Relatividad especial

1 Transformación de coordenadas.

1.1 Transformación de Galileo.

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

La transformación de velocidades:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{d}{dt'}x'(x,t) = \frac{d}{dt}x'(x,t) = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v \\ u'_y &= \frac{d}{dt'}y'(y) = \frac{d}{dt}y'(y) = \frac{dy}{dt} = u_y \\ u'_z &= u_z \end{aligned}$$

Notemos que si algo viaja a la velocidad de la luz en el sistema S' ($u'_x = c$), entonces viajará a una velocidad mayor que la luz en el sistema S ($u_x = c + v$).

1.2 Transformación de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Para transformar las velocidades hacemos

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

donde

$$\begin{aligned} dx'(x,t) &= \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial t}dt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dx - \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(dx - vdt\right) \\ &= \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right)dt = \gamma\left(u_x - v\right)dt \end{aligned}$$

donde $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Además,

$$\begin{aligned} dt'(x,t) &= \frac{\partial t'}{\partial x}dx + \frac{\partial t'}{\partial t}dt = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dx + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt = \gamma\left(-\frac{v}{c^2}dx - dt\right) \\ &= \gamma\left(-\frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt} + 1\right)dt = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)dt \end{aligned}$$

Luego,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\left(u_x - v\right)dt}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)dt} = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)} \\ u'_z &= \frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)} \end{aligned}$$

Tambien se puede obtenere

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}u'_x\right)} \end{aligned}$$

Notemos que si $u'_x = c$, entonces

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = \frac{c\left(1+\frac{v}{c}\right)}{1+\frac{v}{c}} = c$$

Además, si $\frac{v}{c} \ll 1$, se recupera la transformación de Galileo.

2 Energía en la relatividad especial

En relatividad especial, la ley de movimiento es

$$F = \frac{dp}{dt}$$

donde

$$p = mu$$

pero la masa ya no es constante:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

La energía cinética que adquiere un cuerpo de masa en reposo m_0, y que parte del reposo, cuando actúa sobre el una fuerza F, hasta alcanzar una velocidad u es

$$E_C = \int_0^{x_f} F dx = \int_0^{x_f} \frac{d\left(mu\right)}{dt}dx = \int_{mu|_0}^{mu|_f} u d\left(mu\right) \tag{1}$$

Pero $d(mu) = mdu + udm$ de forma que el integrando en (1) puede escribirse como

$$ud(mu) = umdu + u^2 dm \tag{2}$$

Por otro lado,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow m^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

o bien

$$m^2 \left(c^2 - u^2\right) = c^2 m_0^2 \Leftrightarrow d\left(m^2c^2 - m^2u^2\right) = d\left(c^2m_0^2\right)$$

$$\begin{aligned}
d\left(m^2c^2 - m^2u^2\right) &= d\left(c^2m_0^2\right) \\
d\left(m^2c^2\right) - d\left(m^2u^2\right) &= d\left(c^2m_0^2\right) \\
2mc^2dm - 2mu^2dm - 2um^2du &= 0 \\
2m\left(c^2 - u^2\right)dm &= 2um^2du \\
\left(c^2 - u^2\right)dm &= umdu \qquad (3)
\end{aligned}$$

y reemplazando (3) en (2)

$$ud(mu) = umdu + u^2dm = ud(mu) = \left(c^2 - u^2\right)dm + u^2dm = c^2dm$$

con lo cual

$$E_C = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = mc^2 - m_0c^2 \tag{4}$$

Tambien se puede escribir

$$mc^2 = E_C + m_0c^2 \tag{5}$$

donde identificamos a mc^2 como la energía total y a m_0c^2 como la energía en reposo.

3 Relación entre Energía y Cantidad de Movimiento.

Se puede escribir a la nergía cinética como

$$E_C = mc^2 - m_0c^2 = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{6}$$

Por otro lado,

$$p = mu = \frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
p\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} &= m_0u \\
p^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) &= m_0^2u^2 \\
p^2\left(c^2-u^2\right) &= c^2m_0^2u^2 \\
p^2c^2 &= p^2u^2 + c^2m_0^2u^2 \\
\left(p^2 + c^2m_0^2\right)u^2 &= p^2c^2 \\
u^2 &= \frac{p^2c^2}{p^2 + c^2m_0^2} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Reemplazando (7) en (6)

$$\begin{aligned}
E_C &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{p^2c^2}{p^2+c^2m_0^2}}}-1\right)=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2m_0^2}{p^2+c^2m_0^2}}}-1\right)=m_0c^2\left(\frac{\sqrt{p^2+c^2m_0^2}}{cm_0}-1\right)\\
&= c\left(\sqrt{p^2+c^2m_0^2}-m_0c\right)=c\sqrt{p^2+c^2m_0^2}-m_0c^2
\end{aligned}$$

O sea,

$$\begin{aligned}
E_C+m_0c^2 &= c\sqrt{p^2+c^2m_0^2}\\
E &= c\sqrt{p^2+c^2m_0^2} \qquad (8)
\end{aligned}$$

esta última es la relación buscada entre E y p.
Notemos en (8) que:

- Si la masa en reposo es nula,

$$E=cp \qquad (9)$$

  Derivando,

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dp} &= c\frac{2p}{2\sqrt{p^2+c^2m_0^2}}=\frac{pc^2}{c\sqrt{p^2+c^2m_0^2}}=\frac{pc^2}{E}\\
&= \frac{muc^2}{mc^2}=u \qquad (10)
\end{aligned}$$

  La fórmula (10) es general. Pero para las partículas de masa en reposo nula, con (9) y (10)

$$u=\frac{dE}{dp}=\frac{d}{dp}(cp)=c$$

  de manera que las partículas con masa en reposo nula se desplazan a la velocidad de la luz.

- La energía cinética es

$$\begin{aligned}
E_C &= c\sqrt{p^2+c^2m_0^2}-m_0c^2\\
&= c\sqrt{\left(\frac{m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)^2+c^2m_0^2}-m_0c^2=c\sqrt{\frac{m_0^2u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}+c^2m_0^2}-m_0c^2\\
&= m_0c\sqrt{\frac{u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}+c^2}-m_0c^2=m_0c\sqrt{\frac{u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}+c^2}-m_0c^2\\
&= m_0c\sqrt{\frac{c^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}}-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-m_0c^2\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1\right)m_0c^2
\end{aligned}$$

  La función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ puede desarrollarse en serie en torno a $x=0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 10\\
f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

de manera que $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ será una buena aproximación a $f(x)$ si $x \ll 1$.
Entonces si $v \ll c$ o bien $\frac{u^2}{c^2} \ll 1$ podemos aproximar

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

Reemplazando esta aproximación en la energía cinética

$$\begin{aligned} E_C &\simeq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - 1\right) m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2} m_0 u^2 \end{aligned}$$

como en mecánica no relativista.