

Física III A - Guía N° 1

Relatividad - Radiación de Cuerpo Negro

Efecto Fototoeléctrico - Efecto Compton

Relatividad

1) Describa

- a) La transformación de Galileo.
- b) La transformación de Lorentz.
- c) El principio especial de relatividad.
- d) ¿Que ocurre con la velocidad de la luz respecto de dos sistemas inerciales en los casos a) y b)?

Solución :

a) Transformación de Galileo:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{1}$$

o bien (esto lo puedo hacer despejando o considerando que O se mueve respecto de O' con $-v$),

$$\begin{aligned}x &= x' + vt \\y &= y' \\z &= z' \\t &= t'\end{aligned}\tag{2}$$

b) Transformación de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{3}$$

o bien (esto lo puedo hacer despejando o considerando que O se mueve respecto de O' con $-v$),

$$\begin{aligned}x &= \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}\tag{4}$$

- c) El principio de relatividad enunciado por Einstein afirma que las leyes de la física deben ser invariantes para todos los sistemas inerciales (esto es, para todos los sistemas que se desplacen a velocidad constante entre si). En particular, la velocidad de la luz debe ser la misma para todos los sistemas inerciales.

- d) Supongamos que un pulso de luz se desplaza con velocidad c en el sistema O . Queremos ver con que velocidad se desplazará en el sistema O' . Para esto, es necesario obtener previamente las transformaciones de velocidades.

- i) Transformación de velocidades de Galileo: para esto, simplemente derivamos en (1)

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v \\u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = u_y \\u'_z &= u_z\end{aligned}\tag{5}$$

Luego, si el pulso de luz se desplaza con velocidad $u_x = c$, $u_y = u_z = 0$, la velocidad en el sistema O' será

$$u'_x = c - v$$

de manera que en el sistema O' el pulso no se desplaza con la velocidad de la luz.

- ii) Transformación de velocidades de Lorentz

En este caso $\left(\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$,

$$dx' = d\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \gamma(dx - vdt) = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right)dt = \gamma(u_x - v)dt$$

y

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)dt = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)dt$$

con lo cual

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(u_x - v)dt}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)dt} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}\tag{6}$$

Además,

$$dy' = dy$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)dt} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}u_y\tag{7}$$

y de la misma forma

$$u'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}u_z\tag{8}$$

Entonces, si $u_x = c$ resulta

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c^2}c} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

de modo que en ambos sistemas inerciales la luz se desplaza a la misma velocidad.

2)

- a) ¿Como se define la fuerza en mecánica relativista?
- b) Analice el movimiento rectilíneo, de acuerdo a la mecánica relativista, de una partícula de masa en reposo m_0 cuando actúa sobre ella una fuerza constante F (suponga $v(0) = 0$ y $x(0) = 0$). Compare con el caso no relativista.

Solución :

a) En dinámica relativista, la fuerza está dada por

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$. Esto es diferente al caso no relativista pues la masa m no es constante:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

b) La ecuación de movimiento es

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right)$$

o

$$F dt = d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow \int_{t_0}^t F dt = \int_{p(t_0)}^{p(t)} d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow Ft = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

pues $t_0 = 0$ y $u(t_0) = 0 \Rightarrow p(t_0) = \frac{m_0 u(t_0)}{\sqrt{1 - \frac{u(t_0)^2}{c^2}}} = 0$.

Podemos despejar la velocidad:

$$Ft = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{m_0 u}{Ft} \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{Ft} \right)^2 u^2 \Rightarrow 1 = u^2 \left[\frac{1}{c^2} + \left(\frac{m_0}{Ft} \right)^2 \right]$$

de modo que

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{m_0}{Ft} \right)^2}} = \frac{1}{\frac{m_0}{Ft} \sqrt{\left(\frac{Ft}{m_0 c} \right)^2 + 1}} \\ &= c \frac{(F/m_0 c) t}{\sqrt{(F/m_0 c)^2 t^2 + 1}} \end{aligned} \quad (9)$$

Vemos en (9) que la velocidad u no puede superar a la de la luz, c .

Luego,

$$\frac{dx}{dt} = u = c \frac{(F/m_0 c) t}{\sqrt{(F/m_0 c)^2 t^2 + 1}} \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t c \frac{(F/m_0 c) t}{\sqrt{(F/m_0 c)^2 t^2 + 1}} dt$$

Cambiando variable

$$z = (F/m_0 c)^2 t^2 + 1 \Rightarrow dz = 2 (F/m_0 c)^2 t dt \Rightarrow \frac{dz}{2 (F/m_0 c)} = (F/m_0 c) t$$

resulta ($t_0 = 0, x(t_0) = 0$)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{2 (F/m_0 c)} \int_1^{(F/m_0 c)^2 t^2 + 1} \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{m_0}{2F} \left\{ 2\sqrt{z} \right\}_1^{(F/m_0 c)^2 t^2 + 1} \\ &= \frac{m_0 c^2}{F} \left(\sqrt{(F/m_0 c)^2 t^2 + 1} - 1 \right) \end{aligned}$$

3) De acuerdo a la dinámica relativista para una partícula de masa en reposo m_0 .

- a) Obtenga la energía cinética ¿Como se puede relacionar este resultado con el caso no relativista?
- b) Obtenga la relación cantidad de movimiento - energía.

Solución :

- a) La energía cinética que adquiere un cuerpo de masa en reposo m_0 , que parte de la posición $x_0 = 0$ y con velocidad $u_0 = 0$, cuando actúa sobre él una fuerza F hasta alcanzar la velocidad u (en la posición x) es

$$E_C = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x \frac{d(mu)}{dt} dx = \int_{(mu)_0}^{mu} u d(mu) \quad (10)$$

pero $d(mu) = mdu + udm$ de manera que

$$u d(mu) = u m du + u^2 dm \quad (11)$$

Por otro lado, de

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

resulta

$$\begin{aligned} m^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) &= m_0^2 \\ m^2 (c^2 - u^2) &= c^2 m_0^2 \\ d(m^2 c^2 - m^2 u^2) &= d(c^2 m_0^2) \\ d(m^2 c^2) - d(m^2 u^2) &= 0 \\ c^2 d(m^2) - u^2 d(m^2) - m^2 d(u^2) &= 0 \\ (c^2 - u^2) d(m^2) - m^2 d(u^2) &= 0 \\ (c^2 - u^2) 2m dm - m^2 2u du &= 0 \\ (c^2 - u^2) dm &= u m du \end{aligned} \quad (12)$$

reemplazando (12) en (11) resulta

$$\begin{aligned} u d(mu) &= (c^2 - u^2) dm + u^2 dm \\ &= c^2 dm \end{aligned} \quad (13)$$

y con (13) en (10) queda

$$\begin{aligned} E_C &= \int_{m_0}^m c^2 dm \\ &= c^2 (m - m_0) \end{aligned}$$

Cuerpo negro

4)

- a) Escriba la Ley de Planck y describa su significado físico ¿Que postulados la originan?

- b) Obtenga la ley de desplazamiento de Wien.
 c) Obtenga la ley de Stefan Boltzman.

Solución :

- a) La ley de Planck se escribe como

$$E(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

donde ν es la frecuencia, T la temperatura, k la constante de Boltzmann, h la constante de Plank y c la velocidad de la luz en el vacío. $E(\nu)$ es tal que $E(\nu) d\nu$ es la densidad de energía radiada por un cuerpo negro para las frecuencias contenidas entre ν y $\nu + d\nu$. Vemos en las unidades qu

$$[E(\nu) d\nu] = \left[\frac{h\nu^3}{c^3} \right] = \frac{(J \cdot s) \cdot s^{-3}}{m^3 \cdot s^{-3}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{J}{m^3}$$

Esta ley se originó al considerar Planck un conjunto de radiadores cuyas energías estan discretizadas.

- b) La ley de Wien dice que si $\nu_{max,T}$ es la frecuencia para la cual $E(\nu)$ es máxima a temperatura T , entonces

$$\frac{T}{\nu_{max,T}} = cte$$

Analizamos a partir de la ley de Planck. Para esto, buscamos el máximo de $E(\nu)$ con el método usual de Análisis:

$$\begin{aligned} \frac{dE(\nu)}{d\nu} &= \frac{d}{d\nu} \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\ &= \frac{d}{d\nu} \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \right) \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d}{d\nu} \left(\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \\ &= \frac{24\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} - \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{h}{kT} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} \\ &= \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \left[3 - \frac{h}{kT} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right] \end{aligned}$$

de manera que $\frac{dE(\nu)}{d\nu} = 0 \iff$

$$3 - \frac{h}{kT} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = 0$$

o bien

$$3 - x \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

donde $x = \frac{h\nu}{kT}$. Esta ecuación puede reescribirse como

$$\begin{aligned} 3(e^x - 1) &= xe^x \\ 3e^x - 3 - xe^x &= 0 \\ 3e^x &= 3 + xe^x \\ 1 &= e^{-x} + \frac{1}{3}x \\ e^{-x} + \frac{1}{3}x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Para esta última ecuación se obtiene numéricamente la solución $x_m = 2.8210$, con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{max,T}}{T} &= \frac{h}{kx_m} \\ &= \frac{6.625 \cdot 10^{-34}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 2.821} \frac{J \cdot s}{J/K} \\ &= 1.7 \cdot 10^{-11} K \cdot s \end{aligned}$$

- c) Ley de Stefan - Boltzmann: la potencia (energía por unidad de tiempo) total irradiada, por unidad de área, por un cuerpo negro está dada por

$$P = \sigma T^4$$

donde T es la temperatura y $\sigma = 5.6693 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ es la constante de Stefan - Boltzman. Primer calculamos, a partir de la distribución de Planck, la densidad total (o sea, para todas las longitudes de onda) de energía del cuerpo negro en función de la temperatura (lo cual no es lo mismo que la potencia P buscada):

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} E(\nu) d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow \nu = \frac{kT}{h}x$ y $d\nu = \frac{kT}{h}dx$ resulta

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \left(\frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right) T^4 \\ &\equiv a T^4 \end{aligned}$$

En este último término la integral está tabulada y su valor es 6.4938. Luego,

$$\begin{aligned} a &= \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \cdot 6.4938 \\ &= \frac{3.14159 \cdot (1.38 \cdot 10^{-23})^4}{(3 \cdot 10^8)^3 \cdot (6.625 \cdot 10^{-34})^3} \cdot 6.4938 \cdot \frac{J^4 \cdot K^{-4}}{m^3 s^{-3} J^3 s^3} \\ &= 7.55 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4} \end{aligned}$$

de manera que

$$E = 7.55 \cdot 10^{-16} T^4 \frac{J}{m^3}$$

Luego, la potencia por unidad de área se obtiene (un cálculo engorroso) como $P = \frac{1}{4}cE = \frac{1}{4}aT^4$, de manera que debería ser (y, efectivamente, es) $\frac{1}{4}ca = \sigma$.

- 5) Considerando al Sol como un cuerpo negro a una temperatura es de 5700 K. y radio de $7 \cdot 10^8$ m, calcular:

- La potencia total irradiada.
- La longitud de onda para la que la energía irradiada es máxima.
- La masa que pierde el sol por segundo.
- La fracción de la masa en reposo del sol que se pierde por año en forma de radiación electromagnética. (La masa del Sol es de $2 \cdot 10^{30}$ Kg.).
- La fracción de la potencia total que irradia en una banda de 100 Å centrada en el máximo.

Solución :

a) La potencia total irradiada por el sol será (A_S = área del sol)

$$\begin{aligned} P_S &= A_S \sigma T^4 \\ &= \pi R_S^2 \sigma T^4 \\ &= \pi (7 \cdot 10^8)^2 5.6693 \cdot 10^{-8} \cdot (5700)^4 \frac{J}{s} \\ &= 9.21 \cdot 10^{25} \frac{J}{s} \end{aligned}$$

b) Sabiendo que

$$\lambda_{max} T = 2.8978 \cdot 10^{-3} \text{mK}$$

resulta

$$\lambda_{max} = \frac{2.8978 \cdot 10^{-3} \text{mK}}{5700 \text{ K}} \simeq 508 \text{ nm}$$

c) La masa que pierde el solo está directamente relacionada la energía irradiada (equivalencia masa - energía en la teoría de la relatividad)

$$E = mc^2 \Rightarrow \Delta E = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow \Delta m = \frac{1}{c^2} \Delta E \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{P}{c^2}$$

de modo que

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{9.21 \cdot 10^{25} \frac{J}{s}}{(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2} = 1.02 \cdot 10^9 \frac{Kg}{s}$$

d) La masa perdida por el sol en un año será

$$M_1 = 1.02 \cdot 10^9 \frac{Kg}{s} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 3.217 \cdot 10^{16} \text{Kg}$$

lo cual representa, de la masa total, una fracción

$$\frac{M_1}{M} = \frac{3.217 \cdot 10^{16} \text{Kg}}{2 \cdot 10^{30} \text{Kg}} = 1.61 \cdot 10^{-14}$$

e) Sea $\Delta \lambda = 50 \overset{\circ}{\text{Å}}$. La potencia total radiada en una banda de longitudes de onda en torno a λ_{max} será

$$P = \int_{\lambda_{max} - \Delta \lambda}^{\lambda_{max} + \Delta \lambda} E(\lambda) d\lambda$$

Teniendo en cuenta que $\Delta \lambda = 50 \overset{\circ}{\text{Å}} = 5 \text{ nm} \ll 508 \text{ nm} = \lambda_{max}$, podemos aproximar la integral anterior a partir del teorema del valor medio

$$\int_{\lambda_{max} - \Delta \lambda}^{\lambda_{max} + \Delta \lambda} E(\lambda) d\lambda \simeq E(\lambda_{max}) \cdot 2 \cdot \Delta \lambda$$

La potencia total irradiada se puede calcular como

$$P_T = \sigma T^4$$

de manera que

$$\frac{P}{P_T} = \frac{E(\lambda_{max}) \cdot 2 \cdot \Delta \lambda}{\sigma T^4}$$

-
- 6) Se quiere emplear la energía solar y se dispone para ello de un calefactor solar cuyas placas colectoras tienen una superficie de 5m^2 y un coeficiente de absorción de 0.5 ¿Qué tiempo será necesario para elevar la temperatura de 10.000 l. de agua de un tanque de calefacción de 20 a 50°C ? Distancia Tierra - Sol $= 150 \cdot 10^6\text{ Km.}$; $T_{\text{Sol}} = 5700\text{K}$ y $R_{\text{Sol}} = 7 \cdot 10^8\text{m.}$

Solución :

La cantidad de calor Q que debe suministrarse al agua para cambiar su temperatura en $\Delta T = 50^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 30^\circ\text{C}$ es

$$Q = m_A c_A \Delta T$$

donde m_A es la masa de agua y $c_A = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{C}}$ es el calor específico del agua. La masa se calcula como $m_A = \rho_A \cdot V$, donde $\rho_A = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ es la densidad del agua y $V = 1000\text{ l} = 10\text{ m}^3$ es el volumen que ocupa. Así,

$$\begin{aligned} Q &= 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3} \cdot 10\text{ m}^3 \cdot 10\text{ m}^3 \cdot 30^\circ\text{C} = 3 \cdot 10^8 \text{cal} \\ &= 3 \cdot 10^8 \text{cal} \cdot 4.18 \frac{\text{J}}{\text{cal}} = 1.25 \cdot 10^9 \text{J} \end{aligned}$$

La energía por unidad de tiempo radiada por el sol, considerando a éste un cuerpo negro, es

$$\begin{aligned} P_S &= \sigma S_{\text{Sol}} T^4 = 4\pi R_{\text{Sol}}^2 T^4 \\ &= 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (7 \cdot 10^8)^2 \text{m}^2 \cdot 5700^4 \text{K}^4 \\ &= 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot 6.16 \cdot 10^{18} \text{m}^2 \cdot 1.06 \cdot 10^{11} \text{K}^4 \\ &\simeq 3.7 \cdot 10^{22} \text{W} \end{aligned}$$

A la distancia d en que está la tierra respecto del sol, la densidad superficial de potencia es

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \frac{P_S}{4 \cdot \pi \cdot d^2} = \frac{3.7 \cdot 10^{22} \text{W}}{4 \cdot \pi \cdot (150 \cdot 10^9)^2 \text{m}^2} \\ &= 0.13 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

de manera que la energía, por unidad de tiempo, que alcanza la placa solar (de área A_P) es

$$\begin{aligned} P_{PS} &= e \cdot \sigma_d \cdot A_P \\ &= 0.5 \cdot 0.13 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 5\text{ m}^2 \\ &= 0.33 \text{ W} \end{aligned}$$

Luego, el tiempo necesario para aumentar la temperatura del agua será

$$t = \frac{Q}{P_{PS}} = \frac{1.25 \cdot 10^9 \text{J}}{0.33 \frac{\text{J}}{\text{s}}} = 3.8 \cdot 10^9 \text{s}$$

-
- 7) Encontrar en que zonas del espectro se encuentran las longitudes de onda correspondientes a la densidad espectral máxima de radiación si la fuente es:

- a) El cuerpo humano.
 - b) Filamento de lámpara eléctrica $T = 3000\text{ K.}$
 - c) Superficie solar $T = 6000\text{ K.}$
 - d) Explosión nuclear $T = 10^7\text{ K.}$
-

- 8) La energía solar incidente en la superficie de la Tierra por unidad de área es de $0,485 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{min}}$ (1 cal. = 4,186 J). Calcule el número de fotones por m^2 por seg. suponiendo que todos tienen la longitud de onda correspondiente al máximo de emisión.

Solución :

Si la temperatura del sol es de 5700°K , el máximo de emisión está en $\lambda_{\text{max}} / T_{\text{Sol}} \lambda_{\text{max}} = b_{\text{Wien}}$ o bien

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2.9 \cdot 10^{-3} \text{m}^\circ\text{K}}{5700^\circ\text{K}} = 0.51 \cdot 10^{-6} \text{m}$$

de manera que

$$\nu_{\text{max}} = \frac{c}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.51 \cdot 10^{-6} \text{m}} = 5.88 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$$

Entonces, la energía de un fotón emitido por el sol es

$$\begin{aligned} E_f &= h\nu = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \cdot 5.88 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1} \\ &= 3.9 \cdot 10^{-19} \text{J} \end{aligned}$$

Por otro lado, la energía por unidad de tiempo que llega a la tierra es

$$\begin{aligned} E &= 0.485 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \text{min}} = 0.485 \frac{4.18}{10^{-4} 60} \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \\ &= 338 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \end{aligned}$$

De manera que el número de fotones, por metro cuadrado y segundo será

$$\frac{E}{E_f} = \frac{338 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}}}{3.9 \cdot 10^{-19} \text{J}} = 8.67 \cdot 10^{20} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$$

Efecto fotoeléctrico.

- 9) Describa el efecto fotoeléctrico ¿Que principio de conservación se aplica? ¿De que manera?

10)

- Determine la función trabajo del K si la máxima longitud de onda para lograr la emisión de electrones es de 562 nm.
- Si se ilumina la superficie del K con luz ultravioleta, de longitud de onda es de 250 nm. ¿Cuál es la máxima energía cinética de los electrones emitidos ?
- Si esta radiación tiene una intensidad de 1 W/m^2 , calcule el número de electrones emitidos por unidad de área y tiempo. (Suponga que el rendimiento fotónico es 1)

Solución :

- La energía cinética máxima con la que un electrón sale del material es $E_c = h\nu - \phi$, donde ϕ es la función trabajo del material, y siempre que $h\nu > \phi$ (en caso contrario, los electrones no salen del material). Cuando la frecuencia es mínima (o la longitud de onda la máxima), la energía cinética es cero y $h\nu = \phi$. Entonces,

$$\begin{aligned} \phi &= h\nu_{\text{min}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} \\ &= \frac{6.625 \cdot 10^{-34} 3 \cdot 10^8}{562 \cdot 10^{-9}} \frac{\text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m/s}}{\text{m}} \\ &\simeq 3.53 \cdot 10^{-19} \text{J} \\ &= \frac{3.53 \cdot 10^{-19} \text{J}}{1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 2.21 \text{ eV} \end{aligned}$$

b) La energía cinética máxima esta dada por

$$\begin{aligned}
 E_c &= h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi \\
 &= \frac{6.625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{250 \cdot 10^{-9}} \frac{J \cdot s \cdot m/s}{m} - 3.53 \cdot 10^{-19} J \\
 &= 4.41 \cdot 10^{-19} J \\
 &= 2.75 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

c) Si la intensidad es de $I = 1 \frac{W}{m^2}$, significa que $1 \frac{J/s}{m^2}$ es la energía por unidad de tiempo y área. Entonces, el número de fotones por unidad de tiempo y área será

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{I}{h\nu} = \frac{1 \frac{J/s}{m^2}}{6.625 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 250 \cdot 10^{-9} J} \\
 &= 1.26 \cdot 10^{18} \frac{1}{m^2 s}
 \end{aligned}$$

11) Un haz monocromático de radiación electromagnética tiene una intensidad de $1 W/m^2$. Calcular el número de fotones por unidad de tiempo y de superficie para:

a) Radiación de 100 eV

b) Radiación de 100 MeV

c) Suponiendo una eficiencia cuántica de 0.6, y que el haz de fotones interactúa con una lámina metálica de Ag, calcule en cada caso el número de electrones con los que se produce la interacción y calcular la cantidad de movimiento asociada a los electrones, asumiendo en ambos casos que sus energías cinéticas sean máximas.

Solución :

a) $100 \text{ eV} = 100 \text{ eV} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV} = 1.6 \cdot 10^{-17} J$, de manera que

$$N = \frac{1 \frac{J/s}{m^2}}{1.6 \cdot 10^{-17} J} = 6.24 \cdot 10^{16} \frac{1}{m^2 s}$$

El número de electrones emitidos, suponiendo que cada fotón 0.6 electrones libres, será

$$N_e = 0.6N = 3.75 \cdot 10^{16} \frac{1}{m^2 s}$$

La energía cinética máxima con la que salen del material será

$$\begin{aligned}
 E_c &= h\nu - \phi_{Ag} = \\
 &=
 \end{aligned}$$

b) $100 \text{ MeV} = 100 \cdot 10^6 \text{ eV} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV} = 1.6 \cdot 10^{-11} J$, de manera que

$$N = \frac{1 \frac{J/s}{m^2}}{1.6 \cdot 10^{-17} J} = 6.24 \cdot 10^{10} \frac{1}{m^2 s}$$

El número de electrones emitidos, suponiendo que cada fotón 0.6 electrones libres, será

$$N_e = 0.6N = 3.75 \cdot 10^{10} \frac{1}{m^2 s}$$

La energía cinética máxima con la que salen del material será

$$\begin{aligned}
 E_c &= h\nu - \phi_{Ag} = \\
 &=
 \end{aligned}$$

- 12) Cuando se ilumina cierta superficie metálica con luz de diferentes longitudes de onda se miden los siguientes potenciales de frenado:

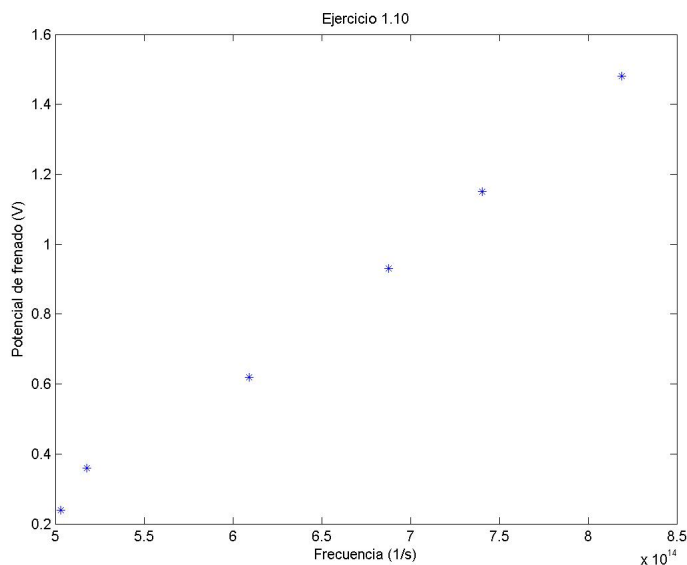
λ [$10^{-2}m$]	V[volt]
3.66	1.48
4.05	1.15
4.36	0.93
4.92	0.62
5.79	0.36
5.96	0.24

Represente el potencial de frenado en función de la frecuencia de la radiación incidente. Determine del gráfico:

- El umbral de frecuencia.
- La energía de arranque fotoeléctrico del metal.
- La razón h/e .

Solución :

El gráfico del potencial de frenado en función de la frecuencia ($\nu = c/\lambda$) es



- La energía potencial de frenado (E_V) es igual a la energía cinética máxima (E_c) con que los electrones salen del material: $E_V = E_c$.
Pero $E_V = eV$, donde e es la carga del electrón. Entonces, $V = \frac{E_c}{e}$.
Además,

$$E_c = \phi - h\nu \Rightarrow V = \frac{\phi - h\nu}{e}$$

o bien,

$$V = -\frac{h}{e}\nu + \frac{\phi}{e}$$

donde vemos que la relación V vs. ν es una recta cuya pendiente es la razón $-\frac{h}{e}$ y su ordenada al origen es $\frac{\phi}{e}$. El umbral de frecuencia es $\nu/V(\nu) = 0$. Tratamos de estimarlas a partir del gráfico.

Efecto Compton.

13) Describa el efecto Compton ¿Que picipios de conservación se aplican? ¿De que manera?

Solución :

Se aplican la conservación del momento y de la energía.

En el estado inicial tenemos la energía (E_f^i) y el momento (p_f^i) iniciales de fotón

$$E_f^i = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = p_f^i c \quad (14)$$

$$\mathbf{p}_f^i = \frac{c}{E_f^i} \hat{\mathbf{x}} = \frac{\lambda}{h} \hat{\mathbf{x}} \quad (15)$$

y del electrón

$$E_e^i = K_e + E_{0e} = E_{0e} = m_{0e} c^2 \quad (16)$$

$$\mathbf{p}_e^i = 0 \quad (17)$$

En el estado final tenemos la energía (E_f^f) y el momento (p_f^f) finales de fotón

$$E_f^f = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = p_f^f c \quad (18)$$

$$\mathbf{p}_f^f = \frac{c}{E_f^f} (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{\lambda'}{h} (\cos \theta, \sin \theta) \quad (19)$$

y del electrón

$$E_e^f = c \sqrt{(p_e^f)^2 + m_{0e}^2 c^2} \quad (20)$$

$$\mathbf{p}_e^f = p_e^f (\cos \varphi, -\sin \varphi) \quad (21)$$

Ahora planteamos la conservacion del momento, con (15) + (17) y (19) + (21) y de la energía, con (14) + (16) y (18) + (20)

$$\mathbf{p}_f^i = \mathbf{p}_f^f + \mathbf{p}_e^f \quad (22)$$

$$E_f^i + m_{0e} c^2 = E_f^f + c \sqrt{(p_e^f)^2 + m_{0e}^2 c^2} \quad (23)$$

De (22),

$$\mathbf{p}_e^f = \mathbf{p}_f^i - \mathbf{p}_f^f$$

y multiplico escalarmente cada miembro por si mismo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e^f \cdot \mathbf{p}_e^f &= (\mathbf{p}_f^i - \mathbf{p}_f^f) \cdot (\mathbf{p}_f^i - \mathbf{p}_f^f) \\ (p_e^f)^2 &= (p_f^i)^2 - 2\mathbf{p}_f^i \cdot \mathbf{p}_f^f + (p_f^f)^2 \\ &= (p_f^i)^2 - 2p_f^i p_f^f \cos \theta + (p_f^f)^2 \\ &= \left(\frac{E_f^i}{c}\right)^2 - 2\frac{E_f^i E_f^f}{c^2} \cos \theta + \left(\frac{E_f^f}{c}\right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} \left[(E_f^i)^2 - 2E_f^i E_f^f \cos \theta + (E_f^f)^2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

De (23):

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \left(E_f^i + m_{0e} c^2 - E_f^f \right) &= \sqrt{\left(p_e^f \right)^2 + m_{0e}^2 c^2} \\ \frac{1}{c^2} \left(E_f^i + m_{0e} c^2 - E_f^f \right)^2 &= \left(p_e^f \right)^2 + m_{0e}^2 c^2\end{aligned}$$

y despejo

$$\begin{aligned}\left(p_e^f \right)^2 &= \frac{1}{c^2} \left(E_f^i + m_{0e} c^2 - E_f^f \right)^2 - m_{0e}^2 c^2 \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\left(E_f^i \right)^2 + 2 E_f^i m_{0e} c^2 + m_{0e}^2 c^4 - 2 \left(E_f^i + m_{0e} c^2 \right) E_f^f + \left(E_f^f \right)^2 \right] - m_{0e}^2 c^2 \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\left(E_f^i \right)^2 + 2 E_f^i m_{0e} c^2 - 2 E_f^i E_f^f - 2 m_{0e} c^2 E_f^f + \left(E_f^f \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \left[\left(E_f^i \right)^2 + 2 m_{0e} c^2 \left(E_f^i - E_f^f \right) - E_f^i E_f^f + \left(E_f^f \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (25)$$

Igualando (24) y (25)

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \left[\left(E_f^i \right)^2 - 2 E_f^i E_f^f \cos \theta + \left(E_f^f \right)^2 \right] &= \frac{1}{c^2} \left[\left(E_f^i \right)^2 + 2 m_{0e} c^2 \left(E_f^i - E_f^f \right) - E_f^i E_f^f + \left(E_f^f \right)^2 \right] \\ - E_f^i E_f^f \cos \theta &= 2 m_{0e} c^2 \left(E_f^i - E_f^f \right) - E_f^i E_f^f \\ E_f^i E_f^f (1 - \cos \theta) &= m_{0e} c^2 \left(E_f^i - E_f^f \right) \\ \frac{1}{m_{0e} c^2} (1 - \cos \theta) &= \frac{E_f^i - E_f^f}{E_f^i E_f^f} = \frac{1}{E_f^f} - \frac{1}{E_f^i} \\ \frac{1}{m_{0e} c^2} (1 - \cos \theta) &= \frac{h}{E_f^f} - \frac{h}{E_f^i} = \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \\ \frac{1}{m_{0e} c} (1 - \cos \theta) &= \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu}\end{aligned}$$

o bien

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta)$$

donde $\lambda_C \equiv \frac{1}{m_{0e} c}$.

- 14)** Si la máxima energía comunicada a un electrón en una dispersión Compton es de 45 KeV. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón incidente?

Solución :

Cuando la transferencia de energía al electrón es máxima, la energía del fotón dispersado es mínima, de modo que su frecuencia es mínima y su longitud de onda (λ') es máxima. Entonces, buscamos λ' máxima a partir de

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta)$$

Esto se verificará cuando $\cos \theta = -1$, de manera que

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_C$$

donde

$$\lambda' = \frac{c}{\nu'} = \frac{ch}{E_f^f} = 2.7551 \cdot 10^{-11} \text{m}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda' - 2\lambda_C = 2.7551 \cdot 10^{-11} \text{m} - 2.42 \cdot 10^{-12} \text{m} \\ &= 2.2711 \cdot 10^{-11} \text{m}\end{aligned}$$

15) En una experiencia de dispersión de Compton:

- a) ¿Qué fotones deberán usarse para que la variación máxima de la longitud de onda debida a la dispersión Compton por los electrones sea 1%?
- b) Usando estos fotones, Cuánto vale $\Delta\lambda$ en nm para los fotones dispersados a 60° ?
- c) ¿Cuál es la energía de los electrones en ambos casos? Calcule en este caso el porcentaje de la variación de la longitud de onda.

Solución :

- a) La variación de la longitud de onda está dad por

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta)$$

Esta será máxima cuando

$$1 - \cos \theta = 2$$

o $\cos \theta = -1$ y por lo tanto $\theta = \pi$.

La variación máxima debe ser 1% de la longitud de onda incidente, o sea,

$$\begin{aligned}(\lambda' - \lambda)_{MAX} &= 0.01\lambda \\ 2\lambda_C &= 0.01\lambda\end{aligned}$$

de modo que $\lambda = 200\lambda_C$.

- b) Tenemos

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda_C (1 - \cos \theta) \\ &= \lambda_C \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

16) En una experiencia Compton se detectó al fotón y electrón dispersados. Se encontró que la energía cinética del electrón era de 75 KeV y la del fotón de 200 KeV.

- a) Calcule la longitud de onda de la radiación incidente.
- b) Calcule el ángulo de dispersión para el fotón y el electrón, ambos medidos respecto de la línea de incidencia.
- c) Calcule la cantidad de movimiento del electrón dispersado.

Solución :

- a) La conservación de la energía en la experiencia de Compton es

$$\begin{aligned}E_f^i + m_0 c^2 &= E_f^f + E_{ce}^f + m_0 c^2 \\ E_f^i &= E_f^f + E_{ce}^f \\ E_f^i &= 75 \text{ KeV} + 200 \text{ KeV} \\ &= 275 \text{ KeV}\end{aligned}$$

o bien

$$\frac{hc}{\lambda} = 275 \text{ KeV}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{hc}{275 \text{ KeV}} = \frac{6.625 \cdot 10^{-34} \text{Joul}\cdot\text{s} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{275 \text{ KeV} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Joul}}{\text{eV}}} \\ &= 4.5084 \cdot 10^{-12} \text{m}\end{aligned}$$

Entonces, el momento inicial del fotón es

$$\mathbf{p}_f^i = \frac{\lambda}{h} \hat{\mathbf{x}} = 1.4695 \cdot 10^{-22} \frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{s}} \hat{\mathbf{x}}$$

La componente x de momneto final debe ser ingual al momento inicial de fotón, para conservar el momento

$$p_x^f = p_{fx}^f + p_{ex}^f$$

donde

$$p_{fx}^f = p_f^f \cos \theta = \frac{E_f^f}{c} \cos \theta$$

y

$$p_{ex}^f = p_e^f \cos \varphi$$

Se obtiene p_e^f a partir de la energia total final de electrón

$$E_e^f = c \sqrt{\left(p_e^f\right)^2 + m_{0e}^2 c^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}p_e^f &= \sqrt{\left(\frac{E_e^f}{c}\right)^2 - m_{0e}^2 c^2} = \sqrt{\left(\frac{E_{ce}^f + m_{0e} c^2}{c}\right)^2 - m_{0e}^2 c^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{E_{ce}^f}{c}\right)^2 - 2E_{ce}^f m_{0e} c} \\ &= 2.5017 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}\end{aligned}$$