

Física III A - Guía N° 3

Ecuación de Schrödinger

- 1) Escriba la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y obtenga, a partir de esta, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.
- 2) Resuelva la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula de masa m en el potencial (“pozo infinito”). Demuestre que las soluciones de esta ecuación son ortonormales.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a \end{cases}$$

- 3) Sea $P_{ab}(t)$ la probabilidad de encontrar a la partícula en $a < x < b$ a tiempo t .

a) Demuestre que

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$$

donde $J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$.

b) ¿Como se interpreta a $J(x, t)$? ¿Que unidades tiene?

c) Obtenga $J(x, t)$ para $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$.

Solución :

a)

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (|\Psi(x, t)|^2) dx \quad (1)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial t} (|\Psi(x, t)|^2) = \frac{\partial}{\partial t} [\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)] = \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Dado que $\Psi(x, t)$ es solución de la ecuación de Schrodinger , se verifica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

o bien

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

y de la misma forma

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial t} (|\Psi(x, t)|^2) = \frac{i\hbar}{2m} \left(-\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \quad (2)$$

Podemos tambien ver que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \\ &= \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(|\Psi(x, t)|^2 \right) = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{dP_{ab}}{dt} &= \int_a^b \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \Big|_a^b \\ &= J(a, t) - J(b, t)\end{aligned}$$

donde

$$J(x, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)$$

- b) $J(x, t)$ se interpreta como una corriente de probabilidad (probabilidad por unidad de tiempo).
Dado que Ψ es adimensional, las unidades de J son

$$[J] = \frac{[\hbar]}{[m]} \frac{1}{[x]} = \frac{\text{Joul}\cdot\text{s}}{\text{Kg}} \cdot \frac{1}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}}$$

c) Si

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} = Aike^{i(kx - \omega t)}$$

y

$$\Psi^*(x, t) = A^*e^{-i(kx - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} = -A^*ike^{-i(kx - \omega t)}$$

de modo que

$$\begin{aligned}J(x, t) &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(A^*ike^{-i(kx - \omega t)} Aike^{i(kx - \omega t)} + Ae^{i(kx - \omega t)} A^*ike^{-i(kx - \omega t)} \right) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} 2ik |A|^2 \\ &= \frac{\hbar k}{m} |A|^2\end{aligned}$$

4) Para una partícula de masa m en el potencial (“escalón”)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- a) Discuta la forma de la solución de la ecuación de Schrödinger en las distintas regiones del espacio y para distintos valores posibles de la energía E .
- b) Indique las condiciones de contorno que deberán cumplir las soluciones discutidas en a).
- c) ¿Es posible normalizar las soluciones de la ecuación de Schrödinger?
- d) Obtenga los coeficientes de reflexión y transmisión.

5) Para una partícula de masa m en el potencial (“pozo finito”)

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a \end{cases}$$

- a) Discuta la forma de la solución de la ecuación de Schrödinger en las distintas regiones del espacio y para distintos valores posibles de la energía E .
- b) Indique las condiciones de contorno que deberán cumplir las soluciones discutidas en a).
- c) ¿Existen estados ligados? ¿En que caso?

6) Para una partícula de masa m en el potencial (“barrera”)

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a \end{cases}$$

- a) Discuta la forma de la solución de la ecuación de Schrödinger en las distintas regiones del espacio y para distintos valores posibles de la energía E .
- b) Indique las condiciones de contorno que deberán cumplir las soluciones discutidas en a).
- c) Obtenga los coeficientes de reflexión y transmisión.
- d) ¿Existen estados ligados?

7) Escriba la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso de un oscilador armónico.

- a) Busque en la bibliografía las primeras tres autofunciones y represéntelas gráficamente.
- b) ¿Como son los autovalores de energía?