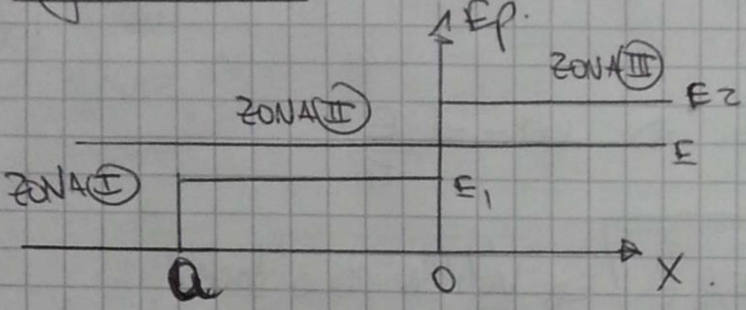
HOJA = 2

8

Ejercicio 2 =.



ZONA (I) ⇒ $E_p = 0$

" (II) ⇒ $E_p < E$

" (III) ⇒ $E_p > E$

Ec. de Schrödinger = $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + E_p\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$.

Prop. sep. de variables → $\psi(x,t) = \chi(x)\,z(t)$ ⇒

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi(x)\,z(t) + E_p\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi(x)\,z(t)$$

Divido todo por $\psi(x,t)$ ⇒

$$\beta = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\chi(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi(x) + E_p}_{\text{solo dep de } x} = \underbrace{i\hbar\frac{1}{z(t)}\frac{\partial}{\partial t}z(t)}_{\text{solo depende de } t}$$

↓

iguala todo a una cte β.

Parte dep de t ⇒ $i\hbar\frac{1}{z(t)}\frac{\partial}{\partial t}z(t) = \beta$ (1)

$$\hat{E}\psi(x,t) = E\psi(x,t)$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\cancel{\chi(x)}\,z(t) = E\,\cancel{\chi(x)}\,z(t)$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{1}{z(t)}\frac{\partial}{\partial t}z(t) = E \quad (2)$$

de (1) y (2) ⇒ $\boxed{E=\beta}$

Propongo solución $Z(t) = e^{wt}$

$\Rightarrow i\hbar \frac{1}{\cancel{e^{wt}}} w \cancel{e^{wt}} = E \Rightarrow w = -i \frac{E}{\hbar}$

$\Rightarrow \boxed{Z(t) = e^{-iE/\hbar t}}$ → válido para todas las zonas.

Parte que depende de $x \Rightarrow$.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) = E - E_p$$

Propongo solución $X(x) = e^{kx}$.

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\cancel{e^{kx}}} k^2 \cancel{e^{kx}} = E - E_p$$

$$\Rightarrow k^2 = (E - E_p) \frac{2m}{\hbar^2} (-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \pm i \sqrt{(E - E_p) \frac{2m}{\hbar^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \text{ con } k = \sqrt{(E - E_p) \frac{2m}{\hbar^2}}}$$

Pero como E_p varía entre las zonas, la solución será diferente para cada una de ellas.

a)

a)

Hoja = 3.

ZONA (I) $\boxed{E_p = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{k_I = \sqrt{(E-0)\frac{2m}{\hbar^2}}} = \boxed{\sqrt{E\frac{2m}{\hbar^2}}}$$ ✓

$$\Rightarrow \boxed{\chi_I(x) = A_I e^{ik_I x} + B_I e^{-ik_I x}}$$ ✓

ZONA (II) $\boxed{E_p < E}$ $\boxed{E_p = E_1}$

$$\Rightarrow \boxed{k_{II} = \sqrt{(E-E_p)\frac{2m}{\hbar^2}}}$$ ✓

$$\boxed{\chi_{II}(x) = A_{II} e^{ik_{II} x} + B_{II} e^{-ik_{II} x}}$$ ✓

B

ZONA (III) $\boxed{E_p > E}$

$$k_{III} = i\sqrt{|E-E_p|\frac{2m}{\hbar^2}}$$ ✓

Exponencial decreciente

$$\Rightarrow \chi_{III}(x) = \cancel{A_{III}} e^{k_{III} x} + B_{III} e^{-k_{III} x}$$ ✓

Debe ser igual a cero para que la función esté acotada + Función de probabilidad $|\Psi(x,t)|^2$ (su integral) debe ser $= 1$ $\forall$ el espacio)

$\boxed{E_p = E_2}$

$\Rightarrow \boxed{\chi_{III}(x) = B_{III}\, e^{-k_{III} x}}$ con $\boxed{k_{III} = i\sqrt{|E - E_p| \frac{2m}{\hbar^2}}}$ +

Los valores de A_I, B_I, A_{II}, B_{II} y B_{III} se despejan de los siguientes condiciones de contorno:

$$\left.\begin{aligned} \chi_I(a) &= \chi_{II}(a) \\ \chi_I'(a) &= \chi_{II}'(a) \\ \chi_{II}(0) &= \chi_{III}(0) \\ \chi_{II}'(0) &= \chi_{III}'(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx &= 1 \end{aligned}\right\}$$

5 ecuaciones y 5 incógnitas.

b) Para zona I y zona II $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \text{zona I} &\Rightarrow k_I = \sqrt{E \frac{2m}{\hbar^2}} \\ \text{" (II)} &\Rightarrow k_{II} = \sqrt{(E - E_p)\frac{2m}{\hbar^2}} \end{aligned}\right\} \quad k_I > k_{II}.$$ ✓

porque $E_p < E \Rightarrow E > (E - E_p)$

$\boxed{E_p = E_1}$

como $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda_I < \lambda_{II}}$

Hoja = 4

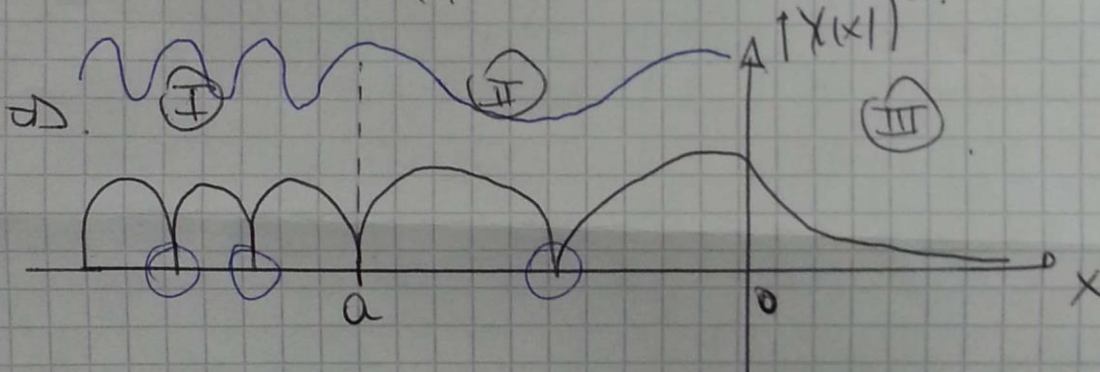
⇒ La función de probabilidad se expresa como:

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\,\psi(x,t) = \chi^*(x)\,\cancel{z^*(t)}\,\chi(x)\,\cancel{z(t)}$$

z(t) se va al multiplicar por el conjugado.

$$\Rightarrow |\psi(x,t)|^2 = |\chi(x)|^2.$$

⇒



c) Para zona I $\lambda_I = \frac{2\pi}{k_I}$ con $k_I = \sqrt{\frac{E\,2m}{\hbar^2}}$.

zona II ⇒ $\lambda_{II} = \frac{2\pi}{k_{II}}$ con $k_{II} = \sqrt{(E-E_p)\frac{2m}{\hbar^2}}$ $(E_p = E_1)$

con $\lambda_I < \lambda_{II}$ (por lo que ya se explicó en el ítem (b))

B

Para la zona III no corresponde porque no es una función periódica.