

# Distribuciones de cargas Métodos numérico y analítico

**Juan José Brusa**

**Padrón: XXXXX**

dirección de mail

**Sebastián García Marra**

**Padrón: XXXXX**

dirección de mail

**Iñaki García Mendive**

**Padrón: XXXXX**

dirección de mail

**Germán Gual**

**Padrón: XXXXX**

dirección de mail

Física II A - Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ingeniería

**Trabajo Práctico N°1**

## Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                  | <b>4</b>  |
| <b>2. Método Experimental</b>           | <b>4</b>  |
| <b>3. Resultados</b>                    | <b>7</b>  |
| <b>4. Discusión</b>                     | <b>7</b>  |
| <b>5. Conclusiones</b>                  | <b>8</b>  |
| <b>Referencias</b>                      | <b>8</b>  |
| <b>A. Problemas adicionales</b>         | <b>9</b>  |
| A.1. Problema 1 . . . . .               | 9         |
| A.2. Problema 2 . . . . .               | 11        |
| A.3. Problema 3 . . . . .               | 13        |
| <b>B. Preguntas de la tercera parte</b> | <b>16</b> |
| B.1. Respuestas . . . . .               | 16        |

## Índice de figuras

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1. | Cilindro cargado superficialmente . . . . .       | 5  |
| 2. | Dos cilindros cargados superficialmente . . . . . | 5  |
| 3. | Cuatro distribuciones de carga lineal . . . . .   | 6  |
| 4. | Pararrayos y nube . . . . .                       | 6  |
| 5. | Gráfico del Potencial $V$ . . . . .               | 10 |
| 6. | Línea de distribución . . . . .                   | 13 |

## Índice de cuadros

|    |   |   |
|----|---|---|
| 1. | Campo y Potencial para “Cilindro” . . . . . | 7 |
| 2. | Campo y Potencial para “Distribu” . . . . . | 7 |

### Resumen

Nos fueron presentadas cuatro distribuciones de carga:

1. Una distribución cilíndrica superficial, denominada “Cilindro,” de radio igual a 2 cm y carga dada por  $\sigma = 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ .
2. Una distribución llamada “Distribu” formada por dos distribuciones cilíndricas superficiales de carga de distinto signo, separadas 34 cm. El radio de cada distribución cilíndrica es 2 cm y la densidad de carga superficial es  $\sigma = \pm 1 \mu\text{C}/\text{m}^2$ .
3. Cuatro distribuciones lineales de carga  $\lambda$  (dos positivas y dos negativas), denominada “Cuadri.”
4. Una nube cargada y un pararrayos, nominada “Rayo.”

Para cada una de ellas se ha calculado el Campo Eléctrico  $\mathbf{E}$  y el Potencial Eléctrico  $V$ .

Para las primeras dos distribuciones se emplearon dos métodos diferentes: el analítico (haciendo uso de la *Ley de Gauss* por el carácter de simetría de las superficies) y luego el método numérico (por medio del software QuickField). Para ambos casos se tomaron, como puntos de referencia, diferentes puntos especificados para cada distribución, en los que se evaluó puntualmente el valor de sendas magnitudes.

Luego de efectuar todos los cálculos (que serán exhibidos en tablas) se ha procedido al análisis de los resultados por comparación entre los dos métodos. De esta comparación se han extraído algunas conclusiones, las cuales serán expuestas en el transcurso del informe. También se han resuelto otros tres problemas adicionales de distribución de carga mediante el método analítico, incluidos en el Apéndice A del presente informe.

## 1. Introducción

Como es posible inferir del resumen, en el presente trabajo se hace uso extensivo de diferentes métodos para calcular el valor del campo y del potencial eléctricos. Dichos métodos se basan en la representación matemática —en forma de campos vectoriales— de los fenómenos naturales observados en presencia de cargas eléctricas.

Los primeros pasos hacia una representación vectorial de dichos fenómenos los da Charles Augustin Coulomb [1] quien, haciendo uso de la observación empírica, logra formular la dependencia de las fuerzas de repulsión entre cargas como inversamente proporcional a la distancia que las separa y directamente proporcional a la cantidad de cargas presentes [2]. Debido a esta cuantificación de la carga es que hoy le debemos el nombre de la unidad de carga eléctrica en el sistema SI, el Coulomb (C).

Gracias al principio de superposición y a la modelización matemática de una *densidad de carga continua* se pudo extender el modelo de Coulomb a configuraciones mucho más complejas de analizar. A su vez, con el Teorema de la Divergencia [2] —acompañado del concepto de *campo conservativo* [3]— se llegó a la idealización de una *función potencial*, de naturaleza escalar, que se vincula con el campo eléctrico mediante la siguiente ecuación:  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , siendo  $\mathbf{E}$  el campo eléctrico y  $V$  el potencial. Esta teoría dió lugar más tarde al uso de la *Ecuación de Laplace* [3], como método numérico para el cálculo de dichas magnitudes.

## 2. Método Experimental

En esta ocasión, para la obtención de los datos requeridos, se empleó como herramienta un software para aplicaciones de Física que permite el cálculo de Campos Eléctricos y Potenciales Eléctricos, a la vez que ilustra mediante imágenes las *líneas de campo* y las *líneas equipotenciales*, que representan los valores de las magnitudes obtenidas.

A continuación se exhiben las representaciones gráficas para cada una de las cuatro distribuciones en estudio:

**Cilindro:** Esta distribución corresponde a un cilindro cargado en su superficie con una densidad de carga superficial uniforme  $\sigma$ . Puede observarse (Fig. 1) que las líneas equipotenciales son circunferencias concéntricas, a la vez que las líneas de campo son —como se cumple siempre— normales a las líneas equipotenciales en todo punto del espacio. Estas líneas son radiales y, por ser positiva la carga, se “alejan” del cilindro.

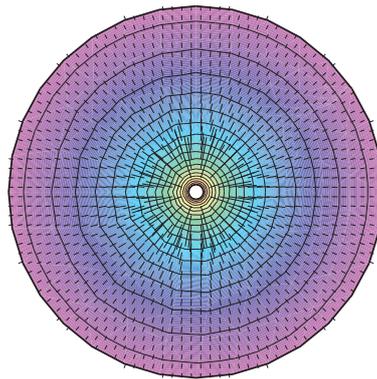


Figura 1: Cilindro cargado superficialmente

**Distribución:** Esta distribución se compone de dos cilindros cargados superficialmente con una densidad uniforme  $\sigma$ . Uno de ellos está cargado positivamente y el otro lo está negativamente. La Figura 2 ilustra cómo las líneas de campo del cilindro con densidad de carga positiva son salientes de la superficie, mientras lo contrario ocurre en el cilindro de densidad negativa.

Nuevamente, las líneas equipotenciales se muestran como circunferencias (pero deformadas por el campo producido por cada cilindro), y se mantiene la ortogonalidad de estas respecto de las líneas de campo.

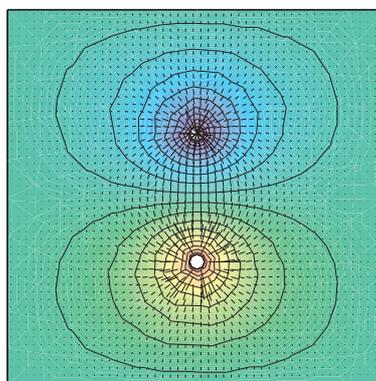


Figura 2: Dos cilindros con carga superficial uniforme de signo contrario

**Cuadri:** Lo que tenemos en este caso es un esquema de cuatro distribuciones de carga de densidad lineal uniforme  $\lambda$ , dos de signo positivo y dos de signo negativo. Se puede apreciar (Fig. 3) cómo las líneas equipotenciales asociadas a una distribución se ven afectadas por las correspondientes a las otras distribuciones. Puede observarse también cómo las líneas de campo son salientes para las cargas positivas, y entrantes para las negativas.

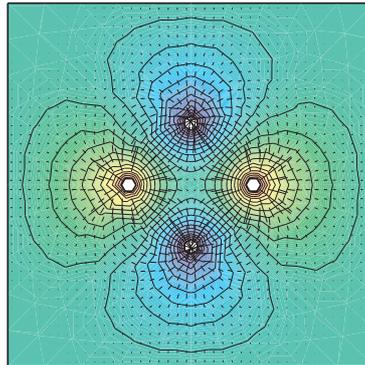


Figura 3: Cuatro distribuciones de carga lineal

**Rayo:** Por último nos encontramos con una distribución de carga superficial  $\sigma$  uniforme y positiva sobre un pararrayos, y una nube cargada negativamente. En este caso (Fig. 4) es sumamente apreciable el hecho de que, conforme nos acercamos a la superficie del pararrayos, las líneas de campo adoptan la forma del mismo. Se evidencia, por demás, el carácter perpendicular de las mismas respecto de las líneas equipotenciales.

Dentro de la nube no hay campo: por eso no se pueden apreciar líneas de ningún tipo allí dentro.

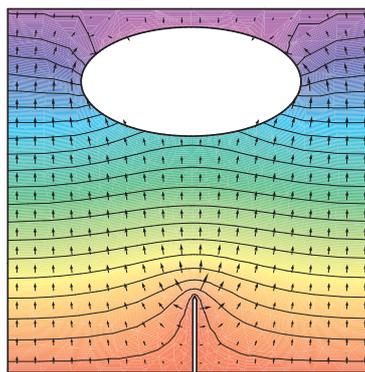


Figura 4: Pararrayos cargado positivamente y nube cargada negativamente

Finalmente podemos decir, respecto de todas las distribuciones estudiadas, que puede apreciarse que la densidad de líneas de campo (y por ende la magnitud del campo) es mayor en las cercanías de las distribuciones de carga, y va disminuyendo conforme nos alejamos de ellas.

A su vez, es visible en todos los casos el hecho de que las líneas de campo provenientes de una misma distribución —sin importar la densidad de las mismas— *nunca* se cortan. Tal cosa es correcta porque, dado que las líneas de campo son las envolventes de las rectas tangentes al campo en cada punto, si se cortaran significaría que el campo tiene dos direcciones para un mismo punto, lo cual es evidentemente absurdo.

### 3. Resultados

A partir de que el software utiliza otro método para realizar el estudio pedido, existen diferencias entre los valores resultantes por uno y otro método. Esto puede apreciarse si se revisan los valores obtenidos para las dos distribuciones analizadas mediante el software, y a su vez mediante el método numérico.

A continuación se exponen las tablas respectivas para cada caso:

#### Distribución “Cilindro”

|   | M. Numérico |         | M. Analítico |         |
|---|-------------|---------|--------------|---------|
|   | $E$ (V/m)   | $V$ (V) | $E$ (V/m)    | $V$ (V) |
| A | 22191       | 3559,7  | 22619,47     | 3640,46 |
| B | 7135        | 1150,8  | 7539,82      | 1155,46 |
| C | 7128,5      | 904,47  | 7539,82      | 1155,46 |
| D | 5234        | 348,76  | 5654,87      | 504,74  |
| E | 5010,3      | 49,86   | 4616,22      | 45,70   |

Cuadro 1: Campo y Potencial numéricos y analíticos

#### Distribución “Distribu”

|                | M. Numérico |         | M. Analítico |          |
|----------------|-------------|---------|--------------|----------|
|                | $E$ (V/m)   | $V$ (V) | $E$ (V/m)    | $V$ (V)  |
| A              | 8503        | 1076,1  | 9739,37      | -1105,46 |
| B              | 12567       | 316,21  | 15758,69     | -368,90  |
| C              | 4784,2      | -457,23 | 6656,86      | 438,95   |
| D <sub>1</sub> | 2427,3      | 197,44  | 3659,03      | -184,97  |
| D <sub>2</sub> | 32186       | -3462   | 32015,07     | 3744,45  |
| E              | 23378       | -13,873 | 26586,91     | 0        |

Cuadro 2: Campo y Potencial numéricos y analíticos

### 4. Discusión

En el momento previo a la resolución de los problemas planteados para este trabajo, suponíamos que al terminar encontraríamos alguna clase de diferencia entre los resultados obtenidos por el método numérico (a través del software) y los obtenidos mediante el método

analítico. Una vez concluidos los cálculos, notamos —como era de esperarse— que los resultados no eran tan dispares, si bien el método numérico resultaba ser menos preciso.

Terminamos evaluando entonces que tal vez era conveniente aplicar el método analítico cuando fuera posible. No obstante, no es imperativo hacerlo, dado que el otro método tiene un alto nivel de precisión.

## 5. Conclusiones

Hemos visto que hay dos formas de calcular el Campo y el Potencial eléctricos y que se espera que haya diferencias entre los dos métodos.

El método analítico (por definición) es el método que arrojará los resultados exactos del problema, pero sólo resulta conveniente emplearlo ante ciertas distribuciones de carga, aquellas en las que resulte simple realizar los cálculos pertinentes. Dentro de este grupo están incluidas todas aquellas distribuciones que, por su naturaleza de simetría, nos permiten aplicar métodos como la resolución mediante el uso de la *Ley de Gauss*

Como contrapartida, cuando el esquema de distribución de cargas no presente ninguna clase de simetría, o resulte complejo resolverlo incluso por métodos analíticos como lo es también el de la *Ley de Coulomb*, el uso de un software que nos resuelva el problema por medio de métodos numéricos, como QuickField (que emplea la ecuación de Laplace como parte de su algoritmo de resolución), se vuelve determinante.

Sin embargo, se debe tener en cuenta que al usar este último método lo que se obtiene es un resultado sólo aproximado, cuyo margen de error es más alto respecto de los procedimientos mencionados primeramente.

## Referencias

- [1] HALLIDAY, RESNICK, WALKER, *Fundamentals of Physics*, Indianapolis, John Wiley and Sons, 2004, cap. 23.3.
- [2] RAMO, Simon, WHINNERY, John R., VAN DUZER, Theodore, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 1st ed., John Wiley and Sons, 1965, cap. 2, “The equations of stationary electric and magnetic fields.”
- [3] K. H. PANOFKSY, Wolfgang, PHILLIPS, Melba, *Classical Electricity and Magnetism*, 1st ed., Addison-Wesley Publishing Company, 1962, cap. 1, “The electrostatic field in vacuum.”

## A. Problemas adicionales

### A.1. Problema 1

#### Enunciado

A partir del campo eléctrico correspondiente, hallar y graficar el potencial eléctrico creado por un hilo infinitamente largo cargado con una densidad de carga lineal constante  $\sigma$ . Discuta si se puede tomar en este caso el valor de referencia cero del potencial en el infinito. Graficar la función obtenida para todo el espacio.

#### Resolución

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$\mathbf{E} = E(\rho)\check{\rho}$  pues, por cuestiones de simetría, no hay acimut ni altitud preferenciales.

$$\begin{aligned} \oiint \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s} &= \iint_{\text{CILINDRO}} \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s}_0 + \iint_{\text{TAPA 1}} \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s}_1 + \iint_{\text{TAPA 2}} \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s}_2 \\ &= \iint_{\text{CILINDRO}} \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s}_0 \\ &= \iint_{\text{CILINDRO}} E(\rho)\check{\rho} \cdot \check{\rho} ds_0 \\ &= \iint_{\text{CILINDRO}} E(\rho) ds_0 \\ &= E(\rho) \iint_{\text{CILINDRO}} ds_0 \\ \oiint \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s} &= E(\rho)2\pi\rho L \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dQ \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \lambda dz \\ &= \frac{\lambda}{\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dz \\ \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} &= \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3)$$

De (2) y (3) queda:

$$\mathbf{E}(\rho) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi\rho} \check{\rho} \quad (4)$$

En cuanto al potencial  $V$ , es claro que no podemos tomar como referencia un potencial cero en el infinito, pues *la distribución es infinita*.

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} V(b) - V(a) &= - \int_a^b \mathbf{E}(\rho) \cdot d\rho \\ &= - \int_a^b E(\rho) \check{\rho} \cdot \check{\rho} \, d\rho \\ &= - \int_a^b E(\rho) \, d\rho \\ &= - \int_a^b \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi\rho} \, d\rho \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{\rho} \, d\rho \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(\rho) \Big|_a^b \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln(b) - \ln(a)) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln(a) - \ln(b)) \\ V(b) - V(a) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (6) \end{aligned}$$

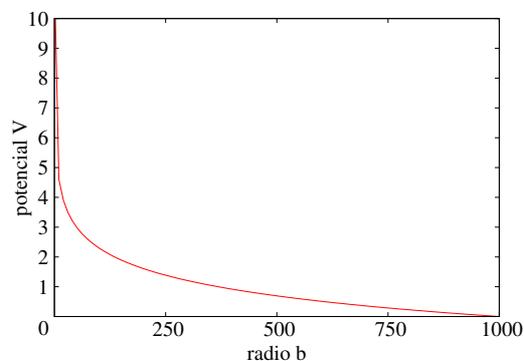


Figura 5: Gráfico del Potencial  $V$  (para  $a = 1000$ )

## A.2. Problema 2

### Enunciado

Un cilindro infinito de radio  $R$  tiene una densidad de carga superficial constante  $\sigma$ .

- Demostrar que el campo eléctrico es nulo en el eje del cilindro.
- Calcular el campo y el potencial eléctricos en el exterior del cilindro. Demostrar que se obtienen los mismos resultados que para un hilo infinitamente largo de densidad lineal  $\lambda = \sigma 2\pi R$ .

### Resolución

- El campo es nulo en todo punto del eje del cilindro pues esta superficie posee simetría axial, y entonces la distribución de cargas es idénticas para todo diferencial de acimut que se considere. Vemos, pues, que  $\mathbf{E}$  en el eje no tiene una dirección definida: el único vector que cumple con esta condición es el  $\mathbf{0}$ .

b.

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\text{CILINDRO}} \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s}_0$$

$$\oiint \mathbf{E}(\rho) \cdot d\mathbf{s} = E(\rho) 2\pi\rho L$$

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\text{SUPERFICIE}} dQ$$

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{2\pi R\sigma L}{\epsilon_0}$$

$$E(\rho) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \rho} \quad (7)$$

Por otra parte, el campo  $\mathbf{E}$  producido por una distribución lineal de densidad  $\lambda$  es igual a:

$$E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

y si  $\lambda = \sigma 2\pi R$ , entonces:

$$\begin{aligned} E(\rho) &= \frac{\lambda}{2\pi R \epsilon_0 \rho} \\ E(\rho) &= \frac{\sigma R}{\epsilon_0 \rho} \end{aligned} \tag{8}$$

(7) y (8) son evidentemente iguales.

### A.3. Problema 3

#### Enunciado

Una línea de distribución de energía eléctrica se puede modelizar por dos cilindros conductores de radio  $a$ , ejes paralelos separados en  $d$  y con cargas lineales  $+\lambda$  y  $-\lambda$  respectivamente. Hallar el potencial eléctrico en todo el espacio. *Sugerencia: use superposición.*

#### Resolución

#### Campo E

Valen idénticas consideraciones a las hechas en el caso (A.1), en cuanto al campo  $\mathbf{E}_i$  producido por cada cilindro. Además,  $\lambda = \sigma 2\pi a$  y recíprocamente  $\sigma a = \frac{\lambda}{2\pi}$ . Si suponemos (Fig. 6) al eje del cilindro I coincidente con el eje  $z$  y al eje del II perteneciente al semieje positivo del eje  $y$ , entonces:

$$\mathbf{E}_1(\rho) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \check{\rho} & \rho > a \\ 0 & \rho < a \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_2(\rho') = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho'} \check{\rho}' & \rho' > a \\ 0 & \rho' < a \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{con } \check{\rho}' = \check{\rho} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

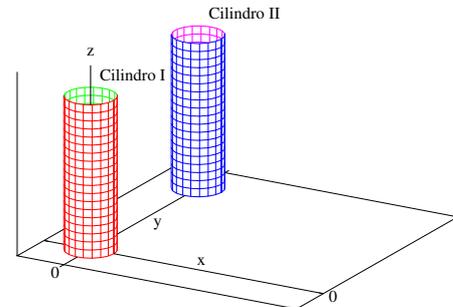


Figura 6: Modelización de una línea de distribución de energía eléctrica

Para superponer es conveniente pasarlo a cartesianas, así:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi) \implies \cos(\phi) = \frac{x}{\rho} \\ y &= \rho \sin(\phi) \implies \sin(\phi) = \frac{y}{\rho} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} \check{\rho} &= (\cos(\phi), \sin(\phi), 0) \\ \check{\rho} &= \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 0\right) \\ \check{\rho} &= \frac{1}{\rho}(x, y, 0) \\ \frac{\check{\rho}}{\rho} &= \frac{1}{\rho^2}(x, y, 0) \end{aligned}$$

$$\frac{\check{\rho}}{\rho} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, y, 0) \quad (11)$$

Con lo cual:

$$\mathbf{E}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} & \sqrt{x^2 + y^2} > a \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} < a \end{cases} \quad (12)$$

y entonces:

$$\mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + (y-d)^2} \begin{pmatrix} x \\ y-d \\ 0 \end{pmatrix} & \sqrt{x^2 + (y-d)^2} > a \\ 0 & \sqrt{x^2 + (y-d)^2} < a \end{cases} \quad (13)$$

Finalmente:

$$\mathbf{E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{x^2 + (y-d)^2} \begin{pmatrix} x \\ y-d \\ 0 \end{pmatrix} \right] & \text{en otro caso} \\ -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + (y-d)^2} \begin{pmatrix} x \\ y-d \\ 0 \end{pmatrix} & \sqrt{x^2 + y^2} < a \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} & \sqrt{x^2 + (y-d)^2} < a \end{cases} \quad (14)$$

### Potencial $V$

$$V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (15)$$

Como la trayectoria desde  $a$  hasta  $b$  puede ser cualquiera —pues  $\mathbf{E}$  es *conservativo*— tomamos, por conveniencia:

$$\left. \begin{aligned} V(a) &= 0 \\ a &= \begin{pmatrix} x_a \\ y_b \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \\ d\mathbf{r} &= -dx\mathbf{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right|$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 V(b) &= - \int_a^b \mathbf{E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_a^b \mathbf{E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \int_a^b \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{x^2+(y-d)^2} \begin{pmatrix} x \\ y-d \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \int_a^b \left( \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+(y-d)^2} \\ \frac{y-d}{x^2+(y-d)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+(y-d)^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y-d}{x^2+(y-d)^2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \left( \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+(y-d)^2} \right) dx \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \int_a^b \frac{x}{x^2+y^2} dx - \int_a^b \frac{x}{x^2+(y-d)^2} dx \right) \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \ln(x^2+(y-d)^2) \Big|_a^b \right) \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln(x_b^2+y_b^2) - \ln(x_a^2+y_a^2) - \left[ \ln(x_b^2+(y_b-d)^2) - \ln(x_a^2+(y_a-d)^2) \right] \right) \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln(x_b^2+y_b^2) - \ln(x_a^2+y_a^2) + \ln(x_a^2+(y_a-d)^2) - \ln(x_b^2+(y_b-d)^2) \right) \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln \left( \frac{x_b^2+y_b^2}{x_a^2+y_a^2} \right) + \ln \left( \frac{x_a^2+(y_a-d)^2}{x_b^2+(y_b-d)^2} \right) \right) \\
 V(b) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{x_b^2+y_b^2}{x_a^2+y_a^2} \cdot \frac{x_a^2+(y_a-d)^2}{x_b^2+(y_b-d)^2} \right)
 \end{aligned}$$

## B. Preguntas de la tercera parte

1. Comparar los valores analíticos obtenidos con la *Ley de Coulomb* con los obtenidos a partir de la integración numérica de la ecuación de Laplace (programa QuickField). ¿Hay diferencias significativas entre los resultados? Justificar.
2. ¿Fueron convenientemente elegidos los puntos? ¿Cuál o cuáles hubieran elegido para determinar la conveniencia del uso del método numérico frente al analítico?
3. ¿Cuáles podrían ser las causas de las incertezas de cada método?
4. ¿Cómo podríamos aplicar este criterio si lo quisiéramos utilizar para mediciones?
5. Describir los resultados numéricos de las distribuciones “cuadri” y “rayo.”

### B.1. Respuestas

1. El análisis de este punto fue ampliamente desarrollado en el apartado 5 de este informe.
2. En cuanto a la primer distribución “Cilindro,” los puntos A y B fueron correctamente elegidos; los C y D, en cambio, no resultaron tan apropiados pues a la hora de aplicar el método numérico —es decir, mediante QuickField— es necesaria una aproximación de estos puntos, lo que produce incertezas.  
  
Lo mismo ocurre para la segunda distribución “Distribu” con los puntos B y C, los cuales deben ser aproximados para el poder aplicar el método numérico.
3. En el método analítico las incertezas pueden provenir mayoritariamente de errores de cuentas, o redondeos de decimales. Por otro lado, el método numérico adolece de otro tipo de incerteza: el mayor problema de este método es que el software QuickField trabaja mediante la previa generación de una *malla* aplicada sobre la distribución en estudio. Esa malla tiene a la sumo 500 nodos y en consecuencia, para cualquier punto que no coincida con un nodo, el valor de la magnitud en cuestión es aproximado. Distinto es el caso del método analítico, que nos permite calcular con precisión un punto cualquiera del espacio.
4. El método numérico es útil cuando se requiere averiguar el valor del campo producido por una distribución muy compleja de cargas y la exactitud no es lo más importante, sino el tener un valor aproximado. También es útil para observar cualitativamente cómo cambios en la distribución de cargas producen cambios en el campo. El método manual por integración es necesario sólo si se requiere obtener una expresión del campo en todo punto del espacio o si es necesaria una exactitud importante en el cálculo del campo en un punto específico.
5. El análisis de cada distribución fue desarrollado en el apartado 2.