

Física III A - Guía N° 0

Propagación de Ondas y Electromagnetismo

March 10, 2009

-
1. La ecuación diferencial de la onda en medios lineales es:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

Verifique que cualquier función real o compleja de la forma $y = f(x \pm vt)$ satisface la ecuación (1).

Solución :

Sea $y(x, t) = f(x \pm vt)$, entonces,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

donde $z = x \pm vt$, de manera que $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

Luego,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial z}$$

de modo que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial z} \right) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

de manera que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

-
2. Demuestre que una perturbación de la forma: $E(x, t) = E(x) e^{-i\omega t}$ satisface

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = -k^2 E(x)$$

donde k y ω son constantes.

Solución:

Dado que $E(x, t)$ satisface la ecuación de onda, se cumple

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde, por otro lado,

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} = e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} \quad (2)$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} &= E(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i\omega t}) \\ &= -\omega^2 E(x) e^{-i\omega t}\end{aligned}\quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) resulta

$$e^{-i\omega t} \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} E(x) e^{-i\omega t}$$

o bien

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} = -k^2 E(x)$$

donde $k = \omega/v$.

3. Pruebe que una onda esférica $\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr \pm \omega t)}$ satisface a la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \psi(r, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

Donde la dependencia radial del operador laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 \psi(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

Solución:

Veamos cada lado de la igualdad en la ecuación de onda.

En el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi(r, t) &= e^{\pm i\omega t} \nabla^2 \left(\frac{A}{r} e^{ikr} \right) \\ &= e^{\pm i\omega t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} e^{ikr} \right) \right] \\ &= e^{\pm i\omega t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-\frac{A}{r^2} e^{ikr} + \frac{ikA}{r} e^{ikr} \right) \right] \\ &= e^{\pm i\omega t} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [A e^{ikr} (-1 + ikr)] \\ &= e^{\pm i\omega t} \frac{1}{r^2} (-k^2 r A e^{ikr}) \\ &= -\frac{k^2 A}{r} e^{i(kr \pm \omega t)}\end{aligned}\quad (4)$$

Y en el lado derecho

$$\begin{aligned}\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{A}{r} e^{ikr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{\pm i\omega t}) \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{A}{r} e^{ikr} (\pm i\omega)^2 \\ &= -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \frac{A}{r} e^{ikr}\end{aligned}\quad (5)$$

Comparando (4) y (5) vemos que se verifica la ecuación de onda con $k = \omega/v$.

4. Demuestre que $Y(x, t) = Y_m \sin(kx - \omega t)$ puede escribirse también de alguna de las maneras siguientes:

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= Y_m \sin[k(x - vt)] \\ Y(x, t) &= Y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right] \\ Y(x, t) &= Y_m \sin\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] \\ Y(x, t) &= Y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \end{aligned}$$

Primero veamos las definiciones de λ (longitud de onda) y T (período) y como pueden expresarse a partir de los restantes parámetros de la onda.

La longitud de onda λ es tal que $Y(x + \lambda, t) = Y(x, t)$, o bien, $Y_m \sin[k(x + \lambda) - \omega t] = Y_m \sin(kx - \omega t + 2\pi)$ de donde resulta

$$k\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

El período es análogo a la longitud de onda, pero en el tiempo. O sea, T es tal que $Y(x, t + T) = Y(x, t)$, o bien, $Y_m \sin[kx - \omega(t + T)] = Y_m \sin(kx - \omega t + 2\pi)$, de donde resulta

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(a) -

$$\begin{aligned} Y_m \sin(kx - \omega t) &= Y_m \sin\left[k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right] \\ &= Y_m \sin[k(x - vt)] \end{aligned}$$

(b) -

$$\begin{aligned} Y_m \sin(kx - \omega t) &= Y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \\ &= Y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \\ &= Y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right] \end{aligned}$$

donde $f \equiv 1/T$ es la frecuencia.

(c) -

$$\begin{aligned} Y_m \sin(kx - \omega t) &= Y_m \sin\left[\omega\left(\frac{k}{\omega}x - t\right)\right] \\ &= Y_m \sin\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] \end{aligned}$$

(d) Hecho en (b).

5. Determine en cada caso la frecuencia, f , el período, T , la amplitud, Y_m , la longitud de onda, λ , y el sentido de propagación de las siguientes funciones de onda:

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= 4 \sin[2(0.2x + 3t)] \\ Y(x, t) &= 2.5 \sin(7x + 3.5t) \end{aligned}$$

Solución:

- (a) $Y(x, t) = 4 \sin [2(0.2x + 3t)] = 4 \sin (0.4x + 6t)$ de manera que $Y_m = 4$, $k = 0.4$, $\omega = 6$ y $v = \omega/k = 15$. Se desplaza hacia la izquierda.
- (b) $Y(x, t) = 2.5 \sin (7x + 3.5t)$ de manera que $Y_m = 2.5$, $k = 7$, $\omega = 3.5$ y $v = \omega/k = 0.5$. Se desplaza hacia la izquierda.

6. Una onda de frecuencia 500Hz. tiene una velocidad de fase de 350m/seg.

- (a) ¿Qué distancia hay entre dos puntos que tienen una diferencia de fase de 60° ?
- (b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos que ocurren en cierto punto con un intervalo de 1s?

Solución :

- (a) Si dos puntos de una onda están separados espacialmente por Δx y tienen una diferencia de fase de $\pi/3$ significa que

$$[k(x + \Delta x) - \omega t] - (kx - \omega t) = \pi/3$$

de donde

$$k\Delta x = \pi/3$$

o bien

$$\Delta x = \frac{\pi/3}{k}$$

Como

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}$$

resulta

$$k = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi 500}{350} \text{m}^{-1} = \frac{20}{7} \pi \text{m}^{-1}$$

de manera que

$$\Delta x = \frac{\pi/3}{20\pi/7} \text{m} = \frac{7}{60} \text{m}$$

- (b) De forma análoga, pero en el tiempo

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= [kx - \omega(t + 1s)] - (kx - \omega t) \\ &= -\omega 1s \\ &= -1000\pi \end{aligned}$$

7. Halle la resultante de la superposición de ondas, $Y_1(x, t)$ e $Y_2(x, t)$, utilizando notación compleja (fasores). Interprete.

(a) $Y_1(x, t) = Y_0 \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)$ e $Y_2(x, t) = Y_0 \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$.

(b) $Y_1(x, t) = Y_0 \cos(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi_1)$ e $Y_2(x, t) = Y_0 \cos(k \cdot x - \omega \cdot t + \varphi_2)$.

(c) $Y_1(x, t) = Y_0 \cos[2\pi f_1(\frac{x}{v} - t)]$ e $Y_2(x, t) = Y_0 \cos[2\pi f_2(\frac{x}{v} - t)]$ donde $f_1 = f_2 + \delta f$, con $\delta f \ll f_2$.

Solución :

(a) -

$$\begin{aligned}
Y_1(x, t) + Y_2(x, t) &= Y_0 \cos(kx + \omega t) + Y_0 \cos(kx - \omega t) \\
&= \operatorname{Re} \left\{ Y_0 e^{i(kx + \omega t)} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ Y_0 e^{i(kx - \omega t)} \right\} \\
&= Y_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(kx + \omega t)} + e^{i(kx - \omega t)} \right\} \\
&= Y_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{ikx} [e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}] \right\} \\
&= Y_0 \operatorname{Re} \left\{ [\cos(kx) + i \sin(kx)] [2 \cos(\omega t)] \right\} \\
&= 2Y_0 \cos(kx) \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

una onda estacionaria.

(b) -

$$\begin{aligned}
Y_1(x, t) + Y_2(x, t) &= Y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) + Y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2) \\
&= \operatorname{Re} \left\{ Y_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi_1)} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ Y_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi_2)} \right\} \\
&= Y_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(kx - \omega t)} [e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}] \right\}
\end{aligned}$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2} - \frac{\varphi_2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} &= e^{i\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)} \left[e^{i\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{-i\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} \right] \\
&= 2 \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) e^{i\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}
\end{aligned}$$

con lo cual tendemos

$$\begin{aligned}
Y_1(x, t) + Y_2(x, t) &= Y_0 \operatorname{Re} \left\{ 2 \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) e^{i(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2})} \right\} \\
&= 2Y_0 \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \cos \left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)
\end{aligned}$$

Vemos que resulta una amplitud $2Y_0 \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$ que depende de la diferencia de fase entre las dos ondas. Para $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = n\pi$ esta amplitud será máxima en módulo (interferencia constructiva). Para $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = m\frac{\pi}{2}$ se anulará (interferencia destructiva).

(c) Sean las ondas que se superponen

$$\begin{aligned}
Y_1(x, t) &= Y_m \sin(kx - \omega t) \\
Y_2(x, t) &= Y_m \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t - \varphi]
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
Y_1(x, t) + Y_2(x, t) &= Y_m \sin(kx - \omega t) + Y_m \sin[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t - \varphi] \\
&= Y_m \operatorname{Im} \left\{ e^{i(kx - \omega t)} + e^{i[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t - \varphi]} \right\}
\end{aligned}$$

Para simplificar la notación, llamo $k' = k + \Delta k$ y $\omega' = \omega + \Delta\omega$.
Podemos escribir

$$\begin{aligned}
 kx - \omega t &= \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2} + \frac{k'}{2} - \frac{k'}{2} \right) x - \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2} - \frac{\omega'}{2} \right) t + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \\
 &= \left(\frac{k+k'}{2} \right) x - \left(\frac{\omega+\omega'}{2} \right) t + \frac{\varphi}{2} + \\
 &\quad \left(\frac{k-k'}{2} \right) x - \left(\frac{\omega-\omega'}{2} \right) t - \frac{\varphi}{2} \\
 &= \alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2} + \alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{k+k'}{2} \\
 \alpha_2 &= \frac{k-k'}{2} = -\frac{\Delta k}{2} \\
 \beta_1 &= \frac{\omega+\omega'}{2} \\
 \beta_2 &= \frac{\omega-\omega'}{2} = -\frac{\Delta\omega}{2}
 \end{aligned}$$

y de la misma forma

$$\begin{aligned}
 k'x - \omega't - \varphi &= \left(\frac{k'}{2} + \frac{k'}{2} + \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \right) x - \left(\frac{\omega'}{2} + \frac{\omega'}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2} \right) t - \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2} \\
 &= \left(\frac{k'+k}{2} \right) x - \left(\frac{\omega'+\omega}{2} \right) t - \frac{\varphi}{2} + \\
 &\quad \left(\frac{k'-k}{2} \right) x - \left(\frac{\omega'-\omega}{2} \right) t - \frac{\varphi}{2} \\
 &= \alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2} - \alpha_2 x - \beta_2 t + \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 e^{i(kx-\omega t)} + e^{i[(k+\Delta k)x-(\omega+\Delta\omega)t-\varphi]} &= e^{i(\alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2} + \alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2})} + e^{i(\alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2} - \alpha_2 x + \beta_2 t + \frac{\varphi}{2})} \\
 &= e^{i(\alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2})} \left[e^{i(\alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2})} + e^{-i(\alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2})} \right] \\
 &= e^{i(\alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2})} 2 \cos \left(\alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 Y_1(x, t) + Y_2(x, t) &= Y_m \operatorname{Im} \left\{ e^{i(\alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2})} 2 \cos \left(\alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \\
 &= 2Y_m \sin \left(\alpha_1 x - \beta_1 t + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\alpha_2 x - \beta_2 t - \frac{\varphi}{2} \right) \\
 &= 2Y_m \sin \left[\left(\frac{k+k'}{2} \right) x - \left(\frac{\omega+\omega'}{2} \right) t + \frac{\varphi}{2} \right] \cos \left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t + \frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

8. Para una onda electromagnética plana, los módulos de los campos eléctrico, E , y magnético, B , están relacionados por $E = cB$, donde c es la velocidad de la luz

(a) Muestre que la densidad de energía de la onda viene dada por $\epsilon_0 E^2$.

(b) El flujo de energía (W/m^2) queda expresado como $c\epsilon_0 E^2$.

Solución :

(a) La densidad de energía de un campo electromagnético está dada, en el vacío, por

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{r}, t) &= u_E(\mathbf{r}, t) + u_B(\mathbf{r}, t) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{E^2}{c^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} E^2 \left(\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} \mu_0 \epsilon_0 \right) \\
 &= \epsilon_0 E^2 \\
 &= \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)
 \end{aligned}$$

ya que $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

El flujo de energía está determinado por el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

dado que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son ortogonales entre si y respecto de la dirección de propagación $\hat{\mathbf{k}}$, resulta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} E(\mathbf{r}, t) B(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} E(\mathbf{r}, t) \frac{1}{c} E(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \frac{1}{\mu_0} E(\mathbf{r}, t) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} E^2(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \epsilon_0 c E^2(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} = cu \hat{\mathbf{k}}
 \end{aligned}$$

9. La densidad de cantidad de movimiento para una onda electromagnética puede escribirse como: $\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Muestre que la densidad de energía es igual a pc para una onda plana.

Solución : de acuerdo a lo visto en el ejercicio anterior,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\
 &= \epsilon_0 E(\mathbf{r}, t) \frac{1}{c} E(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \frac{1}{c} \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}} \\
 &= \frac{1}{c} u(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{k}}
 \end{aligned}$$

de modo que $u(\mathbf{r}, t) = c \cdot p(\mathbf{r}, t)$.

Se puede notar también que $\mathbf{p} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{\mu_0} \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$

10. Demuestre que la presión de radiación para una onda electromagnética plana es igual al flujo de energía dividido por la velocidad de la luz.

Solución :

Si la pared sobre la cual incide la onda es perfectamente absorbente, toda la cantidad de movimiento de la onda se transfiere a la pared. Tenemos que calcular la cantidad de movimiento Δp transferida a la pared durante un tiempo Δt . Dado que la onda transporta una densidad de cantidad de movimiento p y se desplaza a la velocidad de la luz c , la cantidad de movimiento transferida por la onda a la pared durante Δt será la cantidad de movimiento contenida en un volumen $cA\Delta t$ donde A es el área transversal a la dirección de propagación de la onda. Así,

$$\begin{aligned}\Delta p &= c \cdot A \cdot \Delta t \cdot p \\ &= c \cdot A \cdot \Delta t \cdot \frac{u}{c} \\ &= A \cdot \Delta t \cdot u \\ &= A \cdot \Delta t \cdot \frac{S}{c}\end{aligned}$$

de manera que la presión será

$$P = \frac{1}{A} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{S}{c}$$

Si la pared es reflectante, se tendrá una cantidad de movimiento igual a la incidente desplazándose en sentido contrario. Entonces, para conservar la cantidad de movimiento, el doble de la cantidad de movimiento incidente debe ahora aparecer en la pared, de donde $P = 2\frac{S}{c}$.