



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

Año 2011 - 2^{do} Cuatrimestre

FÍSICA II A (62.03)

DOCENTE: Eduardo Margonari

TRABAJO PRÁCTICO DE LABORATORIO Nº2

TÍTULO: Capacitor variable de placas plano paralelas

FECHA: Jueves 27/10/2011

INTEGRANTES:

Francisco Ferrari Bihurriet - # 92.275
<franferra_09_90@hotmail.com>

Maximiliano Nahuel Rinaldi - # 91.825
<mrinaldi@fi.uba.ar>

Diego Robledo - # 89.200
<robledo.diego@yahoo.com>

Germán Guzelj - # 92.037
<german.guzelj@gmail.com>

Mauro Santángelo - # 90.322
<maurosantangelo@gmail.com>

Objetivos:

En este trabajo práctico se quiere determinar la variación de la capacidad de un condensador de placas paralelas circulares con la separación entre placas. Se compararán para ello valores experimentales con los obtenidos a través de distintos modelos teóricos. Así se determinará la influencia de la geometría y del instrumento de medición en los resultados obtenidos.

Introducción:

Capacitor: Decimos que el capacitor es un dispositivo que almacena energía eléctrica. Está formado por un par de superficies conductoras, llamadas placas o armaduras, separadas por un material dieléctrico (o vacío) conformando lo que se conoce como *Sistema de Influencia Total*. La principal característica de este sistema es que la suma total de las cargas almacenadas es nula y que todas las líneas de campo eléctrico que parten de una placa van a parar a la otra.

Capacitor de placas plano paralelas, modelos teóricos:

❖ Modelo elemental (sin correcciones) [C_0]

En la electrostática elemental la capacidad de un capacitor de este tipo se calcula despreciando los efectos de borde, suponiendo al campo eléctrico como uniforme (placas planas infinitas) y confinado en el espacio del dieléctrico. Además es despreciado el espesor de las placas. En este modelo la capacidad está dada por:

$$C_0 = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{\pi \cdot R^2}{d}$$

Donde $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$; A : área de las placas; R : radio de las placas; d : separación entre las placas.

❖ Modelo con corrección por finitud de las placas [$C^\&$]

A partir del modelo teórico de Kirchhoff, que incluye correcciones en la capacidad debidas a la finitud de las placas y el espesor de las mismas, se desprende que la capacidad con la corrección debida sólo a la finitud de las placas está dada por (ver desarrollo del problema 4 (*)):

$$C^\& = \varepsilon \cdot R \left[\pi \frac{R}{d} - 1 + \ln \left(16\pi \frac{R}{d} \right) \right]$$

❖ Modelo con corrección por finitud y espesor de las placas [C^*]

El mencionado modelo de Kirchhoff, que incluye correcciones debidas a la finitud de las placas y el espesor de las mismas, la capacidad está dada por:

$$C^* = \varepsilon \left[\pi \frac{R^2}{d} - R + \frac{4\pi \cdot R \cdot \delta \cdot \ln \left(1 + \frac{d}{\delta} \right)}{d} + R \cdot \ln \left(16\pi R \left(\frac{1 + \frac{\delta}{d}}{d} \right) \right) \right]$$

Donde se añade δ : espesor de las placas.

Relación entre las capacidades y los potenciales en los bornes: Como en la experiencia no se contó con un instrumento capaz de medir capacidades directamente, sino con un *electrómetro*, sólo se pudo medir diferencias de potencial entre las placas del capacitor. Así, nunca se pudo conocer la capacidad absoluta del condensador, sino que se estableció la capacidad relativa a un valor de capacidad fijo, tomado en éste caso a una separación $d = 5 \text{ mm}$. Esto se logró mediante la siguiente conclusión:

En los capacitores, la capacidad se relaciona con la carga almacenada y la diferencia de potencial entre los bornes de la siguiente manera: $Q = C \cdot V$

Como el experimento se realizó cargando el capacitor y luego desconectándolo de la fuente, se concluye que se realizó a carga constante: $Q = cte.$

Entonces para dos capacidades distintas: $Q = cte. = C_1 \cdot V_1 = C_2 \cdot V_2$

De allí se desprende que: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1}$

Por lo tanto, para una distancia d , en referencia a 5 mm, la relación anterior se expresa: $\frac{C(d)}{C(5 \text{ mm})} = \frac{V(5 \text{ mm})}{V(d)}$

Pero teniendo en cuenta la capacidad de entrada del instrumento (C_{entrada}), que estaba en paralelo con la del capacitor del experimento (C), y por lo tanto se suma directamente, resulta que:

$$\frac{C(d) + C_{\text{entrada}}}{C(5 \text{ mm}) + C_{\text{entrada}}} = \frac{V(5 \text{ mm})}{V(d)}$$

Desarrollo:

Banco de medición:

Los materiales que hemos utilizado durante la experiencia son los siguientes:

- Electrómetro
- Capacitor de placas plano paralelas cilíndricas, de 10 cm de radio y 6 mm de espesor, montado sobre un riel corredizo, graduado con una escala milimétrica de la separación entre placas.
- Fuente de alimentación de corriente continua, con voltaje regulable.

En el desarrollo del presente trabajo práctico, lo que se ha hecho es conectar el capacitor al electrómetro, colocar las placas a una distancia de 5 mm y cargarlo a cierta diferencia de potencial, conectando sus bornes a la fuente de corriente continua. Luego, desconectando la fuente, se tomaron mediciones de la diferencia de potencial entre sus bornes, para diferentes separaciones entre placas. Esto se repitió con diferentes potenciales iniciales, cambiando la graduación del voltaje de la fuente cuando se conectaba con la separación a 5 mm. Así se logró obtener varias series de potenciales en función de la separación entre placas, tomados a carga constante.

Luego de obtenidos todos los datos, se realizaron los cálculos de las capacidades relativas teóricas para compararlas con las capacidades relativas experimentales, que son la inversa de los potenciales medidos, como lo expresa la ecuación al final de la introducción.

Se presenta la resolución de los problemas antes del procesamiento de datos porque allí se encuentran algunos pasos previos, muy útiles para la labor posterior.

Problemas:

Problema 1: Un capacitor plano vacío de $C = 0.2 \mu\text{F}$ tiene sus placas separadas 1 mm y está conectado a una batería de 10 V.

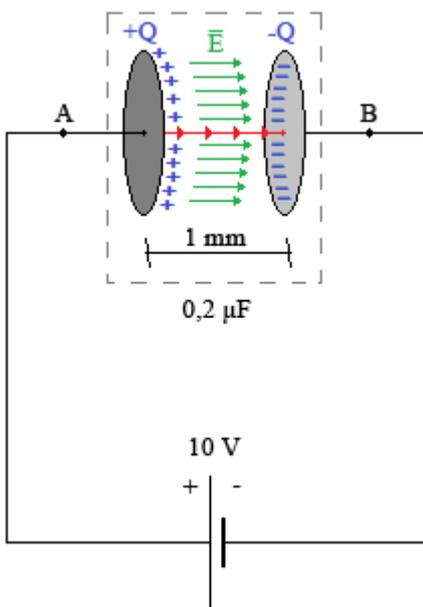
a) Calcular la carga sobre las placas, el valor del campo eléctrico y la energía eléctrica almacenada dentro del capacitor.

b) Repetir los cálculos de a) si se duplica la separación entre placas con la batería conectada.

c) Repetir los cálculos de a) si se duplica la separación entre placas, con la batería desconectada.

a) Carga sobre las placas: $Q_a = C_a \cdot V_a = 0,2 \mu\text{F} \cdot 10 \text{ V} = \boxed{2 \mu\text{C} = Q_a}$

Valor del campo eléctrico: Considerando al campo como uniforme en el interior del capacitor, con dirección perpendicular a las placas, y sentido hacia la placa de menor potencial:



$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_a$$

Para hacer la circulación desde A hasta B, se puede seguir la recta indicada en rojo, en donde $\vec{E} \parallel d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = |\vec{E}| d\ell$.

Además como el campo es considerado uniforme (constante) puede ser sacado de la integral, por lo que: $V_a = |\vec{E}| \int_A^B d\ell$.

Y $\int_A^B d\ell$ no es más que la medida del camino rojo, que es la separación entre placas, entonces: $V_a = |\vec{E}| d$.

Resultando: $|\vec{E}_a| = \frac{V_a}{d_a} = \frac{10 \text{ V}}{0,001 \text{ m}} = \boxed{10000 \text{ V/m} = |\vec{E}_a|}$

Energía eléctrica almacenada:

$$W_a = \frac{1}{2} C_a V_a^2 = \frac{1}{2} 0,2 \mu\text{F} (10 \text{ V})^2 = \boxed{10 \mu\text{J} = W_a}$$

b) Batería conectada implica $V = cte. \Rightarrow V_a = V_b$. Los capacitores se consideran ideales.

El área de las placas permanece constante. Luego, las capacidades en a) y b) son:

$$C_a = \epsilon_0 \frac{A}{d_a}; C_b = \epsilon_0 \frac{A}{2.d_a} \Rightarrow C_b = \frac{1}{2} C_a = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \mu\text{F} = 0,1 \mu\text{F}$$

Carga sobre las placas: $Q_b = C_b \cdot V_b = \frac{1}{2} Q_a = \boxed{1 \mu\text{C} = Q_b}$

Valor del campo eléctrico: Del análisis hecho en a): $|\vec{E}_b| = \frac{V_b}{2.d_a} = \frac{1}{2} |\vec{E}_a| = \boxed{5000 \text{ V/m} = |\vec{E}_b|}$

Energía eléctrica almacenada: $W_b = \frac{1}{2} C_b V_b^2 = \frac{1}{2} W_a = \boxed{5 \mu\text{J} = W_b}$

c) Batería desconectada implica $Q = cte. \Rightarrow Q_a = Q_c$. Ídem b): $C_c = \frac{1}{2} C_a \Rightarrow V_c = \frac{Q_c}{C_c} = \frac{Q_a}{\frac{1}{2} C_a} = 2V_a$

Carga sobre las placas: $Q_c = Q_a = \boxed{2 \mu\text{C} = Q_c}$

Valor del campo eléctrico: $|\vec{E}_c| = \frac{V_c}{2.d_a} = \frac{2V_a}{2.d_a} = |\vec{E}_a| = \boxed{10000 \text{ V/m} = |\vec{E}_c|}$

Energía eléctrica almacenada: $W_c = \frac{1}{2} C_c V_c^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} C_a (2V_a)^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} C_a \cdot 4 \cdot V_a^2 = 2W_a = \boxed{20 \mu\text{J} = W_c}$

Problema 2: ¿Cuál es el significado de cada una de las cantidades en $V = Q/C$? Si se conecta un capacitor plano a una tensión constante de 10V y se varía la separación entre placas, ¿cambia Q?

V es la diferencia de potencial (en módulo) establecida entre los bornes del capacitor.

Q es la carga almacenada en las placas, la placa de mayor potencial se cargará con +Q y la de menor lo hará con -Q.

C es la denominada *capacidad* del capacitor, es la constante de la proporcionalidad: $Q \propto V$ y depende de las características constructivas del capacitor, es decir, la geometría del sistema y el material dieléctrico utilizado.

Sí, si se conecta a una tensión constante V, al variar la separación entre las placas se está modificando la geometría del sistema y en consecuencia C, por lo que para que se satisfaga la relación existente es necesario que varíe la carga Q almacenada en las placas.

Problema 3: ¿Qué ocurre si, en cambio, se conecta sólo por un instante la fuente de 10V y después de desconectarla se varía la separación entre placas? Justificar.

En ese caso se estará trabajando a carga Q constante, ya que las cargas en las placas del capacitor no pueden moverse hacia ninguna parte. Nuevamente, al variar la separación entre placas varía C, por lo que la diferencia de potencial V establecida entre los bornes se verá afectada, satisfaciendo la relación existente.

Problema 4: Demostrar a partir de la ec.(1) las ecuaciones (2) y (3). ¿Cuáles son las unidades de cada cantidad? Hacer un esquema cualitativo del campo eléctrico y las líneas equipotenciales en un capacitor real.

$$C^* = \varepsilon \left[\pi \frac{R^2}{d} - R + \frac{4\pi \cdot R \cdot \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right)}{d} + R \cdot \ln\left(16\pi R \left(\frac{1 + \frac{\delta}{d}}{d}\right)\right) \right] \quad (1)$$

$$\frac{C^{\&}}{C_0} = f^{\&} = 1 + \frac{1}{\pi R} \left[-1 + \ln\left(16\pi \frac{1}{d}\right) \right] \quad (2)$$

$$\frac{C^*}{C_0} = f^* = 1 + \frac{1}{\pi R} \left[-1 + \ln\left(16\pi \frac{(1 + \delta/d)}{d}\right) + 4\pi \delta/d \ln\left(1 + d/\delta\right) \right] \quad (3)$$

Ecuación (2)

$C^{\&}$ es la capacidad considerando sólo la corrección por finitud de las placas, y sin tener en cuenta que las mismas tienen un espesor δ . Por lo que para hallar $C^{\&}$ se deberá tomar el límite cuando δ tiende a 0 en la expresión de C^* . Así:

$$C^{\&} = \lim_{\delta \rightarrow 0} C^* = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon \left[\underbrace{\pi \frac{R^2}{d} - R}_{\rightarrow \pi \frac{R^2}{d} - R} + \underbrace{\frac{4\pi \cdot R \cdot \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right)}{d}}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ (Indeterminación "0.\infty")}}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{R \cdot \ln\left(16\pi R \left(\frac{1 + \frac{\delta}{d}}{d}\right)\right)}_{\rightarrow R \ln\left(16\pi \frac{R}{d}\right)} \right]$$

Salvando la indeterminación "0. ∞": $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4\pi \cdot R \cdot \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right)}{d} = \left(\frac{4\pi \cdot R}{d}\right) \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right) = 0$
→ 0 (Resuelto debajo)

Sea $\alpha = \frac{1}{\delta}$, si $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow \infty \therefore \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+d\alpha)}{\alpha} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d\alpha} \ln(1+d\alpha)}{\frac{d}{d\alpha} \alpha} = \right.$
 $\left. = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} d + d\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} d + d\alpha \rightarrow \infty = 0 \right.$

Finalmente:

$$C^{\&} = \lim_{\delta \rightarrow 0} C^* = \varepsilon \left[\pi \frac{R^2}{d} - R + R \ln\left(16\pi \frac{R}{d}\right) \right] = \boxed{\varepsilon \cdot R \left[\pi \frac{R}{d} - 1 + \ln\left(16\pi \frac{R}{d}\right) \right]} = C^{\&} \quad (*)$$

Ahora resta hacer $C^{\&}/C_0$:

$$\frac{C^{\&}}{C_0} = f^{\&} = \frac{\varepsilon \cdot R \left[\pi \frac{R}{d} - 1 + \ln\left(16\pi \frac{R}{d}\right) \right]}{\frac{\varepsilon \cdot \pi \cdot R^2}{d}} = \frac{d}{\pi \cdot R} \left[\pi \frac{R}{d} - 1 + \ln\left(16\pi \frac{R}{d}\right) \right] = \boxed{1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{R} \left[-1 + \ln\left(16\pi \frac{R}{d}\right) \right]} = f^{\&}$$

Ecuación (3)

Hay que hacer C^*/C_0 :

$$\frac{C^*}{C_0} = f^* = \frac{\varepsilon \left[\pi \frac{R^2}{d} - R + \frac{4\pi \cdot R \cdot \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right)}{d} + R \cdot \ln\left(16\pi R \left(\frac{1 + \frac{d}{\delta}}{d}\right)\right) \right]}{\frac{\varepsilon \cdot \pi \cdot R^2}{d}} = \frac{d}{\pi \cdot R^2} \left[\pi \frac{R^2}{d} - R + \frac{4\pi \cdot R \cdot \delta \cdot \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right)}{d} + R \cdot \ln\left(16\pi R \left(\frac{1 + \frac{d}{\delta}}{d}\right)\right) \right] =$$

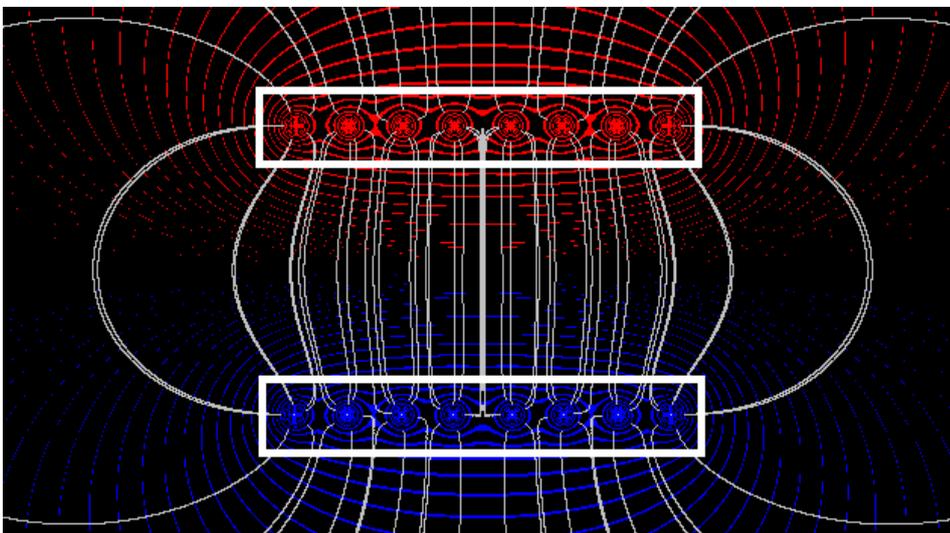
$$= \boxed{1 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{R} \left[-1 + 4\pi \frac{\delta}{d} \ln\left(1 + \frac{d}{\delta}\right) + \ln\left(16\pi R \left(\frac{1 + \frac{d}{\delta}}{d}\right)\right) \right]} = f^*$$

Que no es más que la ecuación (3), ordenada de otra manera, los últimos términos del corchete están invertidos, y el segundo término logarítmico tiene a R introducido en el denominador, seguramente para aprovechar que ya aparece d/R anteriormente.

Unidades:

$[C_0] = [C^{\&}] = [C^*] = F$ (Farad); $[R] = [d] = [\delta] = m$ (metro); $[A] = m^2$; $[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = F/m$
 $[\varepsilon_r], [f^{\&}], [f^*]$: Adimensionales

Esquema del capacitor real:



En el extremo superior la placa con carga positiva.

En el extremo inferior la placa con carga negativa.

En rojo y azul las líneas equipotenciales.

En color blanco las líneas del campo eléctrico.

Problema 5: Se tiene un capacitor en aire de placas plano-paralelas circulares de radio 10cm y espesor 6mm. Calcular la capacidad a) sin considerar efectos de borde, b) considerando el radio finito de las placas y c) considerando el radio finito y el espesor de las placas, para distintas separaciones entre las placas con el siguiente paso: $\begin{cases} \text{paso} = 0,5\text{mm} & \text{si } 1,5\text{mm} \leq d \leq 10\text{mm} \\ \text{paso} = 10\text{mm} & \text{si } 10\text{mm} \leq d \leq 100\text{mm} \end{cases}$

Confeccionar una tabla. ($\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.). Analizar las diferencias entre los distintos valores teóricos obtenidos para una dada separación d . Volcar los datos en una tabla como la siguiente:

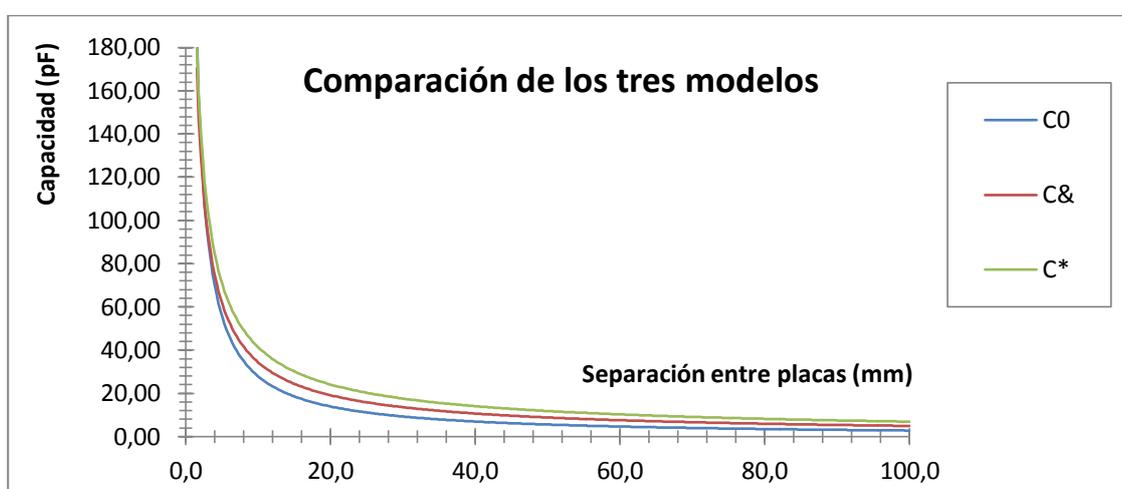
d (m)	C_0 (pF)	$f^\&$	f^*	$C^\&$ (pF)	C^* (pF)	$C_0(5\text{mm})/C_0(d)$	$C^\&(5\text{mm})/C^\&(d)$	$C^*(5\text{mm})/C^*(d)$
.....
0,005	55,60	1,094	1,252	60,84	69,62	1,00	1,00	1,00
.....
0,100	2,78	1,929	2,636	5,36	7,33	20,000	11,346	9,499

Permitividad eléc. del vacío:	ϵ_0 (pF/m)	8,85
Radio de las placas:	R (m)	0,100
Espesor de las placas:	δ (m)	0,006

Tabla realizada en una planilla de cálculos, utilizando las correspondientes fórmulas para las capacidades y relaciones. Debajo, un gráfico comparativo.

Tabla del problema 5)									
Distancia entre placas		Capacidad			Relaciones con correcciones		Relaciones de capacidad respecto a $d = 5\text{mm}$		
d (mm)	d (m)	C_0 (pF)	$C^\&$ (pF)	C^* (pF)	$f^\& = C^\&/C_0$	$f^* = C^*/C_0$	$C_0(d)/C_0(5\text{mm})$	$C^\&(d)/C^\&(5\text{mm})$	$C^*(d)/C^*(5\text{mm})$
1,5	0,0015	185,35	191,65	203,00	1,034	1,095	3,333	3,150	2,916
2,0	0,0020	139,02	145,06	155,88	1,043	1,121	2,500	2,384	2,239
2,5	0,0025	111,21	117,06	127,44	1,053	1,146	2,000	1,924	1,830
3,0	0,0030	92,68	98,36	108,35	1,061	1,169	1,667	1,617	1,556
3,5	0,0035	79,44	84,99	94,63	1,070	1,191	1,429	1,397	1,359
4,0	0,0040	69,51	74,94	84,27	1,078	1,212	1,250	1,232	1,210
4,5	0,0045	61,78	67,11	76,16	1,086	1,233	1,111	1,103	1,094
5,0	0,0050	55,61	60,84	69,63	1,094	1,252	1,000	1,000	1,000
5,5	0,0055	50,55	55,70	64,25	1,102	1,271	0,909	0,916	0,923
6,0	0,0060	46,34	51,41	59,73	1,109	1,289	0,833	0,845	0,858
6,5	0,0065	42,77	47,77	55,89	1,117	1,307	0,769	0,785	0,803
7,0	0,0070	39,72	44,65	52,57	1,124	1,324	0,714	0,734	0,755
7,5	0,0075	37,07	41,95	49,68	1,131	1,340	0,667	0,689	0,714
8,0	0,0080	34,75	39,57	47,13	1,139	1,356	0,625	0,650	0,677
8,5	0,0085	32,71	37,47	44,87	1,146	1,372	0,588	0,616	0,644
9,0	0,0090	30,89	35,61	42,85	1,153	1,387	0,556	0,585	0,615
9,5	0,0095	29,27	33,93	41,03	1,159	1,402	0,526	0,558	0,589

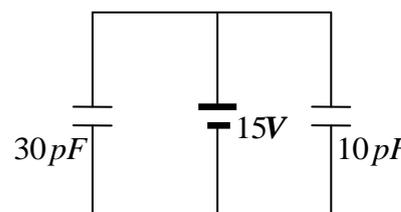
d (mm)	d (m)	C ₀ (pF)	C ^{&} (pF)	C* (pF)	f ^{&} = C ^{&} /C ₀	f* = C*/C ₀	C ₀ (d)/C ₀ (5mm)	C ^{&} (d)/C ^{&} (5mm)	C*(d)/C*(5mm)
10	0,010	27,80	32,42	39,38	1,166	1,417	0,500	0,533	0,566
20	0,020	13,90	17,91	23,03	1,288	1,657	0,250	0,294	0,331
30	0,030	9,27	12,92	17,06	1,394	1,841	0,167	0,212	0,245
40	0,040	6,95	10,34	13,87	1,488	1,995	0,125	0,170	0,199
50	0,050	5,56	8,76	11,84	1,575	2,129	0,100	0,144	0,170
60	0,060	4,63	7,67	10,42	1,655	2,248	0,083	0,126	0,150
70	0,070	3,97	6,87	9,36	1,730	2,357	0,071	0,113	0,134
80	0,080	3,48	6,25	8,54	1,800	2,457	0,063	0,103	0,123
90	0,090	3,09	5,76	7,88	1,866	2,550	0,056	0,095	0,113
100	0,100	2,78	5,36	7,33	1,929	2,636	0,050	0,088	0,105



Problema 6: Se tiene el capacitor cargado con una carga Q desconocida ¿Se puede determinar la variación de su capacidad (sin necesidad de conocer su valor absoluto) con la separación entre placas a partir de la medición de diferencias de potencial entre placas? Justificar.

Si, se logra mediante la expresión: $\frac{C(d)}{C(d_{\text{referencia}})} = \frac{V(d_{\text{referencia}})}{V(d)}$ concluida y explicada en detalle en la introducción del presente informe. Eligiendo una separación $d_{\text{referencia}}$ como referencia para las mediciones es posible conocer la forma en que varía la capacidad con la separación de las placas.

Problema 7: Se conectan dos capacitores de 10pF y 30 pF a una batería de 15V como indica la figura. ¿Cuál es la carga almacenada y la diferencia de potencial sobre cada capacitor cuando ha pasado un tiempo suficientemente largo como para considerar que se ha llegado al estado estacionario?



Como la batería permanece conectada, una vez llegado al estado estacionario, la diferencia de potencial entre los bornes de ambos capacitores es la establecida por la misma: **15 V**.

Luego, la carga es: $Q = C \cdot V$, por lo tanto:

$$\begin{cases} \text{Para el capacitor de } 30 \text{ pF} \rightarrow Q = 30 \text{ pF} \cdot 15 \text{ V} = \boxed{0,45 \text{ nC}} \\ \text{Para el capacitor de } 10 \text{ pF} \rightarrow Q = 10 \text{ pF} \cdot 15 \text{ V} = \boxed{0,15 \text{ nC}} \end{cases}$$

Problema 8: Se tiene un capacitor de 10 pF cargado con una carga Q . Se conecta a otro capacitor de 30 pF . ¿Cuál será la carga de cada capacitor?

Identificando a los capacitores: $C_1 = 10 \text{ pF}$; $C_2 = 30 \text{ pF}$

La carga total Q se conserva, por lo que $Q = Q_{1f} + Q_{2f}$, a su vez al conectarse los capacitores, luego de establecido el régimen estacionario, quedan a la misma diferencia de potencial, por lo que:

$$V = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_{2f}}{C_2} \Rightarrow Q_{1f} = \frac{C_1}{C_2} Q_{2f}$$

Reemplazando en la ecuación de conservación de la carga:

$$Q = \frac{C_1}{C_2} Q_{2f} + Q_{2f} = \left(\frac{C_1}{C_2} + 1 \right) Q_{2f} \Rightarrow Q_{2f} = Q \left(\frac{1}{\frac{C_1}{C_2} + 1} \right) = \boxed{Q \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right) = Q_{2f}}$$

Con los valores:

$$Q \left(\frac{30 \text{ pF}}{30 \text{ pF} + 10 \text{ pF}} \right) = \boxed{\frac{3}{4} Q = Q_{2f}}$$

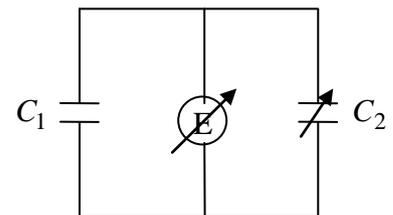
Luego se obtiene Q_{1f} :

$$Q = Q_{1f} + Q_{2f} \Rightarrow Q_{1f} = Q \left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right) = \boxed{Q \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) = Q_{1f}}$$

Con los valores:

$$Q \left(\frac{10 \text{ pF}}{30 \text{ pF} + 10 \text{ pF}} \right) = \boxed{\frac{1}{4} Q = Q_{1f}}$$

Problema 9: Se tienen dos capacitores cargados con cargas Q_1 y Q_2 como indica la figura. El capacitor C_1 tiene una capacidad fija de 30 pF mientras que C_2 es variable. E es un electrómetro. Originalmente la capacidad C_2 es de 10 pF y en el electrómetro se mide V_0 . Luego se cambia la capacidad a 20 pF . ¿Cuál es la nueva lectura del electrómetro?



Datos: $C_1 = 30 \text{ pF}$; $C_2 = 10 \text{ pF}$; $C'_2 = 20 \text{ pF}$

Conservación de la carga:

$$Q_1 + Q_2 = Q_{1f} + Q_{2f} \Rightarrow Q_{2f} = Q_1 + Q_2 - Q_{1f}$$

Inicialmente ambos capacitores se encuentran a la misma tensión V_0 , por lo que sus cargas iniciales son:

$$Q_1 = V_0 \cdot C_1; \quad Q_2 = V_0 \cdot C_2$$

Luego, al variar C_2 hacia C'_2 y establecerse el régimen estacionario se tiene nuevamente a los capacitores a la misma diferencia de potencial V_f entre sus bornes, manteniendo la relación:

$$V_f = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_{2f}}{C'_2}$$

Reemplazando con lo obtenido de la conservación de la carga:

$$V_f = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_{1f}}{C'_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C'_2} - \frac{Q_{1f}}{C'_2} \Leftrightarrow \frac{Q_{1f}}{C_1} + \frac{Q_{1f}}{C'_2} = Q_{1f} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'_2} \right) = \frac{Q_1 + Q_2}{C'_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{1f} = \frac{Q_1 + Q_2}{C'_2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'_2} \right)^{-1} = \frac{Q_1 + Q_2}{C'_2} \frac{C_1 \cdot C'_2}{C_1 + C'_2} = \frac{C_1}{C_1 + C'_2} (Q_1 + Q_2)$$

Luego:

$$V_f = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{1}{C_1} \frac{C_1}{C_1 + C'_2} (Q_1 + Q_2) = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C'_2}$$

Y conociendo las cargas iniciales:

$$V_f = \frac{V_0 \cdot C_1 + V_0 \cdot C_2}{C_1 + C'_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C'_2} V_0 = V_f$$

NOTA: Este resultado podría haberse deducido de manera mucho más simple a partir de la ecuación del final de la introducción, cambiando C_{entrada} por C_1 , $C(5 \text{ mm})$ por C_2 , $C(d)$ por C'_2 , $V(5 \text{ mm})$ por V_0 y $V(d)$ por V_f . Esto se debe a que el problema es análogo a la experiencia. Se dejó la resolución original porque ésta conclusión se sacó luego de obtenido el resultado.

Reemplazando valores:

$$\frac{30 \text{ pF} + 10 \text{ pF}}{30 \text{ pF} + 20 \text{ pF}} V_0 = \frac{4}{5} V_0 = V_f$$

El fabricante del electrómetro indica que tiene una capacidad de entrada de 30-35pF, si no se consideran los cables de las puntas exploradoras, y de hasta 150pF en caso de que los cables sean considerados.

- ¿Cómo se explica la afirmación anterior?
- ¿Influye una capacidad parásita C_{entrada} en las mediciones?

Problema 10: Justificar las ecs.(4) y (5).

$$V(d) = \frac{Q' + Q''}{C(d) + C_{\text{entrada}}} \quad (4)$$

$$\frac{V(5 \text{ mm})}{V(d)} = \frac{C(d) + C_{\text{entrada}}}{C(5 \text{ mm}) + C_{\text{entrada}}} = \frac{\epsilon_0 \frac{A}{d} + C_{\text{entrada}}}{55,6 \text{ pF} + C_{\text{entrada}}} \quad (5)$$

Por sus características constructivas, el electrómetro tiene conductores separados a ciertas distancias, circuitos internos con capacidades, etc., por lo que éste tendrá una capacidad propia entre sus terminales de medición. Además los cables son conductores que se encuentran separados, por lo que también pueden considerarse como capacidades que se están sumando a la experiencia.

La capacidad parásita C_{entrada} influye en las mediciones, ya que es un capacitor en paralelo fijo, agregado al sistema, que como se observó en el **Problema 9** (C_{entrada} es fijo como C_1 y C es variable como C_2), influye en la medición del voltaje con el electrómetro.

Ecuación (4)

Como los capacitores C y C_{entrada} se encuentran conectados en paralelo, la capacidad equivalente es directamente la suma de sus capacidades, también la carga equivalente es la suma de las cargas de los dos capacitores, por lo que la diferencia de potencial queda dada por el cociente de la sumas mencionadas.

Ecuación (5)

Esta ecuación ha sido deducida en la introducción del presente informe, y lo que hay en la última igualdad no es más que un reemplazo de la capacidad ya obtenida en 5 mm (55,6 pF) y la capacidad teórica por la expresión de C_0 .

Se utilizarán los valores teóricos de los tres modelos mencionados en la introducción.

Procesamiento de datos:

Tabla de valores teóricos y experimentales

En la siguiente tabla se calcularon los valores teóricos de las capacidades relativas teniendo en cuenta la capacidad parásita de entrada, luego se agregaron los datos experimentales obtenidos en el laboratorio. A partir de estos valores, que son diferencias de potencial en función de la separación entre placas, se obtuvieron las capacidades relativas experimentales, utilizando la fórmula concluyente de la introducción.

Permitividad del vacío	ϵ_0 (pF/m)	8,85
Radio de las placas	R (m)	0,100
Espesor de las placas	δ (m)	0,006

$$\frac{C(d) + C_{\text{entrada}}}{C(5\text{ mm}) + C_{\text{entrada}}} = \frac{V(5\text{ mm})}{V(d)}$$

Esta relación se compara en el gráfico

Centrada (pF)	35
---------------	----

		Cálculos Basados en Predicciones Teóricas						Datos Obtenidos en la Experiencia Realizada en el Laboratorio									
Distancia entre placas		Capacidad			Relaciones de capacidad respecto a d = 5mm			Diferencias de potencial, obtenidas a Q = cte.					Relaciones con capacidades				
d (mm)	d (m)	C_0 (pF)	C^* (pF)	C' (pF)	$\frac{C_0(d) + C_{\text{ent}}}{C_0(5\text{ mm}) + C_{\text{ent}}}$	$\frac{C^*(d) + C_{\text{ent}}}{C^*(5\text{ mm}) + C_{\text{ent}}}$	$\frac{C'(d) + C_{\text{ent}}}{C'(5\text{ mm}) + C_{\text{ent}}}$	V_1 (V)	V_2 (V)	V_3 (V)	V_4 (V)	V_5 (V)	$\frac{V_1(5\text{ mm})}{V_1(d)}$	$\frac{V_2(5\text{ mm})}{V_2(d)}$	$\frac{V_3(5\text{ mm})}{V_3(d)}$	$\frac{V_4(5\text{ mm})}{V_4(d)}$	$\frac{V_5(5\text{ mm})}{V_5(d)}$
5	0,005	55,61	60,84	69,63	1,000	1,000	1,000	10,0	10,0	10,0	15,0	5,4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,010	27,80	32,42	39,38	0,693	0,703	0,711	12,0	12,1	11,8	20,1	6,0	0,833	0,826	0,847	0,746	0,900
15	0,015	18,54	22,80	28,67	0,591	0,603	0,609	12,9	13,0	12,2	21,5	6,2	0,775	0,769	0,820	0,698	0,871
20	0,020	13,90	17,91	23,03	0,540	0,552	0,555	13,1	13,1	12,4	22,0	6,4	0,763	0,763	0,806	0,682	0,844
25	0,025	11,12	14,93	19,50	0,509	0,521	0,521	13,2	13,6	13,0	22,9	6,5	0,758	0,735	0,769	0,655	0,831
30	0,030	9,27	12,92	17,06	0,489	0,500	0,498	13,3	13,9	13,2	23,0	6,5	0,752	0,719	0,758	0,652	0,831

Esta tabla fue utilizada luego para realizar el gráfico donde se comparan las experiencias con los modelos teóricos. Así se fue cambiando la capacidad de entrada en distintos valores para ajustar las curvas, a continuación una breve descripción de los gráficos obtenidos:

NOTA: Al final se anexan hojas con los gráficos para estas capacidades parásitas.

$$C_{\text{entrada}} = 35\text{ pF}$$

El gráfico no ajusta muy bien a ninguna de las experiencias, la experiencia más cercana es la 4, realizada con potencial inicial de 15 V.

$$C_{\text{entrada}} = 50\text{ pF}$$

El gráfico ajusta bastante a la experiencia 4, realizada con potencial inicial de 15 V.

$$C_{\text{entrada}} = 115\text{ pF}$$

El gráfico ajusta a las experiencias 1 y 2, que a su vez son más o menos el promedio de todas las experiencias.

$$C_{\text{entrada}} = 150\text{ pF}$$

El gráfico se acerca a la experiencia 3, realizada con un potencial inicial de 10 V.

Selección de la capacidad de entrada

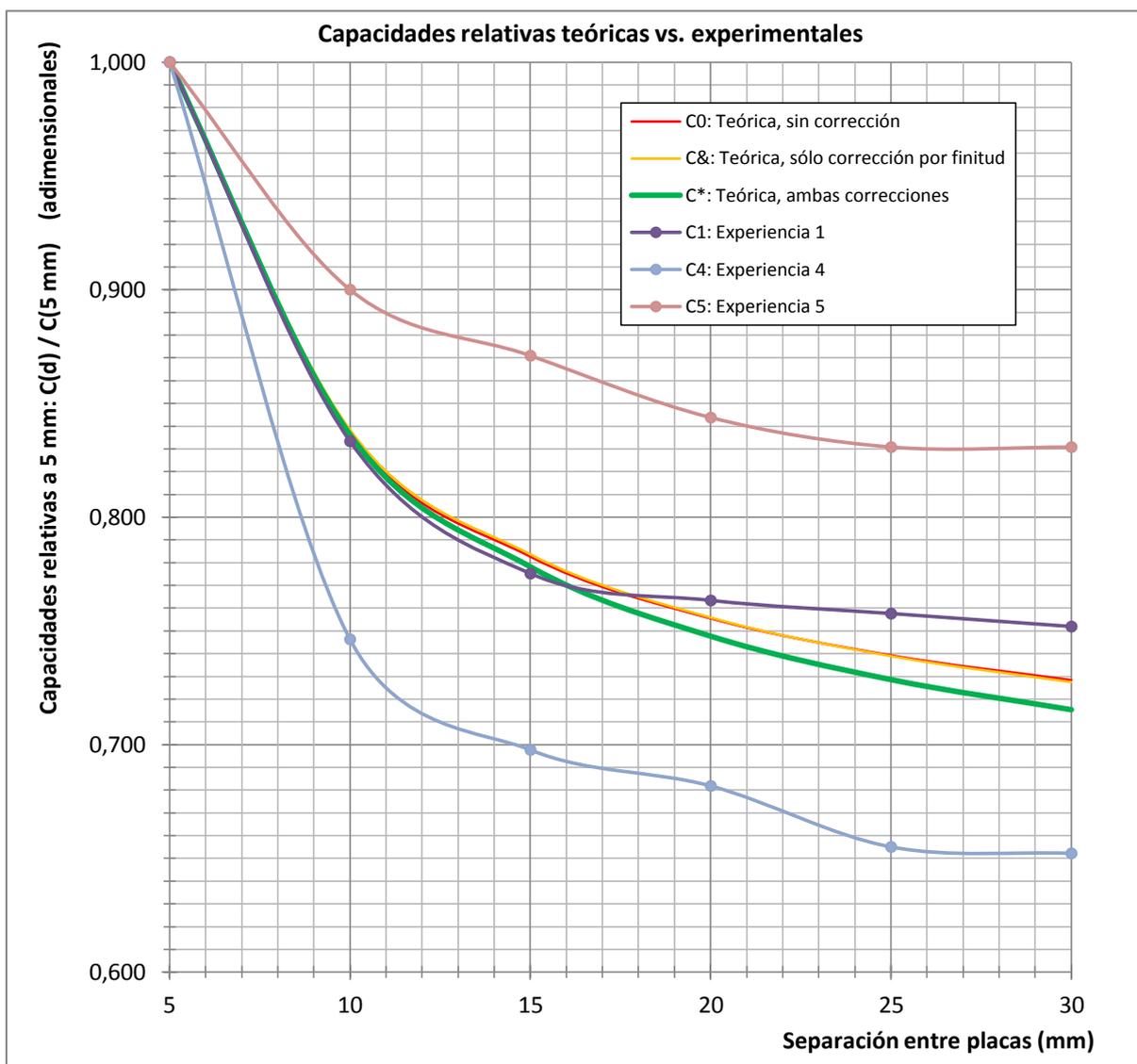
Según la guía de trabajos prácticos, la capacidad parásita de entrada debe estar comprendida entre 30 y 35 pF. Sin embargo se menciona la existencia de la capacidad del cable, que puede alcanzar hasta 150 pF y que en un principio puede ser considerada despreciable.

Para seleccionar la capacidad parásita se fueron probando varios valores y observando los cambios en el gráfico, prestando atención al ajuste a los datos experimentales del modelo con ambas correcciones.

Se ha decidido seleccionar una capacidad parásita de 115 pF, basándose en los motivos mencionados a continuación. Dicha capacidad de entrada aproxima al promedio de las experiencias (se verificó en la planilla de cálculos). A su vez, ajusta aceptablemente a la experiencia 1, que es la experiencia cuyo gráfico tiene la curva con la “mejor” forma, entendiéndose por “mejor” a la forma esperada según los modelos teóricos. Lo mencionado respecto a la experiencia 1 probablemente no se trate de una casualidad, ya que la primera experiencia es la que se hace con el ambiente menos perturbado de todas, sin tantos campos externos, ni variaciones en el dieléctrico, ni aumento de temperatura de las placas, etc.

Gráfico comparativo

En el siguiente gráfico se representan las capacidades relativas a 5 mm. Está la representación de cada uno de los tres modelos teóricos (con $C_{\text{entrada}} = 115$ pF), más la representación de las experiencias 1, 4 y 5.



Conclusiones:

La práctica de laboratorio fue realizada satisfactoriamente, cumpliendo todos los pasos requeridos. Es interesante la parte que en este curso no se requiere sobre el manejo Quickfield, ya que una simulación de tal nivel de detalle quizás permita ver el apartamiento que aún el modelo de Kirchhoff pueda tener respecto de un capacitor real.

A su vez interesa comentar que la toma de mediciones en el laboratorio no fue muy precisa, ya que el electrómetro fluctuaba rápidamente y la aguja externa conectada al mismo para que todos pudiéramos tomar nota tampoco era muy fiable.

Siguiendo con esto, la resistencia del electrómetro es de $10^{14} \Omega$, pero no es nula, estaría bueno saber en cuánto tiempo se descarga el capacitor.

Por ejemplo, para una separación de 5 mm: $C(5 \text{ mm}) + C_{\text{entrada}} = 69,63 \text{ pF} + 35 \text{ pF} \cong 105 \text{ pF}$

Realizando la experiencia con 10 V, la carga total en los capacitores es: $Q = C \cdot V \cong 1 \text{ nC}$

La corriente al principio es $I = \frac{V}{R} = \frac{10 \text{ V}}{10^{14} \Omega} = 10^{-13} \text{ A} = 0,0001 \text{ nC/s}$

Esta corriente irá cayendo al descargarse el capacitor, porque lo hará la tensión debido a la disminución de la carga, por lo que la corriente hallada es la máxima velocidad de cargas por unidad de tiempo. Así, es sabido que el capacitor se descargará mucho después, pero si se descargara constantemente a razón de 0,0001 nC/s, se obtiene un tiempo de descarga: $t = \frac{Q}{I} = \frac{1 \text{ nC}}{0,0001 \text{ nC/s}} = 10000 \text{ s} = 2\text{h } 46\text{min } 40\text{s}$.

De donde se concluye que es lo suficientemente largo, ya que todo el experimento dura a lo sumo 2 minutos. Y si bien el capacitor no se encuentra descargándose a separación constante, la tensión no aumenta significativamente como para concluir un tiempo de descarga significativamente pequeño.

Una observación: el modelo de Kirchhoff no difiere tanto del elemental, en comparación a las diferencias entre las experiencias y los modelos teóricos, y entre ellas mismas.

Esto nos lleva a otra cosa que llama la atención, y es que para diferentes diferencias de potencial iniciales las capacidades relativas son bastantes distintas. Suponemos como hipótesis, que dependiendo del voltaje aplicado a los bornes del capacitor, el campo en su interior varía haciendo que las condiciones de borde no signifiquen lo mismo para una tensión que para otra.

Un comentario que se hizo en clase es que en otra época éste mismo trabajo práctico se hacía utilizando una plancha de EPS (poliestireno expandido, comúnmente llamado 'telgopor') como dieléctrico, pero que había ciertos problemas, como el derretimiento de la misma por el calor disipado en las placas. Habría que evaluar si el aire no tiene otras desventajas, por tener una permitividad dieléctrica baja en comparación con el EPS.

Finalmente se puede decir que la práctica, acompañada de la realización de éste informe, resultó altamente didáctica en lo que a capacitores respecta, permitiendo un recorrido por buena parte del tema.