\pi\cdot f_1\cdot\mathrm{t} - \mathrm{k}x + \varphi_1\right)$, como $f_1 = f_2 + 2\delta$, entonces nos queda que:

$$y_1(x,\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(2\pi\cdot\left(f_2 + 2\delta_1\right)\cdot\mathrm{t} - \mathrm{k}\cdot x + \varphi_1\right)$$

Ahora retranscribamos $y_2(x,\mathrm{t})$:

$y_2(x,\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{sen}\left(2\pi\cdot f_2\cdot\mathrm{t} - \mathrm{k}x + \varphi_2\right)$.

Aplicamos la superposición de ondas: $y_1(x,\mathrm{t}) + y_2(x,\mathrm{t})$ y nos queda:

$$\boxed{y = 2\mathrm{A}\cdot\cos\left(2\pi\cdot\delta\cdot\left(\frac{x}{\mathrm{c}} - \mathrm{t}\right) + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(2\pi\cdot f\cdot\left(\frac{x}{\mathrm{c}} - \mathrm{t}\right) + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}$$

Onda Resultante

Aclaraciones:

$$\delta = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$c =$ Velocidad de propagación

Efecto Döppler

Definición

Es el cambio aparente de la frecuencia de una onda que es emitida por algún frente de ondas, se dice aparente, porque la fuente sigue emitiendo ondas a igual frecuencia, pero el receptor capta otra frecuencia.

Fórmula del efecto Döppler

$$\boxed{f_{\mathrm{r}} = f_{\mathrm{e}} \cdot \left(\frac{c - v_{\mathrm{obs}}}{c - v_{\mathrm{fuente}}} \right)}$$

Aclaraciones:

$f_{\mathrm{r}} =$ Frecuencia del receptor (es decir la frecuencia captada por el mismo).

$f_{\mathrm{e}} =$ Frecuencia de la fuente emisora de la onda.

$v_{\mathrm{obs}} =$ Velocidad inicial del observador.

v_{fuente} = Velocidad inicial de la fuente.

$c =$ Velocidad de propagación de la onda.

Interferencia (3ra Parte)

Cuando 2 ondas son coherentes (es decir que tienen la misma frecuencia) y la diferencia de fases entre ambas es cte. en el tiempo.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r_1) \\ y_2 &= A_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r_2) \end{aligned}\right\} \text{Son M.A.S.}$$

Cuando $r_1 \neq r_2$ entonces “Interfieren”.

Como son 2 M.A.S. entonces al “interferir” podemos aplicar el Teorema del Coseno.

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\delta$, con $\boxed{\delta = k \cdot (r_2 - r_1)}$

- Interferencia Constructiva: $\cos\delta = 1$ entonces $\delta = k \cdot (r_2 - r_1) = 2 \cdot n\pi$, con $n \in \mathbb{N}^0$.

Entonces $\delta = \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} \cdot (r_2 - r_1) = \cancel{2} \cdot n \cdot \cancel{\pi}$ por lo tanto nos queda $r_2 - r_1 = n \cdot \lambda$.

$\boxed{\text{Máx} = r_2 - r_1 = n \cdot \lambda}$ Superficies Ventrales.

- Interferencia Destructiva: $\cos\delta = -1$ entonces $\delta = k \cdot (r_2 - r_1) = (2n+1)\,\pi$, con $n \in \mathbb{N}^0$.

Entonces $\delta = \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} \cdot (r_2 - r_1) = (2n+1) \cdot \cancel{\pi}$ por lo tanto nos queda

$$r_2 - r_1 = \frac{(2n+1) \cdot \lambda}{2}.$$

$\boxed{\text{Mín} = r_2 - r_1 = \frac{(2n+1) \cdot \lambda}{2}}$ Superficies Nodales

Observaciones:

-En el espacio se dan alternadamente las superficies Ventrales y Nodales.

-Si $A_1 = A_2$ y la interferencia es constructiva, entonces $A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1^2 = 4A_1^2$

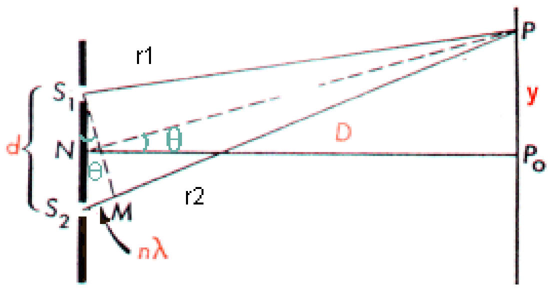
-Si $A_1 = A_2$ y la interferencia es destructiva, entonces $A^2 = A_1^2 + A_1^2 - 2A_1^2 = 0$

-La interferencia se puede pensar como una onda estacionaria (formada por sucesiones de superficies Ventrales y Nodales)

-Para que se de una interferencia las ondas deben ser coherentes.

-Las fuentes de luz (cotidianas) varían su fase con el tiempo por lo que no es cte. es decir, no se ve Interferencia entre fuentes de luz convencionales porque **no** son coherentes.

Experiencia de Young



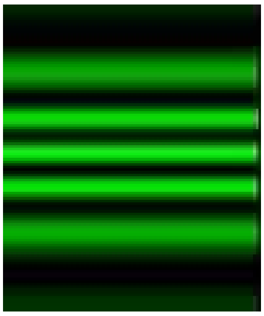
Si $\delta = k \cdot (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$ entonces a $(r_2 - r_1)$ lo podemos escribir como $d \cdot sen(\theta)$, entonces $(r_2 - r_1) = d \cdot sen(\theta)$, retranscribiéndolo en la ecuación nos queda que:

$$\delta = \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} \cdot d \cdot sen(\theta) = \cancel{2} \cdot n \cdot \cancel{\pi}$$, entonces $d \cdot sen(\theta) = n \cdot \lambda$.

$\boxed{d \cdot sen(\theta) = n \cdot \lambda}$ es un máximo de igual forma se deduce que:

$\boxed{d \cdot sen(\theta) = \frac{(2n+1)}{2} \cdot \lambda}$ es un mínimo.

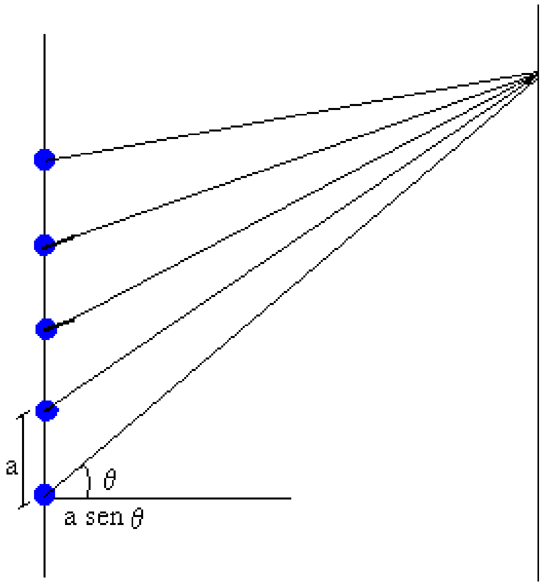
En la pantalla se ven franjas brillantes y obscuras, con matices intermedias en las cuales no son ni máximos ni mínimos, en la figura que aparece a continuación, se puede apreciar mejor este fenómeno:



<u>Observación:</u>
-Si se tapa una ranura, se puede apreciar en la pantalla una luz brillante, ya que no hay interferencia.

-Si las ranuras se alejan mucho de la pantalla el ángulo θ es muy chico, por ende, podemos expresar al $\boxed{sen(\theta) \cong tg(\theta) = \frac{y}{D}}$ esto evita trabajar con el ángulo.

Interferencia de n fuentes sincronizadas



Si $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot sen(\theta)$ entonces:

MAXIMO: (los fasores son colineales) si $\delta = 2 \cdot n\pi$ entonces

$\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} a \cdot sen(\theta) = \cancel{2} \cdot n \cdot \cancel{\pi}$ por lo tanto nos queda

$$\boxed{a \cdot sen(\theta) = n \cdot \lambda}$$

MINIMO: El desfasaje total es $N\delta$, entonces $N\delta = 2 \cdot n'\pi$, despejamos y nos queda

que $\delta = \frac{2 \cdot n'\pi}{N}$, entonces si $\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} a \cdot sen(\theta) = \frac{\cancel{2} \cdot n' \cdot \cancel{\pi}}{N}$ nos queda que

$$\boxed{a \cdot sen(\theta) = \frac{n'}{N} \cdot \lambda}$$

Observación:

Para: $N = 3$

- Si $n = 0$ o $n' = 0$ entonces se tiene un máximo

- Si $n' = 1$ nos queda: $\frac{\lambda}{3}$ entonces se tiene un mínimo

- Si $n' = 2$ nos queda $\frac{2\lambda}{3}$ entonces se tiene un mínimo

- Si $n' = 3$ nos queda que λ entonces se tiene un máximo

Observación:

En general para N números de fuentes:

-entre cada par de máximos hay $N-1$ mínimos.

-entre dos máximos principales hay $N-2$ máximos (secundarios).

-Para mayor número de fuentes hay más máximos secundarios.

Difracción

Es la capacidad de las ondas de bordear un obstáculo o de atravesar ranuras.

Principio de Huygens

Cada punto de un frente de ondas, se comporta como un emisor de **ondas segundarias**. Estas interfieren destructivamente entre si, anulándose, salvo en los puntos que determinan el nuevo frente de ondas.

Nota: La interferencia y la difracción son fenómenos similares, de hecho la difracción proviene de la interferencia, sin embargo: - Difracción: Resulta de la superposición de ondas de frentes **continuas**. - Interferencia: Resulta de la superposición de ondas de fuentes **discretas**.

Difracción de Fraunhoffer

La **Difracción de Fraunhofer** o también **difracción del campo lejano** es un patrón de difracción de una onda electromagnética cuya fuente (al igual que la pantalla) se encuentran infinitamente alejadas del obstáculo, por lo que sobre éste y sobre la pantalla incidirán ondas planas. La difracción de Fraunhofer es, de esta manera, un caso particular de la **difracción de Fresnel**, y que también resulta más sencillo de analizar. Este tipo de fenómeno es observado a distancias más lejanas que las del campo cercano de la **difracción de Fresnel** y ocurre solamente cuando el **número de Fresnel** es mucho menor que la unidad y se puede realizar la aproximación de rayos paralelos.

Difracción de Fresnel

La **Difracción de Fresnel** o también **difracción del campo cercano** es un patrón de difracción de una onda electromagnética obtenida muy cerca del objeto causante de la difracción (a menudo una fuente o apertura). Más precisamente, se puede definir como el fenómeno de difracción causado cuando el **número de Fresnel** es grande y por lo tanto no puede ser usada la **aproximación Fraunhofer** (difracción de rayos paralelos).

Nota:

El **numero de Fresnel** es: $F = \dfrac{a^2}{L \cdot \lambda}$.

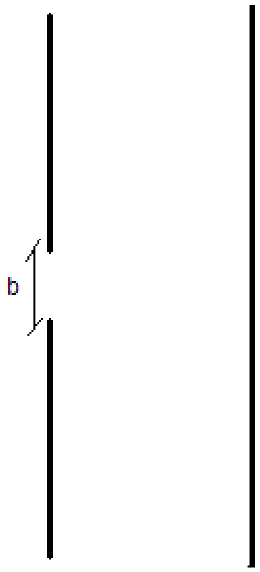
Aclaraciones:

- $a =$ es el tamaño (por ejemplo el radio) de la apertura.

- $\lambda =$ es la longitud de la onda.

- $L =$ es la distancia que hay entre la apertura y la pantalla

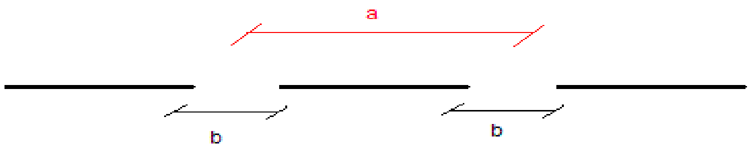
Difracción de 1 ranura



Interferencia Máxima: $a \cdot \mathrm{sen}(\theta_{int}) = n \cdot \lambda$

Difracción Mínima: $b \cdot \mathrm{sen}(\theta_{dif}) = n \cdot \lambda$

Difracción de 2 ranuras



Interferencia Máxima: $a \cdot sen(\theta_{int}) = n \cdot \lambda$

Difracción Mínima: $b \cdot sen(\theta_{dif}) = n' \cdot \lambda$

Con $\theta_{dif} > \theta_{int}$

Óptica Geométrica

I) Propagación rectilínea

II) Reversibilidad del camino

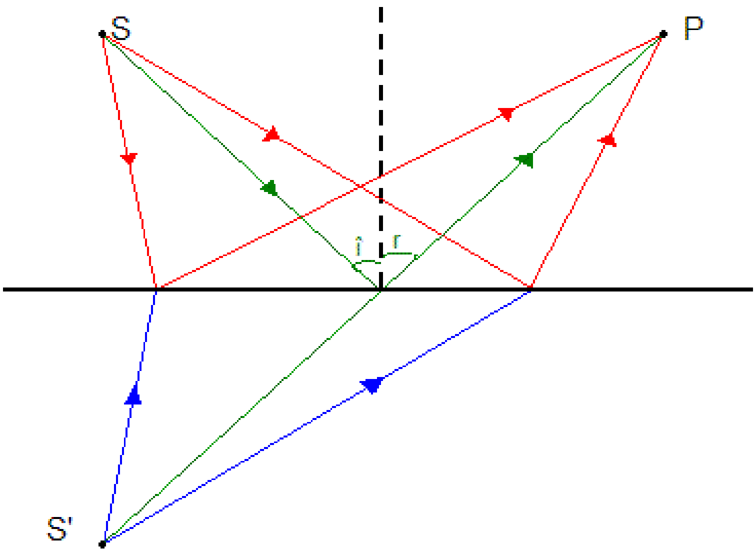
III) Aproximación de rayos paraxiales (ángulos pequeños)

IV) Principio de mínima acción

Reflexión

Principio de Herón (Siglo II A.C.)

La trayectoria seguida de la luz para desplazarse desde un punto S a un punto P, pasando por una superficie reflectora es la mas corta posible.



Observación:

- $\hat{i}$ = Angulo de Incidencia

- $\hat{r}$ = Angulo de Reflexión

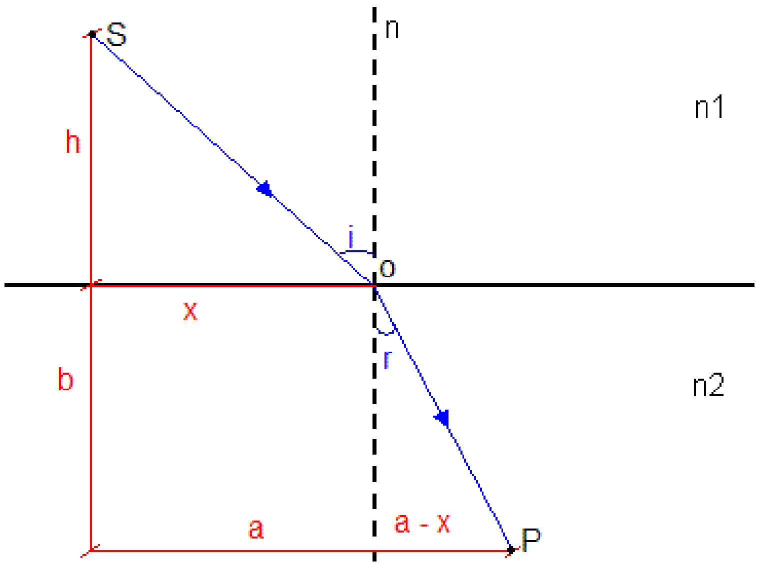
- $\hat{i} = \hat{r}$, es decir que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión

-El rayo incidente, el refractado y la normal a la superficie están en un mismo plano

Refracción

Fermat (1657) Principio de mínima acción

La luz al propagarse de un punto S a un punto P, sigue la ruta que le insuma el menor tiempo posible.



Nota:

-La velocidad de la luz en una superficie refractora puede escribirse como $V_{luz} = \frac{C}{n}$

- C es la velocidad de propagación de la luz, es decir $C = 300.000 \frac{km}{seg}$

- n es el índice de refracción, varia según la superficie en donde se este trabajando, ejemplo:

- $n_{vacio} = 1$
- $n_{aire} \cong 1$
- $n_{agua} \cong 1,33$

-El rayo incidente, el refractado y la normal a la superficie están en un mismo plano

Ley de Snell

Si aplicamos el Principio de Fermat (según el tiempo), tenemos que $t = t_1 + t_2$.

Si a t_1 lo podemos escribir como $t_1 = \dfrac{\overline{So}}{V_1}$ y a t_2 como $t_2 = \dfrac{\overline{oP}}{V_2}$, entonces nos queda que $t = \dfrac{\overline{So}}{V_1} + \dfrac{\overline{oP}}{V_2}$, aplicando Pitágoras para los segmentos $\overline{So}$ y $\overline{oP}$ nos queda que:

$\overline{So} = \sqrt{h^2 + x^2}$ y $\overline{oP} = \sqrt{b^2 + (a - x)^2}$, entonces retranscribo la ecuación de t y nos queda que $t = \dfrac{\sqrt{h^2 + x^2}}{V_1} + \dfrac{\sqrt{b^2 + (a - x)^2}}{V_2}$, como x es variable, para hallar el mínimo tiempo tengo que derivar e igualar a cero a la función $t(x)$.

Entonces $\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{x}{V_1 \cdot \sqrt{h^2 + x^2}} - \dfrac{(a - x)}{V_2 \cdot \sqrt{b^2 + (a - x)^2}} = 0$

> Observación:
>
> - $\dfrac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \operatorname{sen}(\hat{i})$
>
> - $\dfrac{(a - x)}{\sqrt{b^2 + (a - x)^2}} = \operatorname{sen}(\hat{r})$

Retranscribo la ecuación y nos queda que $\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{\operatorname{sen}(\hat{i})}{V_1} - \dfrac{\operatorname{sen}(\hat{r})}{V_2} = 0$, despejando nos queda que $V_2 \cdot \operatorname{sen}(\hat{i}) = V_1 \cdot \operatorname{sen}(\hat{r})$, si $V_1 = \dfrac{C}{n_1}$ y $V_2 = \dfrac{C}{n_2}$ entonces nos queda que

$\dfrac{\cancel{C}}{n_2} \cdot \operatorname{sen}(\hat{i}) = \dfrac{\cancel{C}}{n_1} \cdot \operatorname{sen}(\hat{r})$ por lo tanto: $\boxed{n_1 \cdot \operatorname{sen}(\hat{i}) = n_2 \cdot \operatorname{sen}(\hat{r})}$ Ley de Snell