Física III A - Guía Nº 7

Semiconductores en equilibrio

---

1) Sabiendo que en equilibrio térmico las concentraciones de portadores en un semiconductor intrínseco están dadas (en la aproximación de Boltzmann) por

$$\begin{aligned} n_0 &= 2\left(\frac{2\pi m_n^\star kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) \\ p_0 &= 2\left(\frac{2\pi m_p^\star kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right) = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right) \end{aligned}$$

calcule, considerando conocido a $E_g = E_c - E_v$:

a) La ubicación del nivel de Fermi intrínseco E_i.

b) La concentración intrínseca n_i.

c) Evalúe para Silicio y Arseniuro de Galio. Represente en un diagrama.

1)

a) En un semiconductor intrínseco, $n_0 = p_0$, de manera que para hallar la ubicación del nivel de Fermi planteamos

$$2\left(\frac{2\pi m_n^\star kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) = 2\left(\frac{2\pi m_p^\star kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right)$$

de donde

$$\begin{aligned} m_n^{\star\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) &= m_p^{\star\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right) \\ \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right)\exp\left(\frac{E_F - E_v}{kT}\right) &= \frac{m_p^{\star\frac{3}{2}}}{m_n^{\star\frac{3}{2}}} \\ \exp\left(\frac{-E_c + E_F + E_F - E_v}{kT}\right) &= \left(\frac{m_p^\star}{m_n^\star}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \exp\left[\frac{2E_F - (E_c + E_v)}{kT}\right] &= \left(\frac{m_p^\star}{m_n^\star}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{2E_F - (E_c + E_v)}{kT} &= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{m_p^\star}{m_n^\star}\right) \\ E_F &= \tfrac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_p^\star}{m_n^\star}\right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$E_g = E_c - E_v$$

se puede escribir

$$E_F = E_v + \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_p^\star}{m_n^\star}\right)$$

Usualmente se toma $E_v = 0$, con lo cual

$$E_F = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_p^\star}{m_n^\star}\right)$$

b) En un material intrínseco, $n_0 = p_0 \equiv n_i$. Se puede plantear entonces

$$\begin{aligned}
n_i^2 &= n_0 p_0 \\
&= N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right) \\
&= N_c N_v \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT} - \frac{E_F - E_v}{kT}\right) \\
&= N_c N_v \exp\left(\frac{-E_c + E_v}{kT}\right) \\
&= N_c N_v \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right)
\end{aligned}$$

O bien

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right)$$

---

2) En un semiconductor intrínseco bidimensional, las funciones de densidad de estados son

$$\begin{aligned}
g_n(E) &= \frac{4\pi m_n^\star}{h^2} \text{ si } E > E_c \\
g(E) &= 0 \\
g_p(E) &= \frac{4\pi m_p^\star}{h^2} \text{ si } E < E_v
\end{aligned}$$

Usando la estadística de Fermi y sin recurrir a la aproximación de Boltzmann calcule:

a) Las concentraciones de equilibrio n_0 y p_0.

b) La posición del nivel de Fermi intrínseco, considerando $m_n^\star = m_p^\star$.

2)

a) La concentración de equilibrio de electrones está dada por

$$\begin{aligned}
n_0 &= \int_{E_c}^{\infty} f_n(E)\, g_n(E)\, dE \\
&= \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} \frac{4\pi m_n^\star}{h^2} dE \\
&= \frac{4\pi m_n^\star}{h^2} \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} dE
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $x = \frac{E - E_F}{kT}$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)} dE &= kT \int_{\frac{E_c - E_F}{kT}}^{\infty} \frac{1}{1 + \exp(x)} dx \\
&= kT \left\{ \left[x - \ln(1 + e^x)\right] \Big|_{\frac{E_c - E_F}{kT}}^{\infty} \right\} \\
&= kT \left[\ln\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right) \Big|_{\frac{E_c - E_F}{kT}}^{\infty} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= kT\left[\ln\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)\Big|_{\frac{E_c-E_F}{kT}}^{\infty}\right] \\
&= kT\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right)
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
n_0=\frac{4\pi m_n^{\star}kT}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right)
$$

Para calcular la concentración de huecos p_0 notamos que

$$
\begin{aligned}
f_p(E) &= 1-f_n(E) \\
&= 1-\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)}=\frac{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)-1}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} \\
&= \frac{\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)}=\frac{1}{1+\exp\left(\frac{E_F-E}{kT}\right)}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \int_{-\infty}^{E_v} f_p(E)\,g_p(E)\,dE \\
&= \int_{-\infty}^{E_v} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{E_F-E}{kT}\right)}\frac{4\pi m_p^{\star}}{h^2}dE \\
&= \frac{4\pi m_p^{\star}}{h^2}\int_{-\infty}^{E_v} \frac{1}{1+\exp\left(\frac{E_F-E}{kT}\right)}dE \\
&= \frac{4\pi m_p^{\star}kT}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}}\right)
\end{aligned}
$$

b) Para hallar en nivel de Fermi planteamos

$$
\begin{aligned}
n_0 &= p_0 \\
\frac{4\pi m_n^{\star}kT}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right) &= \frac{4\pi m_p^{\star}kT}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}}\right) \\
\frac{4\pi m_n^{\star}kT}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right) &= \frac{4\pi m_p^{\star}kT}{h^2}\ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}}\right) \\
m_n^{\star}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right) &= m_p^{\star}\ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}}\right) \\
\frac{m_n^{\star}}{m_p^{\star}}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right) &= \ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}}\right) \\
\ln\left(\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}}\right) &= \ln\left(\frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}}\right) \\
\frac{1}{1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}}} &= \frac{1}{1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}}} \\
1+e^{\frac{E_v-E_F}{kT}} &= 1+e^{-\frac{E_c-E_F}{kT}} \\
\frac{E_v-E_F}{kT} &= -\frac{E_c-E_F}{kT}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_v + E_c &= 2E_F \\
E_F &= \frac{E_v + E_c}{2} \\
&= E_v + \frac{E_g}{2} \\
&= \frac{E_g}{2}
\end{aligned}
$$

En el último caso, tomando $E_v = 0$.

---

3) Encuentre la densidad de portadores de equilibrio y la posición del nivel de Fermi para un semiconductor, a temperatura ambiente, que se contamina sucesivamente con

a) Fósforo.

b) Boro, de forma tal que el número de átomos de Boro supere al de Fósforo.

3) El Fósforo es una impureza del grupo V, el Boro del grupo III. Supongamos entonces que se incorporan al material N_D átomos de Fósforo y N_A átomos de Boro.

a) Solo están presentes los N_D átomos de Fósforo. Entonces, la densidad de electrones, portadores mayoritarios, será

$$n_0 \simeq N_D$$

y la de los huecos, portadores minoritarios, será

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0}$$

Luego,

$$N_D \simeq n_0 = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right)$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{N_D}{N_c}\right) &= -\frac{E_c - E_F}{kT} \\
E_F &= E_c + kT\ln\left(\frac{N_D}{N_c}\right)
\end{aligned}
$$

Normalmente será $N_D < N_c$, por lo cual resulta $E_F < E_c$.
Otra posibilidad es otra expresión para n_0

$$N_D \simeq n_0 = n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right)$$

de donde

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right) &= \frac{E_F - E_i}{kT} \\
E_F &= E_i + kT\ln\left(\frac{N_D}{n_i}\right)
\end{aligned}
$$

Como $N_D > n_i$ (no tendría sentido contaminar en el caso contrario) vemos que $E_F > E_i$ en un material tipo n.

b) Ahora están presente las dos contaminaciones, N_D átomos de Fósforo y N_A de Boro, con $N_D < N_A$. Entonces

$$p_0 \simeq N_A - N_D$$

y

$$n_0 = \frac{n_i^2}{p_0} = \frac{n_i^2}{N_A - N_D}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
N_A - N_D &\simeq p_0 = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_v}{kT}\right) \\
\ln\left(\frac{N_A - N_D}{N_v}\right) &= -\frac{E_F - E_v}{kT} \\
E_F &= E_v - kT \ln\left(\frac{N_A - N_D}{N_v}\right)
\end{aligned}$$

Donde hay que notar que $E_F > E_v$, pues $N_A - N_D < N_v$.
Del mismo modo que antes, tambien se puede hacer

$$N_A - N_D \simeq p_0 = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right)$$

de donde

$$\ln\left(\frac{N_A - N_D}{n_i}\right) = \frac{E_i - E_F}{kT}$$

y

$$E_F = E_i - kT \ln\left(\frac{N_A - N_D}{n_i}\right)$$

donde vemos que $E_F < E_v$, en un material tipo p.

---

4) Determine las concentraciones de equilibrio y la posición del nivel de Fermi en una muestra de Silicio (a $T =$ 300K) contaminada con

a) Boro, con $N_A = 1 \cdot 10^{14}\ cm^{-3}$.
b) Arsénico, con $N_D = 2 \cdot 10^{15}\ cm^{-3}$.

5) Una muestra de Silicio se contamina con $2 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}$ átomos de Boro.

a) Encuentre las concentraciones de equilibrio y la posición del nivel de Fermi.
b) ¿Que tipo de impurezas y en que cantidad se deben agregar para que el nivel de Fermi quede a 0.159 eV por debajo del nivel de conducción?

6) Calcule las concentraciones de equilibrio de electrones y huecos 27 ^oC en Silicio contaminado con los siguientes dopantes:

a) $1 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}$ átomos de Boro.
b) $3 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}$ átomos de Arsénico y $2.9 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}$ átomos de Boro.

7) Demuestre que las concentraciones de electrones y huecos en un semiconductor (intrínseco o extrínseco) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
n_0 &= n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i}{kT}\right) \\
p_0 &= n_i \exp\left(\frac{E_i - E_F}{kT}\right)
\end{aligned}$$