

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas en el vacío.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

En el vacío, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ de modo que las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

En ausencia de fuentes ($\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Podemos aplicar el rotor a la ecuación (3)

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\end{aligned} \quad (5)$$

En el lado izquierdo de (5) podemos usar la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ con lo cual queda, aplicando también (1),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

o bien,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Operando en forma similar a partir de (4) obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (7)$$

Podemos ver que las funciones

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (8)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (9)$$

son solución de (6) y (7):

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

de manera que la función propuesta será solución si

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Por otro lado, debemos analizar bajo que condiciones las soluciones propuestas verificarán las ecuaciones de Maxwell.

Para satisfacer (1), calculamos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

de manera que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E}$. De la misma forma, a partir de (2) se llega a $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$.

Para satisfacer (3), en el lado izquierdo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

(para comprobar esta igualdad basta con desarrollar $\nabla \times \mathbf{E}$ en sus componentes) y en el lado derecho

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \omega \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Entonces,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (10)$$

Dado que $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$ en (10) está diciendo que $\mathbf{B}$ es ortogonal al plano formado por $\mathbf{E}$ y $\mathbf{k}$. Por ejemplo, si $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{x}}$ resulta $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega}kE_0(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\omega}kE_0\hat{\mathbf{y}}$.

Vemos también que los módulos están relacionado mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 &= \omega \mathbf{B}_0 \\ |\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0| &= |\omega \mathbf{B}_0| \\ kE_0 &= \omega B_0 \end{aligned}$$

o bien $E_0 = cB_0$.