

Física III A - Guía N° 5

Mecanica estadística

- 1) Describa la Ley de distribución de Maxwell-Boltzmann, indicando su significado y suposiciones en las que se basa.
- a) ¿Que es la funcion de partición?
 - b) ¿Como se calcula la energía media en un sistema de partículas representado por la estadística de Maxwell-Boltzmann?
-

- 2) Se tiene un sistema de partículas distingibles con solo dos estados de energía, $E_1 = \epsilon$ y $E_2 = -\epsilon$ ($g_1 = g_2 = 1$).
- a) Calcule la función de partición.
 - b) Calcule la energía media por partícula y del sistema.
-

- 3) Un sistema de N partículas posee 3 niveles de energía accesibles con valores $E_1 = -E$; $E_2 = 0$; $E_3 = +E$. La degeneración de cada nivel es $g = 1$. Sabiendo que las partículas son distinguibles, calcule:
- a) La función partición del sistema.
 - b) La energía promedio por partícula y del sistema.
 - c) La capacidad calorifica a volumen constante.

Solución:

- a) La función de partición es ($\beta = 1/kT$)

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

donde g_i es la degeneración del estado i , y E_i su energía. En este caso quedará

$$Z = e^{-\beta E} + 1 + e^{\beta E} = 1 + 2 \cosh(\beta E)$$

- b) La energía media se calcula como

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_i N_i E_i = \sum_i \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} E_i = \frac{N}{Z} \sum_i g_i \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\beta E_i}) \right] \\ &= -\frac{N}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_i g_i e^{-\beta E_i} \right] \\ &= -\frac{N}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ &= -N \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \end{aligned}$$

En este caso será

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= -\frac{N}{1 + 2 \cosh(\beta E)} \frac{\partial}{\partial \beta} [1 + 2 \cosh(\beta E)] \\ &= -\frac{2NE \sinh(\beta E)}{1 + 2 \cosh(\beta E)} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \\
&= -\frac{1}{kT^2} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \\
&= \frac{1}{kT^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{2NE \sinh(\beta E)}{1 + 2 \cosh(\beta E)} \right] \\
&= \frac{N}{kT^2} \frac{2E^2 \cosh(\beta E) [1 + 2 \cosh(\beta E)] - 2E \sinh(\beta E) 2E \sinh(\beta E)}{[1 + 2 \cosh(\beta E)]^2} \\
&= \frac{N}{kT^2} \frac{2E^2 \cosh(\beta E) + 4E^2 \cosh^2(\beta E) - 4E^2 \sinh^2(\beta E)}{[1 + 2 \cosh(\beta E)]^2} \\
&= \frac{N}{kT^2} \frac{[2E^2 \cosh(\beta E) + 4E^2]}{[1 + 2 \cosh(\beta E)]^2}
\end{aligned}$$

4) Se puede considerar que los átomos de un sólido constituyen un sistema de osciladores armónicos en 3-D con energías $E(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})h\nu$ (Modelo de Einstein).

a) Demuestre que la función de partición del sistema es $(g = 1) Z = e^{\frac{3h\nu}{2kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^{-3}$.

b) Calcule la energía media de las partículas.

c) Calcule el calor específico a volumen constante y analice

Solución:

a) La función de partición es

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \\
&= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} e^{-\beta(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2})h\nu} \\
&= e^{-\frac{3}{2}\beta h\nu} \sum_{n_1} e^{-\beta n_1 h\nu} \sum_{n_2} e^{-\beta n_2 h\nu} \sum_{n_3} e^{-\beta n_3 h\nu} \\
&= e^{-\frac{3}{2}\beta h\nu} \sum_{n_1} (e^{-\beta h\nu})^{n_1} \sum_{n_2} (e^{-\beta h\nu})^{n_2} \sum_{n_3} (e^{-\beta h\nu})^{n_3} \\
&= e^{-\frac{3}{2}\beta h\nu} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right)^3 = e^{-\frac{3}{2}\frac{h\nu}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^{-3} \\
&= \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} \right)^3 = \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\beta h\nu} - e^{-\frac{1}{2}\beta h\nu}} \right)^3 \\
&= \left[\frac{1}{2 \sinh(\frac{1}{2}\beta h\nu)} \right]^3 = \frac{1}{8 \sinh^3(\frac{1}{2}\beta h\nu)}
\end{aligned}$$

b) La energía media (por partícula) es

$$\begin{aligned}
 \langle E \rangle &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \\
 &= -8 \sinh^3 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{8 \sinh^3 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)} \right] \\
 &= -8 \sinh^3 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right) \frac{24 \sinh^2 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right) \cosh \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right) \frac{1}{2} h \nu}{64 \sinh^6 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)} \\
 &= \frac{\frac{3}{2} h \nu \cosh \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)}{\sinh \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)} = \frac{3}{2} h \nu \coth \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)
 \end{aligned}$$

c) El calor específico a volumen constante es

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial T} \\
 &= -\frac{1}{k T^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{3}{2} h \nu \coth \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{k T^2} \frac{3}{2} h \nu \left[-\frac{\frac{1}{2} h \nu}{\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)} \right] \\
 &= 3k \left(\frac{h \nu}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \beta h \nu \right)} \\
 &= 3k \left(\frac{h \nu}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{h \nu}{2kT} \right)}
 \end{aligned}$$

Para $x \ll 1$ se pueden desarrollar $e^x \simeq 1 + x$ y $e^{-x} \simeq 1 - x$ de manera que

$$\begin{aligned}
 \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 &\simeq \frac{(1+x) - (1-x)}{2} = x
 \end{aligned}$$

Así, para $h \nu \ll kT$ o $\beta h \nu \ll 1$ se puede aproximar

$$\sinh^2 \left(\frac{h \nu}{2kT} \right) \simeq \left(\frac{h \nu}{2kT} \right)^2$$

con lo cual

$$C_V \simeq 3k \left(\frac{h \nu}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{h \nu}{2kT} \right)^2} = 3k$$

El principio de equipartición establece que cada grado de libertad de vibración aporta, por partícula, una energía kT . De esta forma, para tres grados de libertad de vibración tendremos para la energía total $\langle E \rangle = 3NkT$ y el calor específico a volumen constante será (ley de Dulong y Petit)

$$C_V = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = 3k$$

- 5) Se tiene una caja cúbica de paredes perfectamente reflectoras (Pozo infinito 3D). Resuelva la ecuación de Schrodinger ¿Que significa que un nivel de energía es degenerado? ¿Cual es la degeneración del nivel de energía $E_9 = \frac{9\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$? Obtenga una expresión que permita calcular el número de estados por unidad de intervalo de energía.

Solución :

Los niveles de energía en una caja tridimensional están dados por

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

El volumen de una esfera en el espacio n es

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{3}{2}}$$

de manera que el número de estados es

$$\frac{V}{8} = \frac{1}{6} \pi (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{3}{2}}$$

Escribiendo esto en función de la energía, el número de estados con energía menor o igual que E es

$$\Omega_{<}(E) = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{2ma^2}{\hbar^2 \pi^2} E \right)^{3/2}$$

Luego, en número de estados con energía menor que $E + \delta E$ será

$$\Omega_{<}(E + \delta E) = \Omega_{<}(E) + \frac{\partial \Omega_{<}}{\partial E} \delta E$$

de modo que el número de estado con energía entre E y $E + \delta E$ será

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \Omega_{<}(E + \delta E) - \Omega_{<}(E) \\ &= \frac{\partial \Omega_{<}}{\partial E} \delta E \\ &= \frac{1}{6} \pi \left(\frac{2ma^2}{\hbar^2 \pi^2} \right)^{3/2} \frac{3}{2} E^{1/2} \delta E \\ &= \frac{1}{4} \pi \frac{2V (2m^3)^{1/2}}{(\hbar \pi)^3} E^{1/2} \delta E \\ &= \frac{1}{4} \pi \frac{2V (2m^3)^{1/2}}{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^3} E^{1/2} \delta E = \frac{1}{4} \pi 8 \frac{2V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \delta E \\ &= \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \delta E \end{aligned}$$

De manera que

$$g(E) = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2}$$

- 6) Deduzca la velocidad cuadrática media, la velocidad media y la más probable a partir de la ley de distribución de velocidades de partículas que de un gas ideal clásico. Evalúelas para $T = 300$ K.

Solución:

La función de distribución de velocidades es $N_v(v)/N_v(v)dv = N(E)dE$, donde

$$\begin{aligned} N(E) &= f(E)g(E) = \frac{N}{Z} e^{-\frac{E}{kT}} \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \\ &= \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} E^{1/2} \end{aligned}$$

(Z calculada en el ejercicio 6)
 Entonces, $(E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2E/m})$

$$\begin{aligned}
 N_v(v) &= N[E(v)] \frac{dE}{dv} = \\
 &= \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sqrt{\frac{m}{2}} v \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \\
 &= \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sqrt{\frac{m^3}{2}} v^2 \\
 &= \frac{4\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \sqrt{\frac{m^3}{2^3}} v^2 \\
 &= 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}
 \end{aligned}$$

Luego, la velocidad media es

$$\begin{aligned}
 \langle v \rangle_{MB} &= \frac{1}{N} \int_0^\infty v N_v(v) dv \\
 &= 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\
 &= 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{kT}{m} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

La velocidad cuadrática media es

$$\begin{aligned}
 \langle v^2 \rangle_{MB} &= \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 N_v(v) dv \\
 &= 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv
 \end{aligned}$$

La velocidad mas probable se obtiene como el máximo de la función $N_v(v)$, para lo cual planteamos

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_v(v)}{dv} &= 0 \\
 \frac{d}{dv} \left[4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right] &= 0 \\
 \frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \right) &= 0 \\
 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2v - \frac{mv^3}{kT} \right) &= 0 \\
 v e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) &= 0 \\
 v &= \sqrt{\frac{2kT}{m}}
 \end{aligned}$$

- 7) Hallar la función de partición Z y la energía media por partícula para un gas de moléculas monoatómica que obedecen a la estadística de MB ¿A que se denomina Principio de equipartición?

Solución :

La función de partición está dada por

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) g(E) dE = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE \\ &= \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) E^{1/2} dE \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$x = \frac{E}{kT}$$

resulta $dE = kT dx$ y $E^{1/2} = \sqrt{kT} x^{1/2}$ de manera que

$$Z = \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{1/2} dx$$

La integral es un caso particular de función gamma, la cual esta definida por

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} \exp(-x) dx$$

En este caso es, usando que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$$\int_0^{\infty} \exp(-x) x^{1/2} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} Z &= \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Como vimos antes, la energía media (por partícula) se calcula como

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta}$$

y dado que $\beta = -\frac{1}{kT}$ o bien $T = -\frac{1}{k\beta}$ resulta

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{k\beta} \right) = \frac{1}{k\beta^2} = \frac{1}{k \left(-\frac{1}{kT} \right)^2} = kT^2$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \ln \left[V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \right] \right\} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \ln V + \ln \left[\left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \right] \right\} \\ &= kT^2 \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left[\ln \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right) \right] = kT^2 \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left[\ln \left(\frac{2\pi m k}{h^2} \right) + \ln(T) \right] \\ &= kT^2 \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial T} [\ln(T)] = \frac{3}{2} kT \end{aligned}$$

Este resultado puede pensarse como $\langle E \rangle = 3 \left(\frac{1}{2} kT \right)$ de modo que cada grado de libertad traslacional aporta una energía de $\frac{1}{2} kT$. Es el principio de equipartición.

- 8) Demuestre que la longitud de onda de De Broglie de una partícula de masa m que se mueve con la velocidad más probable de una distribución de Maxwell-Boltzmann a la temperatura T es:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mkT}}$$

- 9) ¿A que se denomina función de distribución de Fermi? ¿Que representa?

- a) Grafique la función de distribución de Fermi para $T = 0$ y $T > 0$.
b) Grafique el número de electrones con energías comprendidas entre E y $E + dE$ en función de la energía para $T = 0$ K y $T > 0$ K.

Solución :

La función de distribución de Fermi, $f(\varepsilon)$, representa el número medio de partículas en un estado con energía ε .

- a) Si $T > 0$,

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}}}$$

Entonces, si $T = 0$ ($T \rightarrow 0$ en el caso anterior),

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_F \\ 0 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_F \end{cases}$$

- b) Como $N(\varepsilon) = f(\varepsilon) g(\varepsilon)$ resulta, si $T > 0$

$$N(\varepsilon) = \frac{\frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2}}{1 + e^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}}}$$

y si $T = 0$

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{4\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_F \\ 0 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_F \end{cases}$$

- 10) Obtenga una expresión para la ε_F en función del número de electrones por unidad de volumen (N/V). Defina y calcule:

- a) Temperatura de Fermi.
b) Velocidad de Fermi.

Solución :

El número medio de partículas por estado de energía E esta dado por la función de distribución de Fermi

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E - \varepsilon_F)/kT} + 1}$$

Entonces, el número de partículas con energía entre E y $E + dE$ será

$$N(E) dE = f(E) g(E) dE$$

de manera que el número total de partículas es

$$N = \int N(E) dE = \int_0^{\infty} f(E) g(E) dE$$

Para poder calcular esta integral notamos que, a $T = 0$,

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E < \epsilon_F \\ 0 & \text{si } E > \epsilon_F \end{cases}$$

Con lo cual podemos escribir

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\epsilon_F} g(E) dE \\ &= \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} E^{1/2} dE \\ &= \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \epsilon_F &= \left[\frac{3Nh^3}{16\pi V (2m^3)^{1/2}} \right]^{2/3} \\ &= \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

a) La temperatura de Fermi T_F se define de forma tal que $\epsilon_F = kT_F$. Entonces,

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k}$$

b) La velocidad de Fermi v_F se define de forma tal que $\epsilon_F = \frac{1}{2}mv_F^2$. Entonces,

$$v_F = \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}}$$

11) La energía de Fermi varía con la temperatura conforme a la expresión:

$$\varepsilon_F(T) = \varepsilon_F(0) \left[1 - \frac{\pi}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 - \dots \right]$$

Donde $\varepsilon_F(0)$ es el valor para $T = 0$ K.

- Demuestre que cuando $T = 3^{1/2} \frac{T_F}{5\pi}$ donde $T_F = \varepsilon_F/k$ la energía de Fermi varía en 1% respecto de su valor en 0 K.
- Calcule esa temperatura para el Cu y el Ag.
- ¿Es válido considerar a la ε_F constante con la temperatura a temperatura ambiente?

- 12)** Calcule la energía media de un conjunto de electrones. Escriba en función de la energía de Fermi ¿Que aproximaciones realiza? Justifique.

Solución:

La energía media está dada por

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} n(E) E dE = \int_0^{\infty} f(E) g(E) E dE$$

A $T = 0$ queda

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \int_0^{\epsilon_F} g(E) E dE \\ &= \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} E^{3/2} dE \\ &= \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2} \\ &= \frac{8\pi V (2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} \frac{3}{5} \epsilon_F \\ &= N \frac{3}{5} \epsilon_F \end{aligned}$$

o bien

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\langle E \rangle}{N} = \frac{3}{5} \epsilon_F$$

- 13)** Calcule la velocidad media de un conjunto de electrones. Escriba en función de la velocidad de Fermi.

Solución :

La velocidad media está dada por

$$\langle v \rangle_{FD} = \int_0^{\infty} n_v(v) v dv$$

o, a $T = 0$,

$$\langle v \rangle_{FD} = \int_0^{v_F} g_v(v) v dv$$

donde $g_v(v)$ se obtiene a partir de

$$g_v(v) dv = g_E(E) dE$$

o

$$\begin{aligned} g_v(v) &= g_E[E(v)] \frac{dE}{dv} \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3)^{1/2} \left(\frac{mv^2}{2} \right)^{1/2} mv \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} m^3 v^2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_{FD} &= \int_0^{v_F} \frac{8\pi V}{h^3} m^3 v^3 dv = \frac{8\pi V}{h^3} m^3 \int_0^{v_F} v^3 dv \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} m^3 \frac{1}{4} v_F^4 \end{aligned}$$

Esta última expresion puede reescribirse como

$$\langle v \rangle_{FD} = \frac{8\pi V}{h^3} m^3 \frac{1}{4} v_F^4 = \frac{8\pi V}{h^3} m^3 \frac{1}{4} v_F^3 \cdot v_F$$

y teniendo en cuenta que

$$E_F = \frac{1}{2} m v_F^2 \Rightarrow v_F^3 = \left(\frac{2E_F}{m} \right)^{3/2}$$

resulta

$$\langle v \rangle_{FD} = \frac{2\pi V}{h^3} m^3 \left(\frac{2E_F}{m} \right)^{3/2} \cdot v_F = \frac{2\pi V}{h^3} m^3 \left(\frac{2}{m} \right)^{3/2} E_F^{3/2} \cdot v_F$$

Por otro lado,

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \Rightarrow E_F^{3/2} = \frac{3N}{\pi V} \left(\frac{h^2}{8m} \right)^{3/2}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_{FD} &= \frac{2\pi V}{h^3} m^3 \left(\frac{2}{m} \right)^{3/2} \frac{3N}{\pi V} \left(\frac{h^2}{8m} \right)^{3/2} \cdot v_F \\ &= \frac{2 \cdot 2^{3/2}}{8^{3/2}} 3 \frac{m^3}{m^{3/2} m^{3/2}} N \cdot v_F \\ &= \frac{3}{4} \cdot N \cdot v_F \end{aligned}$$

14) Halle la energía media y la velocidad media de los electrones a 0 K para un metal con 10^{22} electrones por cm^3 .

Solución :

15) Para un sistema bidimensional de partículas (fermiones) libres contenidas en un recipiente de lado a (pozo infinito bidimensional)

a) Calcule $g(E)$.

b) Calcule la energía de Fermi para dicho gas.

Solución :

a) La funciones de onda y las energías para el pozo infinito bidimensional son

$$\varphi_{n_x n_y}(\mathbf{r}) = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a} n_x x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} n_y y\right)$$

$$E_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2)$$

Para obtener $g(E)$ ahora consideramos un cuarto de circulo de radio $\sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ en el espacio $n_x n_y$, cuya área es

$$\frac{1}{4} \pi \left(\sqrt{n_x^2 + n_y^2} \right)^2 = \frac{1}{4} \pi (n_x^2 + n_y^2)$$

de modo que el número de estados con energía menos que E es

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \frac{1}{4} \pi \left(\frac{2ma^2}{\hbar^2 \pi^2} E \right) \\ &= \frac{ma^2}{2\hbar^2 \pi} E \end{aligned}$$

con lo cual

$$g(E) = \frac{\partial \Omega}{\partial E} = \frac{ma^2}{2\hbar^2 \pi} = \frac{2\pi ma^2}{h^2}$$

b) El número total de partículas es N , de modo que

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^{\infty} f(E) g(E) dE \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \epsilon_F(T)}{kT}}} \frac{2\pi mA}{h^2} dE \\
&= \frac{2\pi mA}{h^2} \int_0^{\infty} \frac{dE}{1 + e^{\frac{E - \epsilon_F(T)}{kT}}}
\end{aligned} \tag{1}$$

En la integral de (1) sustituimos $\frac{E - \epsilon_F(T)}{kT} = x$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dE}{1 + e^{\frac{E - \epsilon_F(T)}{kT}}} &= kT \int_{\frac{-\epsilon_F(T)}{kT}}^{\infty} \frac{dx}{1 + e^x} \\
&= kT \left\{ [x - \ln(1 + e^x)]_{\frac{-\epsilon_F(T)}{kT}}^{\infty} \right\} \\
&= kT \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} [x - \ln(1 + e^x)] - \left[\frac{-\epsilon_F(T)}{kT} - \ln\left(1 + e^{\frac{-\epsilon_F(T)}{kT}}\right) \right] \right\} \\
&= kT \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right) \right] + \ln\left[e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} \left(1 + e^{\frac{-\epsilon_F(T)}{kT}}\right)\right] \right\} \\
&= kT \left\{ \ln\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)\right] + \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} + 1\right) \right\} \\
&= kT \left\{ \ln(1) + \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} + 1\right) \right\} \\
&= kT \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} + 1\right)
\end{aligned}$$

de modo que

$$N = \frac{2\pi mA kT}{h^2} \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} + 1\right)$$

Luego podemos obtener $\epsilon_F(T)$

$$\begin{aligned}
\ln\left(e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} + 1\right) &= N \frac{h^2}{2\pi mA kT} \\
e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} + 1 &= e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}} \\
e^{\frac{\epsilon_F(T)}{kT}} &= e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}} - 1 \\
\frac{\epsilon_F(T)}{kT} &= \ln\left(e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}} - 1\right) \\
\epsilon_F(T) &= kT \ln\left(e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}} - 1\right)
\end{aligned}$$

A bajas temperaturas ($T \rightarrow 0$), $e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}} \gg 1$ de manera que $\ln\left(e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}} - 1\right) \simeq \ln\left(e^{\frac{Nh^2}{2\pi mA kT}}\right) = \frac{Nh^2}{2\pi mA kT}$ y

$$\epsilon_F(T \rightarrow 0) = kT \frac{Nh^2}{2\pi mA kT} = \frac{Nh^2}{2\pi mA}$$

con lo cual se puede escribir

$$\epsilon_F(T) = kT \ln\left(e^{\frac{\epsilon_F(0)}{kT}} - 1\right)$$

16) Para un sistema de N partículas idénticas en un volumen V :

- a) Enuncie un criterio físico para decidir cuándo las partículas se pueden tratar como distinguibles y cuándo como indistinguibles.
- b) ¿Qué estadística obedece un sistema formado por partículas de este tipo si además ellas tienen spin semientero? Ejemplos.
- c) ¿Y si tienen spin entero? Ejemplos.

Solución :

17) El cobre posee una densidad atómica de $8.5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Su conductividad a temperatura ambiente (300K) es $\sigma = 6 \cdot 10^5 (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$.

- a) Calcule la concentración de electrones libres en una muestra de cobre, suponiendo que cada átomo contribuye con un único electrón a la conducción eléctrica.
- b) Calcule el tiempo libre medio $\langle \tau \rangle$ y el camino libre medio $\langle L \rangle$.
- c) Calcule la movilidad de los electrones libres.

Solucion :

a)

$$n = 8.5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

b) El tiempo libre medio está dado por

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \frac{m_e \sigma}{n q_e^2} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg} \times 6 \cdot 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}}{8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \cdot (1.602 \cdot 10^{-19} \text{C})} \\ &= 2.51 \cdot 10^{-14} \text{s} \end{aligned}$$

y el camino libre medio por

$$\lambda = v_F \langle \tau \rangle$$

donde v_F es tal que

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2} m_e v_F^2$$

Para el cobre, la energía de Fermi es

$$\varepsilon_F = 7.4 \text{eV} = 7.4 \times 1.602 \cdot 10^{-19} \text{Joule} = 1.19 \cdot 10^{-18} \text{Joule}$$

de modo que

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.19 \cdot 10^{-18} \text{Joule}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}}} = 1.6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) La movilidad es

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{q_e \langle \tau \rangle}{m_e} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19} \text{C} \times 2.51 \cdot 10^{-14} \text{s}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}} \\ &= 4.4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}} = 44 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

18) Para los electrones en el Li, cuya energía de Fermi es 4.72 eV:

- a) Calcule la velocidad de Fermi.
- b) Calcule la longitud de onda de De Broglie de un electrón moviéndose a la velocidad de Fermi y compárela con la distancia media entre electrones. Discuta físicamente el resultado.

Solución :

- a) La velocidad de Fermi es tal que

$$\epsilon_F = \frac{1}{2}mv_F^2$$

de modo que

$$\begin{aligned}v_F &= \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4.72 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}}} = \sqrt{1.66 \cdot 10^{12} \frac{m}{s}} \\&\simeq 1.3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

- b) La longitud de onda es

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p_F} = \frac{h}{m_e v_F} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \cdot 1.3 \cdot 10^6 \frac{m}{s}} \\&\simeq 0.56 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 5.6 \text{ \AA}\end{aligned}$$

Si un conjunto de N electrones ocupa un volumen V , el volumen medio ocupado por cada electrón es

$$\frac{V}{N} = \frac{1}{n}$$

donde n es la densidad de electrones. Si imaginamos que cada electrón ocupa un cubo de lado d_e , d_e será entonces la distancia media entre electrones, y su valor es

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

La densidad n se puede obtener a partir de

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

de donde

$$\begin{aligned}n &\equiv \frac{N}{V} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{8m_e \epsilon_F}{h^2} \right)^{3/2} \\&= \frac{\pi}{3} \left[\frac{8 \times 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \times 4.72 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(6.625 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2} \right]^{3/2} \\&= 3.86 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \\&= 3.86 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}d_e &= \frac{1}{\sqrt[3]{3.86 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}}} = 2.96 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\&= 2.96 \text{ \AA}\end{aligned}$$

Vemos entonces que la distancia (media) entre electrones es del orden de la longitud de onda de éstos, de manera que los efectos cuánticos no pueden pasarse por alto. Este gas de electrones debe tratarse con la estadística cuántica.