RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Dr. Andrés Ozols

Facultad de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires

Marzo 2007

Magnitudes Vectoriales del Electromagnetismo

$\vec{D}$ ***Desplazamiento eléctrico***

$\vec{E}$ ***Campo eléctrico***

$\vec{P}$ ***Polarización***

$\vec{H}$ ***Campo magnético***

$\vec{B}$ ***Inducción magnética***

$\vec{M}$ ***Magnetización***

$\vec{J}$ ***Densidad de corriente de cargas libres***

Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$$

Densidad de carga libre

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} x \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Relaciones entre campos vectoriales

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{J}x\vec{B}$$ ***Fuerza de Lorentz***

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$ ***General***

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$ ***Espacio Libre***

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$ ***Medio dieléctrico Lineal***

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$ ***General***

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H}$$ ***Espacio Libre***

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$ ***Medio Magnético Lineal***

Relaciones entre campos vectoriales

$$\vec{J}_L = \sigma\vec{E}$$ ***Medio óhmico estacionario (σ conductividad eléctrica)***

$$\vec{J}_L = \sigma(\vec{E} + \vec{v}x\vec{B})$$ ***Medio óhmico en movimiento***

constantes

$\varepsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}$ Coulomb/(newton –m^2) Permitividad del vacío

$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ newton^2 Susceptibilidad magnética del vacío

$(\varepsilon_0\ \mu_0)^{-1/2}$ velocidad de la luz en el vacío

Propagación de los campos electromagnéticos

Espacio libre de cargas ⇒

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Espacio libre de corrientes ⇒

$$\vec{\nabla}x\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}x\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

PROPAGACIÓN DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Eliminando B al tomar el rotor de la última ecuación

$$\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{E}) = -\vec{\nabla}x(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial(\vec{\nabla}x\vec{B})}{\partial t}$$

La propiedad del rotor del rotor de un campo vectorial

$$\vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{E}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{E}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla})\vec{E}$$

Pero $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}x(\vec{\nabla}x\vec{E}) = -\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

(Δ Laplaciano del vector)

Pero $\vec{\nabla}x\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

ECUACIONES de ONDA de los CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Eliminando E al tomar el rotor de la rotor del rotor de B resultará análogamente

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \vec{\nabla}^2 E_x \hat{i} + \vec{\nabla}^2 E_y \hat{j} + \vec{\nabla}^2 E_z \hat{k} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}^2 E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 E_z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

SOLUCIONES de la ECUACIONES de ONDA

Si $\vec{E} = \vec{E}(x) \Rightarrow \vec{E}(x) = E_x(x)\hat{i} + E_y(x)\hat{j} + E_z(x)\hat{k}$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \hat{i}\,\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_x = cte \forall x$$

Si $E_z = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 E_y(x) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x)}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 E_y(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x)}{\partial t^2}$$

Ecuación de onda unidimensional

SOLUCIONES de la ECUACIONES de ONDA

$$E_y(x) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$ ***Onda plana (uniforme en el plano (y, z))***

$$\vec{E}(x) = E_y(x)\,\hat{j}$$

resultará análogamente para $B_y(x)=0$ $B_z(x)$:

$$\frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_z(x)}{\partial t^2}$$

$$B_z(x) = g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$\vec{B}(x) = E_z(x)\,\hat{k}$$

SOLUCIONES de la ECUACIONES de ONDA

La relación entre las soluciones surge de

$$\vec{\nabla} x \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1(t-\frac{x}{c})}{\partial x} = -\dfrac{f_1}{c} \\ -\dfrac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial g_1(t-\frac{x}{c})}{\partial t} = -g_1 \end{array} \right| \Rightarrow g_1 = \frac{f_1}{c}$$

$$\Downarrow$$

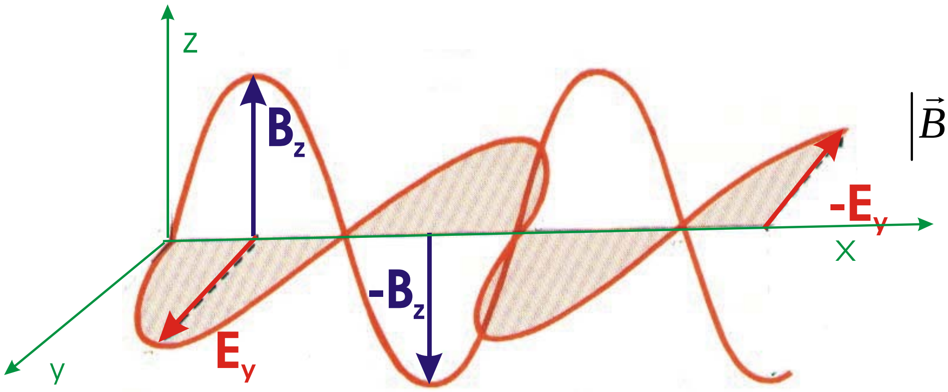
$$B_z = \frac{E_y}{c}$$

$$\Downarrow$$

Para una onda plana $$\left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{c}$$

ONDA ELECTROMAGNÉTICA

onda plana



$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{c}$$

$$\vec{B} \perp \vec{E}$$

TEOREMA de ENERGIA

El trabajo por unidad de tiempo (potencia) y volumen hecho por el campo electromagnético sobre una carga es

$$\vec{F}.\vec{v} = P_V = \left(\rho\vec{E} + \rho\vec{v}x\vec{B}\right).\vec{v} = \vec{E}.\vec{J}$$

Pues

El campo B no hace trabajo

$$\left(\vec{v}x\vec{B}\right).\vec{v} = o$$

Pero

$$\vec{J} = \vec{\nabla}x\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$P_V = \vec{J}.\vec{E} = \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right).\vec{E}$$

$$P_V = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}.\vec{\nabla}x\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$$

TEOREMA de ENERGIA

Por una propiedad

$$\vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B}) = \vec{\nabla}x\vec{E}.\vec{B} - \vec{\nabla}x\vec{B}.\vec{E} = \vec{B}.\vec{\nabla}x\vec{E} - \vec{E}.\vec{\nabla}x\vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}.\vec{\nabla}x\vec{B} = \vec{B}.\vec{\nabla}x\vec{E} - \vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B})$$

Reemplazando en Pv

$$P_V = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}.\vec{\nabla}x\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\vec{\nabla}x\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B}) - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$$

$$P_V = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}.\vec{\nabla}x\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B}) - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}$$

TEOREMA de ENERGIA

Pero

$$\vec{\nabla} x\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$P_V = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} - \varepsilon_0 \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B})$$

$$P_V = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}\right) - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B})$$

$$P_V = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B})$$

TEOREMA de ENERGIA

Energía contenida en el campo electromagnético

$$U_V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)$$

$$U = \int U_V dV = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)dV = \frac{1}{2}\int (\vec{B}.\vec{H} + \vec{D}.\vec{E})dV$$

La potencia total desarrollada por el campo electromagnético

$$P = \int P_V dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\int \vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B})dV$$

Por el teorema de la divergencia

$$\int \vec{\nabla}.(\vec{E}x\vec{B})dV = \int_{\sup erficieV} (\vec{E}x\vec{B}).d\vec{S}$$

TEOREMA de ENERGIA

$$P = \int P_V dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\int_{\sup erficieV} (\vec{E}x\vec{B}).d\vec{S}$$

Vector de Poyting

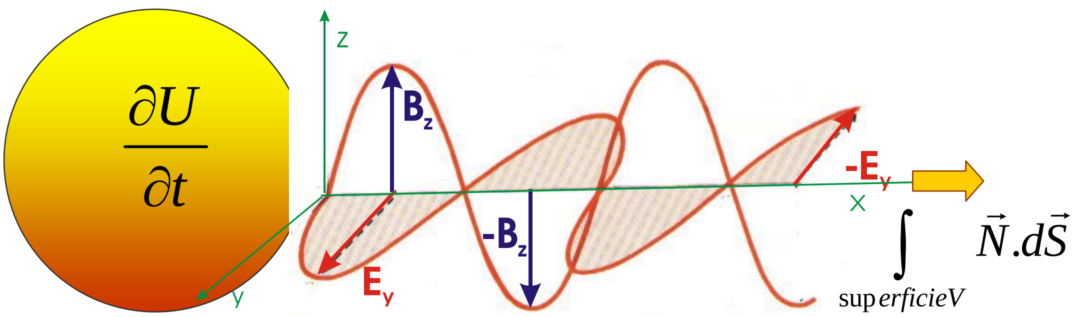
$$\vec{N} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}x\vec{B} = \vec{E}x\vec{H} \Rightarrow \int_{\sup erficieV} \vec{N}.d\vec{S}$$

Flujo de energía a través de la superficie del volumen V

$$P = \int P_V dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t} - \int_{\sup erficieV} \vec{N}.d\vec{S}$$

TEOREMA de ENERGIA

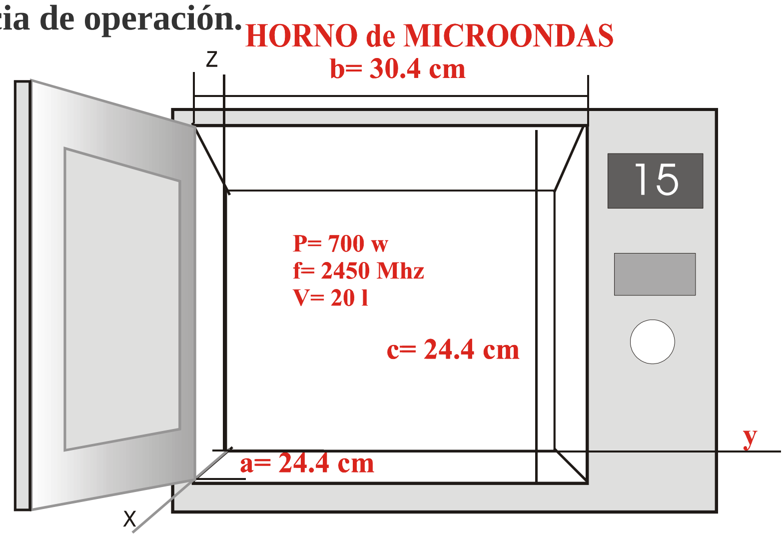
$$P = \int P_V dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial t} - \int_{\sup erficie V} \vec{N}.d\vec{S}$$



Ejemplo de Aplicación 1

HORNO de MICROONDAS

Horno a microondas
P = 700 w de consumo
ν = 2450 Mhz de frecuencia de operación.
V = 20 l de capacidad



Determine:

- **Potencia irradiada**
- **Densidad de energía**
- **E_0 y B_0 en la cavidad**
- **Estados Estacionarios**
- **Modos de vibración**
- **Densidad de Estados**
- **Distribución de energía en la cavidad**

Resolución **HORNO de MICROONDAS**

Potencia irradiada por las paredes

1º Hipótesis Horno ≡ Cavidad Resonante

Sup= [2 x (0.304 x 0.244)+2x (0.244 x 0.244)]m² = 0.2674 m²
superficie excluyendo puerta y piso

$$P_S \cong \frac{P}{Sup} = \frac{700w}{0.2674m^2} = 2617.8W/m^2$$

Densidad de energía

2º Hipótesis $P_S \approx \left|\vec{N}\right| = cU_V$ ***válido fuera de la cavidad***

$$U_V \approx \frac{P_S}{c} = \frac{2617.8W/m^2}{3.10^8 m/s} = 8.72610^{-6} J/m^3 = 8.726\mu J/m^3$$

HORNO de MICROONDAS

E_0 y B_0 en la cavidad

Como la densidad de energía en la cavidad es:

$$U_V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_0} B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)$$

Para la onda electromagnética plana:

E = c B

$$U_V = \varepsilon_0 E_0^{\;2} = \frac{B_0^{\;2}}{\mu_0}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{U_V}{\varepsilon_0}} \cong \sqrt{\frac{8.726\ 10^{-6}\ J/m^3}{8.85\ 10^{-12}\ \text{Coul/(N m}^2)}} = 993V/m$$

$$B = \frac{E_0}{c} \cong \frac{993V/m}{310^8\, m/s} = 3.3110^{-6} T$$

HORNO de MICROONDAS

Estados estacionarios

Las condiciones de contorno en las paredes **metálicas**
$E_t = 0$ ***V/m***
$B_n = 0$ ***Wb/m²***

Los campos estacionarios en la cavidad

$$E_Z(x,y,z) = E_0 \operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{a})\operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{b})\operatorname{sen}(\frac{p\pi z}{c})$$

$$B_Z(x,y,z) = B_0 \cos(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})\cos(\frac{p\pi z}{c})$$

m = 1, 2, 3....
n = 0, 1, 2, 3....
p = 0, 1, 2, 3....

La frecuencia de resonancia en la cavidad (máxima transferencia de energía)

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

HORNO de MICROONDAS

Modos de vibración

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\nu}{c}\right)^2 = \left(\frac{2x2.4510^9\,Hz}{310^8\,m/s}\right)^2 = 266.2m^{-2}$$

$$16.8m^2 + 10.8n^2 + 16.8p^2 = 266.2$$

Las soluciones

m =4 ***n = 0*** ***p = 4***

$B_z = B_0 \cos(\frac{4\pi z}{c})$ **Ez =0** **no permitido**

m = 0 **n = 4** **p = 0**

$B_z = B_0 \cos(\frac{4\pi y}{b})$ **Ez =0** **no permitido**

HORNO de MICROONDAS

m =1 **n =3** **p = 3**

$$B_z = B_0 \cos(\frac{3\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{b})\cos(\frac{3\pi z}{c}) \qquad E_Z = E_0\, \mathrm{sen}(\frac{\pi x}{a})\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi y}{b})\cos(\frac{3\pi z}{c})$$

m=3 **n=3** **p =1**

$$B_z = B_0 \cos(\frac{3\pi x}{a})\cos(\frac{3\pi y}{b})\cos(\frac{\pi z}{c}) \qquad E_Z = E_0\, \mathrm{sen}(\frac{3\pi x}{a})\,\mathrm{sen}(\frac{3\pi y}{b})\cos(\frac{\pi z}{c})$$

Densidad de Estados

Número de ondas estacionarias por intervalo de frecuencia

$$N(\upsilon) \approx \frac{8\pi V}{c^3}\upsilon^2 = \frac{8\pi 0.02 m^3}{\left(3 10^8 m/s\right)^3}(2.45 10^9 1/s)^2 = 1.12 10^{-7} s$$

HORNO de MICROONDAS

Distribución de energía en la cavidad

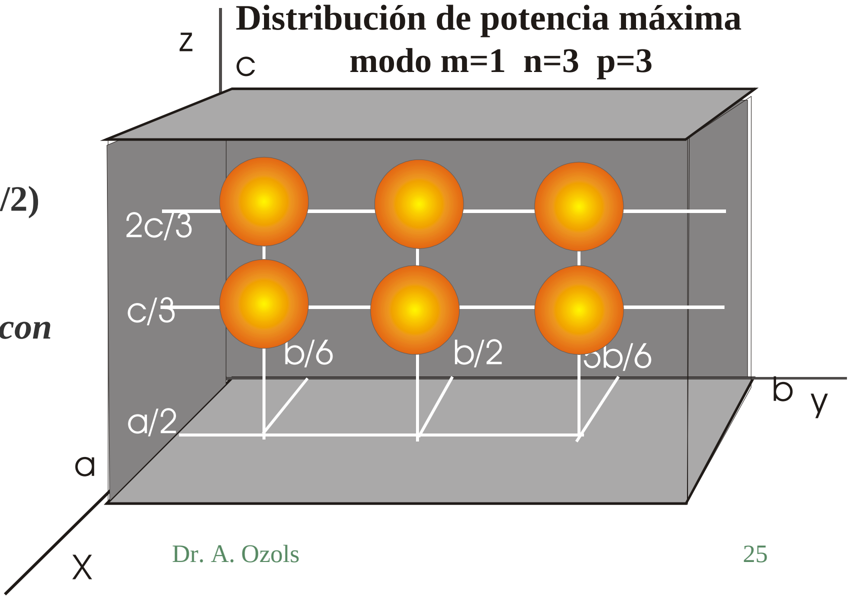
La longitud de onda de radiación

$$\lambda = \frac{c}{\upsilon} = \frac{310^{8}\, m/s}{2.4510^{9}\, 1/s} = 0.122m = 12.2cm$$

Distribución de potencia máxima
modo m=1 n=3 p=3

b= 0.304m = 5(λ/2)
a= c = 0.244 m = 4(λ/2)

6 nodos estacionarios con disipación máxima



TEOREMA de IMPULSO

Fuerza de Lorentz

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{J}x\vec{B}$$

El valor temporal medio de esta fuerza:

$$\left\langle \vec{f}_L \right\rangle = \left\langle \rho\vec{E} + \vec{J}x\vec{B} \right\rangle = \left\langle \rho\vec{E} \right\rangle + \left\langle \vec{J}x\vec{B} \right\rangle$$

1- Aplicación a una onda electromagnética plana

ρ ***= cte*** $\Rightarrow$ $\left\langle \rho\vec{E} \right\rangle = 0$ $\Rightarrow$ $\left\langle \vec{f}_L \right\rangle = \left\langle \vec{J}x\vec{B} \right\rangle$

La corriente tiene la dirección del campo eléctrico $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

$\left\langle \vec{f}_L \right\rangle = \left\langle JB \right\rangle \widehat{N}$ $\Leftarrow$ ***tiene la dirección del N*** $\left\langle \vec{f}_L \right\rangle$

TEOREMA de IMPULSO

En la onda B = E/c ⟹ $\left\langle \vec{f}_L \right\rangle = \left\langle J\,\frac{E}{c} \right\rangle \widehat{N}$

Si g es la densidad de impulso $\vec{f}_L = \frac{d\vec{g}}{dt}$

⟹ $\left\langle g \right\rangle = \left\langle J\,\frac{E}{c} \right\rangle \widehat{N}\Delta t$

densidad de impulso transportado por la onda en un intervalo de tiempo Δt

Si la onda incide normalmente sobre un paralelepípedo de sección ΔS y altura Δh ⟹ *Energía disipada Δt y en el volumen ΔV es.*

$$\left\langle JE \right\rangle \Delta V \Delta t = \left\langle N \right\rangle \Delta S \Delta t$$

TEOREMA de IMPULSO

$$\left\langle g \right\rangle = \left\langle J \frac{E}{c} \right\rangle \widehat{N} \Delta t$$

$$\left\langle JE \right\rangle \Delta V \Delta t = \left\langle N \right\rangle \Delta S \Delta t$$

$$\Rightarrow \left\langle g \right\rangle = \frac{\left\langle N \right\rangle \Delta t}{c \Delta h} \widehat{N} = \frac{\left\langle N \right\rangle}{c \dfrac{\Delta h}{\Delta t}} \widehat{N} = \frac{\left\langle N \right\rangle}{c^2} \widehat{N}$$

TEOREMA de IMPULSO

Fuerza de Lorentz

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{J}x\vec{B}$$

Empleando las ecuaciones de Maxwell para las densidades de carga y de corriente

$$\vec{f}_L = \left(\varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{E}\right)\vec{E} + \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)x\vec{B}$$

Se trata de introducir ExB.

Partimos de $\vec{\nabla}x\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Multiplicando por E $\vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E} = -\vec{E}x\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E} = -\vec{E}x\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$0 = -\varepsilon_0\vec{E}x\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E}$$

Dr. A. Ozols 29

TEOREMA de IMPULSO

$$\vec{f}_L = \left(\varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E}\right)\vec{E} + (\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})x\vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E}x\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E}$$

$$\vec{f}_L = \left(\varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}x\vec{B}x\vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}x\vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E}x\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E}$$

Permutando algunos un producto vectorial doble de B y agrupando la derivada respecto al tiempo

$$\vec{f}_L = \varepsilon_0 \vec{E}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right)\frac{1}{\mu_0}\vec{B}x(\vec{\nabla}x\vec{B}) - \varepsilon_0 \vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}x\vec{B})}{\partial t}$$

Pero

$$\vec{B}x(\vec{\nabla}x\vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{B}.\vec{B}) - (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{B}^2) \quad \textit{pues} \quad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

Entonces

$$\vec{f}_L = \left(\varepsilon_0 \vec{\nabla}.\vec{E}\right)\vec{E} + \frac{1}{2\mu_0}\vec{\nabla}B^2 - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E}x\vec{B})}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E}x\vec{\nabla}x\vec{E}$$

TEOREMA de IMPULSO

$$\vec{f}_L = \varepsilon_0 \left[\left(\vec{\nabla}.\vec{E} \right) \vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} x \vec{\nabla} x \vec{E} \right] + \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} B^2 - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} x \vec{B})}{\partial t}$$

Pero

$$\vec{E} x (\vec{\nabla} x \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{E}.\vec{E}) - (\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{E}^2) - (\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}$$

Entonces

$$\vec{f}_L = -\varepsilon_0 \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{E}^2) + \varepsilon_0 (\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E} - \frac{1}{2\mu_0} \vec{\nabla} B^2 - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} x \vec{B})}{\partial t}$$

$$\vec{f}_L = -\frac{1}{2}(\varepsilon_0 \vec{\nabla} E^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} B^2) + \varepsilon_0 (\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{E} x \vec{B})}{\partial t}$$

TEOREMA de IMPULSO

La fuerza total por unidad de volumen por la onda electromagnética sobre las densidades de carga y corriente

$$\vec{f}_L = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) + \varepsilon_0(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial(\vec{E}x\vec{B})}{\partial t}$$

La densidad de impulso se define como:

$$\vec{G}_V = \varepsilon_0(\vec{E}x\vec{B}) = \frac{1}{c^2}(\vec{E}x\vec{H}) \qquad \vec{G}_V = \frac{1}{c^2}(\vec{E}x\vec{H}) = \frac{1}{c^2}\vec{N}$$

$$\vec{f}_L = \underbrace{-\frac{1}{2}\vec{\nabla}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2) + \varepsilon_0(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}} - \frac{\partial(\vec{G}_V)}{\partial t}$$

Fuerzas de la onda sobre cargas y corrientes

Ejemplo de Aplicación 2

PRESION de RADIACION

Un viaje fotónico: ¿Cómo despegar de la nave nodriza?

Y no morir en el intento...

Cálculo de la energía de ignición transferida por la nave nodriza para el encendido del reactor de fusión de Deuterio + Tritio

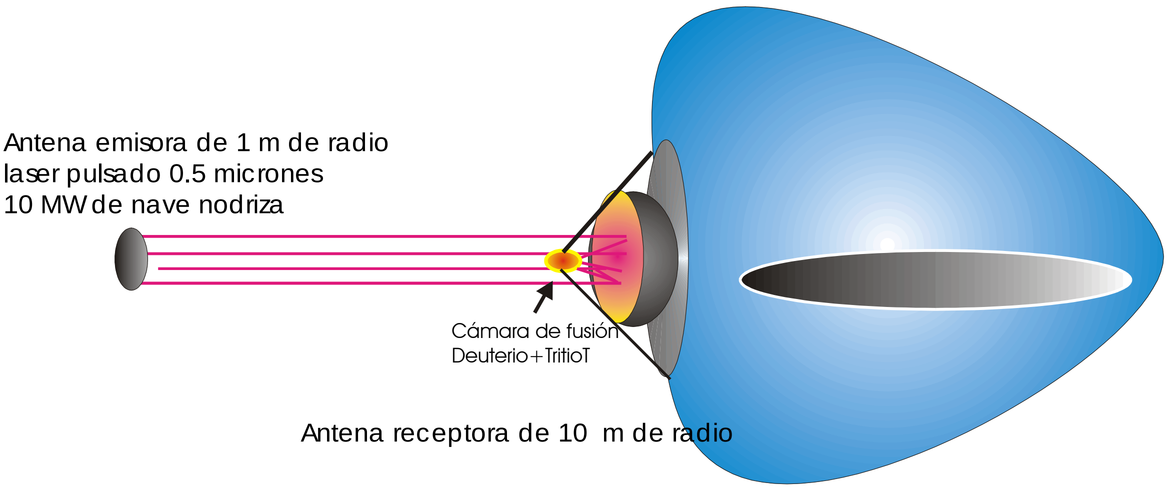
Notas del fabricante ..... según el manual de vuelo de abordo.

Antena emisora de casquete hemi-esférico de radio $R_a = 1$ m
La fuente de láser genera pulsos de $\tau = 1$ ns de una longitud de onda $\lambda = 0.5$ μm
La potencia promedio por pulso es de Pp = 10 MW

PRESION de RADIACION

ESQUEMA de FUNCIONAMIENTO

(Molelo GALATIC -Turbo DT)



¿Qué debo saber antes de meter la llave de encendido?

PRESION de RADIACION

a) ¿Cuál es la frecuencia de la onda del láser infrarrojo?

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ **(3 10^8 m/s)/(5 10^{-7} m)= 6 10^{14} Hz**

---

b) ¿Cuál es la energía total en cada pulso?

Ep = Pp τ= 10^7 W 10^{-9} s = 10^{-2} J

---

c) ¿Cuál es el flujo de energía N?

N ≡ *Energía/ (unidad de área)x(unidad de tiempo)= Vector de Poynting*

Aa = área de la antena emisora = 2 π R^2a = 2π m^2 = 6.28 m^2

$N = \frac{P_p}{A_a}$ **= 10^7 W/ 6.28 m^2 = 1.59 10^6 W/m^2**

PRESION de RADIACION

d) ¿Cuál es la densidad de energía promedio contenida en cada pulso?

$$U_V = \frac{E_r}{\Delta V} = \frac{E_r}{c\Delta t A} = \left(\frac{E_r}{\Delta t A}\right)\frac{1}{c} = \frac{N}{c}$$ **= (1.59 10^6 W/m^2)/ (3 10^8 m/s) = 5.31 10^{-3} J/m^3**

ΔV ***elemento de volumen definido por el recorrido de la onda durante un Δt a través de una sección A del espacio*** $\Delta V = c\Delta t A$

---

e) ¿Cuál es la intensidad de los campos Eléctrico E e Inducción Magnética B de esta antena de láser?

Como $\vec{N} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \, x \, \vec{B})$

μ_0 = 1.257 10^{-6} Weber s/(coulomb m)
permeabilidad del vacío

PRESION de RADIACION

En 1era aprox. antena genera haces paralelos con un ***frente casi plano***

onda plana ⇒ **E/B = c y E ⊥ B** ⇒ $N = \dfrac{B^2 c}{\mu_0}$ ⇒ $B = \left(\dfrac{N\mu_0}{c}\right)^{1/2}$

B= [1.59 10^{6} W/m^{2} (1.257 10^{-6} Weber s/(coulomb m)/(3 10^{8} m/s)] $^{1/2}$

B = 8.16 10^{-5} Weber/ m^{2}

E= c B = 2.45 10^{4} V/m

f) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre la antena receptora de la nave cuando parte de la estación espacial?

F = P_{rad} A_r

P_{rad} ***es la presión ejercida por la onda sobre una superficie de área Ar***

PRESION de RADIACION

A_r = área de la antena receptora = 2 π R2r = 2π (10 m)^2 = 6.28 102 m^2

$$P_{rad} = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dP}{dt}$$

Variación de impulso)/ (unidad de área) x (unidad de tiempo)

Si la antena tiene una ***superficie absorbente*** ⇨ $$P_{rad} = \frac{Fd}{Ad} = \frac{E_r}{\Delta V} = U_V$$

P_{rad} = 5.31 10^{-3} J/m^3 = 5.31 10^{-3} Pa

(J/m^3 = N.m/ m^3 = N/ m^2= Pa)

Si la antena tiene una ***superficie reflectora*** ⇨ ***En una incidencia normal el impulso transferido es el doble*** ⇨ $$P_{rad} = 2U_V = \frac{2N}{c}$$

P_{rad} = 1.062 10^{-2} Pa

Dr. A. Ozols 38

PRESION de RADIACION

$F = A_r P_{rad} = 6.28\ 102\ m^2\ 10.62\ 10^{-3}\ Pa = 6.66\ N$ en el intervalo de 1 ns

g) ¿Cuál es la compresión de los gotas de combustible?

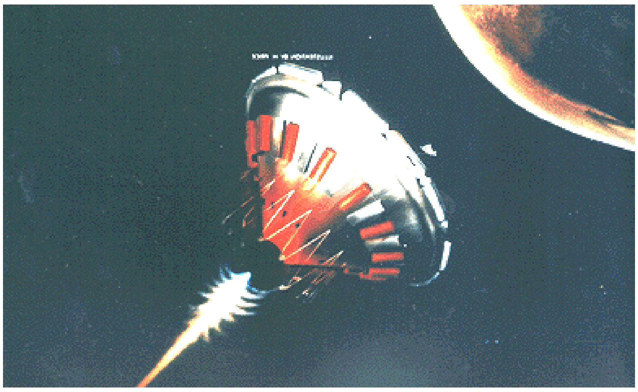
Si misma antena receptora enfoca toda la potencia de la antena receptora sobre la cámara de combustión.

Un gota (Deuterio + Tritio) DT de $r_g = 500\ \mu m$

$$P_{rad} = \frac{S_g}{c} \cong \frac{P}{4\pi r_g^2 c} = 10^7\ W/(4\ \pi\ (5\ 10^{-7}\ m)^2\ 3\ 10^{8}\ m/s) = 1.06\ 10^{10}\ Pa$$

PRESION de RADIACION

$P_{rad} \cong 1.06\ 10^{4}$ Mpa $\cong$ $1.06\ 10^{5}$ atm !!!



Inició la fusión, puedo pisar el acelerador!