Mediciones con Corriente Continua

Juan José Brusa
Padrón: XXXXX
`dirección de mail`

Sebastián García Marra
Padrón: XXXXX
`dirección de mail`

Iñaki García Mendive
Padrón: XXXXX
`dirección de mail`

Física II A - Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ingeniería

Grupo Nº5

Trabajo Práctico Nº3

Resumen

El presente trabajo práctico consta de dos etapas:

- Medición de resistencias por medio de dos métodos, con el fin comparar los resultados obtenidos y determinar cuál de ellos aproxima mejor el valor real de la magnitud medida.
- Analizar la variación de la incerteza de la medición, conforme el valor de la resistencia medida se asemeja en orden de magnitud a la resistencia interna del *tester*.

Para realizar los cálculos nos valdremos de la *ley de Ohm* y de las *reglas de Kirchhoff*, así como también del método del *puente de Wheatstone*.

Estos temas serán debidamente comentados en la introducción de este informe.

1. Introducción

En el marco teórico que subyace a este trabajo práctico es necesario hacer referencia —como ya se dijo anteriormente— a un conjunto de elementos que hacen posible el desarrollo de nuestro estudio, a saber:

Ley de Ohm Establece que la tensión es igual al producto entre la corriente y la resistencia por la cual circula dicha corriente:

$$V = IR. \tag{1}$$

Reglas de Kirchhoff

- Regla de los nodos: La suma de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0. \tag{2}$$

- Regla de las mallas: La suma de todas las caídas de tensión en un circuito cerrado es igual a cero:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = 0. \tag{3}$$

Puente de Wheatstone El puente de Wheatstone es un circuito con una configuración específica (fig. 1) que consta de una fuente, un galvanómetro en modo "amperímetro" y cinco resistencias, una de las cuales actúa como *resistencia de protección* para el circuito interno del galvanómetro. Para la configuración mostrada se cumple que si la corriente

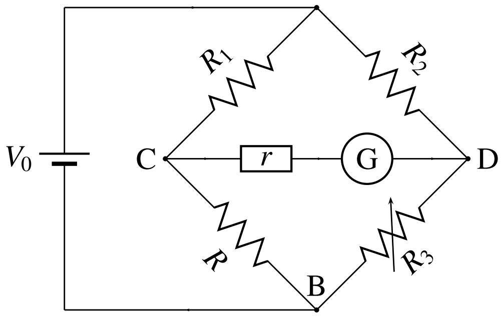

Figura 1: Puente de Wheatstone

que circula por la rama del galvanómetro es $I = 0$, entonces:

$$R_1R_3 = R_2R. \tag{4}$$

De esta manera puede determinarse el valor de una resistencia incógnita, siempre que se conozca el valor de las otras tres resistencias y pueda asegurarse que la corriente en el galvanómetro es nula. Esto se cumple pues —cuando se verifica la ecuación de las resistencias— la diferencia de potencial V_{CD} entre los nodos C y D es nula: ergo, no hay circulación de corriente entre los dos puntos del circuito. Este método de determinación de R se denomina *método de cero*.

2. Método Experimental

Medición de resistencias con un *tester*: como primer paso, se tomaron tres resistencias del laboratorio y se efectuó su medición mediante un multímetro. Luego —utilizando la tabla de tolerancias (cuadro 1)— se determinaron las incertezas de cada una para así poder compararlas con su valor nominal.

Rango	Resolución	Precisión[1]	Corriente máxima de prueba
$200\,\Omega$	$0{,}1\,\Omega$	$\pm 0{,}7\,\%\mathrm{rdg} \pm 3\mathrm{dgt}$	$0{,}7\,\mathrm{mA}$
$2000\,\Omega$	$1\,\Omega$	$\pm 0{,}7\,\%\mathrm{rdg} \pm 1\mathrm{dgt}$	$0{,}1\,\mathrm{mA}$
$20\,\mathrm{k\Omega}$	$10\,\Omega$	$\pm 0{,}7\,\%\mathrm{rdg} \pm 1\mathrm{dgt}$	$30\,\mu\mathrm{A}$
$200\,\mathrm{k\Omega}$	$100\,\Omega$	$\pm 0{,}7\,\%\mathrm{rdg} \pm 1\mathrm{dgt}$	$4\,\mu\mathrm{A}$
$2000\,\mathrm{k\Omega}$	$1\,\mathrm{k\Omega}$	$\pm 1{,}0\,\%\mathrm{rdg} \pm 2\mathrm{dgt}$	$0{,}4\,\mu\mathrm{A}$
$20\,\mathrm{M\Omega}$	$10\,\mathrm{k\Omega}$	$\pm 2{,}0\,\%\mathrm{rdg} \pm 2\mathrm{dgt}$	$40\,\mathrm{nA}$

[1] rdg: lectura del instrumento.
dgt: cantidad de dígitos de la última cifra significativa de la medición.

Cuadro 1: Tabla de tolerancias para la medición de resistencias con el *tester* modelo 3520

Medición mediante el *método de cero*: como segunda experiencia se midió una resistencia mediante el puente de Wheatstone. Se tomaron cuatro resistencias: R_1 y R_2 (reóstatos), una resistencia R_3 variable (caja de resistencias) y una resistencia R incógnita. A manera de comparar resultados, se determinó con un *tester* el valor de R previamente a efectuar la experiencia, e inmediatamente se procedió a armar el circuito (fig. 1).

Con la resistencia de protección r conectada, se varió la resistencia R_3 hasta que no circulara corriente por el galvanómetro. Sólo entonces se cortocircuitó r: de este modo nos aseguramos —antes de quitar la resistencia de protección— que por el instrumento de medición circulara una corriente baja que no pudiera dañarlo.

Con esto logramos la condición $I = 0$ sobre el galvanómetro, y por lo tanto pudimos aplicar la antedicha relación (4) entre resistencias: de esta manera se halló experimentalmente el valor de la resistencia incógnita R. El mismo pudo ser luego comparado con el obtenido mediante el multímetro.

Idénticos pasos se han seguido para determinar la otra resistencia desconocida.

Medición de caídas de tensión con un *tester*: para esta tercera experiencia se contó con tres pares de resistencias de 5,6 kΩ, 560 kΩ y 5,6 MΩ respectivamente, y se procedió a la medición de la caída de tensión sobre una de ellas, previo armado del circuito de la figura 2. Acto seguido, se calculó la caída de tensión teórica $V_{\text{leída}}$ en la susodicha resistencia

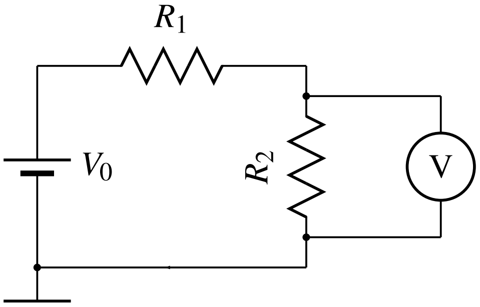

Figura 2: Circuito utilizado en las mediciones de tensión con un *tester*

mediante el uso de la siguiente fórmula:

$$V_{\text{leída}} = \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} \cdot V_0, \tag{5}$$

donde

$$R_2' = \frac{R_2 R_{\text{int}}}{R_2 + R_{\text{int}}}. \tag{6}$$

Además, fue realizada la siguiente experiencia:

Curvas Tensión-Corriente de una lamparita: medimos cómo varía la resistencia de una lamparita conforme aumenta su temperatura. Seguimos los siguientes pasos:

1. Se midió con un *tester* la resistencia de la lámpara de 12 V en frío.
2. Se armó el circuito con la lámpara y una fuente que tiene incorporados un voltímetro (que mide la tensión en los bornes de salida) y un amperímetro (que mide la corriente entregada).
3. Se colocó la tensión a cero y se llevó la perilla de limitación de corriente hasta (aproximadamente) tres cuartos de su recorrido.
4. Se fue aumentando la tensión en tramos de 0,5 V hasta llegar a 12 V, registrándose los valores de corriente y tensión para cada intervalo.
5. Se invirtieron las terminales de la lamparita y se repitieron los pasos 3 y 4.
6. Se ha efectuado un gráfico de *I versus V* para cada caso (fig. 3).

3. Resultados

3.1. Multímetro

1. Valor nominal: 5,6 kΩ.
   rdg = 5,51 kΩ.

Entonces: $\Delta R = 0{,}7\,\% \cdot 5{,}51\,\mathrm{k\Omega} + 1 \cdot 0{,}01\,\mathrm{k\Omega} = 0{,}05\,\mathrm{k\Omega}$,

$$R = 5{,}5\,\mathrm{k\Omega} \pm 0{,}1\,\mathrm{k\Omega}.$$

2. Valor nominal: $560\,\mathrm{k\Omega}$.
   rdg $= 553\,\mathrm{k\Omega}$.
   Entonces: $\Delta R = 0{,}7\,\% \cdot 553\,\mathrm{k\Omega} + 1 \cdot 1\,\mathrm{k\Omega} = 4{,}87\,\mathrm{k\Omega}$,

$$R = 553\,\mathrm{k\Omega} \pm 5\,\mathrm{k\Omega}.$$

3. Valor nominal: $5{,}6\,\mathrm{M\Omega}$.
   rdg $= 5{,}51\,\mathrm{M\Omega}$.
   Entonces: $\Delta R = 1{,}0\,\% \cdot 5{,}51\,\mathrm{M\Omega} + 2 \cdot 0{,}01\,\mathrm{M\Omega} = 0{,}08\,\mathrm{M\Omega}$,

$$R = 5{,}5\,\mathrm{M\Omega} \pm 0{,}1\,\mathrm{M\Omega}.$$

3.2. Método de cero

Reóstatos de valor conocido: $R_1 = 194\,\Omega$, $R_2 = 90\,\Omega$.

Resistencias incógnitas: $R_{\mathrm{i}1}$, $R_{\mathrm{i}2}$.

En este esquema, las resistencias variables R_{v} arrojaron los siguientes valores:

1. $R_{\mathrm{v}} = 830\,\Omega$. Aplicando luego la fórmula (4):

$$R_{\mathrm{i}1} = 385{,}05\,\Omega.$$

2. $R_{\mathrm{v}} = 200{,}89\,\Omega$ y entonces:

$$R_{\mathrm{i}2} = 92{,}3\,\Omega.$$

3.3. Caidas de tensión

1. $$\begin{aligned} R_1 = R_2 &= 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}, \\ V_0 &= 11{,}85\,\mathrm{V}, \\ R_{\mathrm{int}} &= 10000\,\mathrm{k\Omega}, \text{ con lo cual:} \end{aligned}$$

$$V_{\text{leída}} = 5{,}92\,\mathrm{V}.$$

2. $$\begin{aligned} R_1 = R_2 &= 560\,\mathrm{k\Omega}, \\ V_0 &= 11{,}85\,\mathrm{V}, \\ R_{\mathrm{int}} &= 10000\,\mathrm{k\Omega}, \text{ con lo cual:} \end{aligned}$$

$$V_{\text{leída}} = 5{,}76\,\mathrm{V}.$$

3. $$\begin{aligned} R_1 = R_2 &= 5{,}6\,\mathrm{M\Omega}, \\ V_0 &= 11{,}92\,\mathrm{V}, \\ R_{\mathrm{int}} &= 10\,\mathrm{M\Omega}, \text{ con lo cual:} \end{aligned}$$

$$V_{\text{leída}} = 4{,}66\,\mathrm{V}.$$

3.4. Lamparita

$$\left.\begin{array}{rcl} R &=& 1\,\Omega, \\ V &=& 12\,\mathrm{V}. \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} P &=& \dfrac{V^2}{R} \\ &=& \dfrac{(12\,\mathrm{V})^2}{1\,\Omega} \\ P &=& 144\,\mathrm{W}. \end{array}$$

V(V)	I(A)
0,5	0,34
1	0,53
1,5	0,61
2	0,71
2,5	0,77
3	0,84

V(V)	I(A)
3,5	0,92
4	0,98
4,5	1,05
5	1,11
5,5	1,16
6	1,22

V(V)	I(A)
6,5	1,27
7	1,32
7,5	1,36
8	1,41
8,5	1,46
9	1,51

V(V)	I(A)
9,5	1,55
10	1,58
10,5	1,63
11	1,67
11,5	1,72
12	1,75

Cuadro 2: Tabla de valores de I y de V en la experiencia de la lamparita

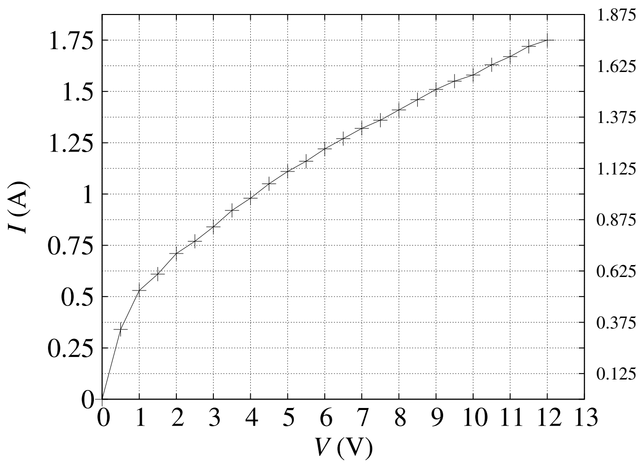

Figura 3: Gráfico de I *versus* V en la experiencia de la lamparita (interpolación lineal)

4. Discusión

Luego de realizar las mediciones y las subsiguientes comparaciones vemos que ninguno de los dos métodos —el puente de Wheatstone y el método del multímetro— supone una gran fuente de error: ambos arrojan valores aceptables respecto de lo deseado. No obstante, es importante remarcar que la precisión del segundo procedimiento depende en gran medida de la relación entre R_{int} (la resistencia interna del multímetro) y la resistencia medida R_{med}, de manera que cuando esta última es comparable con R_{int} la incerteza aumenta, mientras que con el método del puente de Wheatstone esto no ocurre.

5. Conclusiones

A priori, basándonos en la discusión, se podría pensar que el empleo de un puente de Wheatstone es lo más apropiado para cualquier caso en que se desee efectuar una medición de este tipo. Sin embargo, en la práctica resultaría excesivamente incómoda e inconveniente la utilización de este "anticuado" método, tanto así que en muchos casos sería casi imposible su implementación. Por ende, el multímetro resulta el método por excelencia para todos estos casos, y lo único que restaría es prestar especial atención a la magnitud de los elementos medidos respecto de nuestro instrumento de medición.

A. Problemas adicionales

A.1. Problema 1

Enunciado

Indique el valor y la tolerancia de las resistencias de carbón que tienen los siguientes códigos:

a) Naranja, negro, rojo, dorado.

b) Rojo, azul, marrón, plateado.

Resolución

a) $(3000 \pm 150)\ \Omega$.

b) $(260 \pm 26)\ \Omega$.

A.2. Problema 2

Enunciado

Se tienen los siguientes valores de resistencia medidos una vez con el *tester* de la práctica. En base a las especificaciones, estimar la incerteza de cada lectura (use la tabla de tolerancias (cuadro 1)):

a) $1{,}1\,\Omega$.
b) $180{,}5\,\Omega$.
c) $1500\,\Omega$.
d) $6800\,\Omega$.
e) $180{,}3\,\mathrm{k}\Omega$.
f) $4710\,\mathrm{M}\Omega$.

¿Cuál de las incertezas influye más en la calidad de la medida? ¿La porcentual o la relativa a los dígitos que indica el *tester*? Justificar.

Resolución

a) $\mathrm{rdg} = 1{,}1\,\Omega$.

$$\begin{aligned} \Delta R &= 0{,}7\,\% \cdot 1{,}1\,\Omega + 3 \cdot 0{,}1\,\Omega \\ &= 0{,}01\,\Omega + 0{,}3\,\Omega \\ \Delta R &= 0{,}31\,\Omega. \end{aligned}$$

$$R = (1{,}1 \pm 0{,}3)\ \Omega.$$

b) rdg $= 180{,}5\,\Omega$.

$$\begin{aligned} \Delta R &= 0{,}7\,\% \cdot 180{,}5\,\Omega + 3 \cdot 0{,}1\,\Omega \\ &= 1{,}26\,\Omega + 0{,}3\,\Omega \\ \Delta R &= 1{,}56\,\Omega. \end{aligned}$$

$$R = (181 \pm 2)\ \Omega.$$

c) rdg $= 1500\,\Omega$.

$$\begin{aligned} \Delta R &= 0{,}7\,\% \cdot 1500\,\Omega + 3 \cdot 100\,\Omega \\ &= 10{,}5\,\Omega + 300\,\Omega \\ \Delta R &= 310{,}5\,\Omega. \end{aligned}$$

$$R = (1500 \pm 300)\ \Omega.$$

d) rdg $= 6800\,\Omega$.

$$\begin{aligned} \Delta R &= 0{,}7\,\% \cdot 6800\,\Omega + 100\,\Omega \\ &= 47{,}6\,\Omega + 100\,\Omega \\ \Delta R &= 147{,}6\,\Omega. \end{aligned}$$

$$R = (6800 \pm 100)\ \Omega.$$

e) rdg $= 180{,}3\,\mathrm{k}\Omega$.

$$\begin{aligned} \Delta R &= 0{,}7\,\% \cdot 180{,}3\,\mathrm{k}\Omega + 0{,}1\,\mathrm{k}\Omega \\ &= 1{,}26\,\mathrm{k}\Omega + 0{,}1\,\mathrm{k}\Omega \\ \Delta R &= 1{,}36\,\mathrm{k}\Omega. \end{aligned}$$

$$R = (180 \pm 2)\ \mathrm{k}\Omega.$$

f) rdg $= 4710\,\mathrm{M}\Omega$.

$$\begin{aligned} \Delta R &= 2\,\% \cdot 4710\,\mathrm{M}\Omega + 2 \cdot 10\,\mathrm{M}\Omega \\ &= 94{,}2\,\mathrm{M}\Omega + 20\,\mathrm{M}\Omega \\ \Delta R &= 114{,}2\,\mathrm{M}\Omega. \end{aligned}$$

$$R = (4710 \pm 100)\ \mathrm{M}\Omega.$$

Es evidente que en los items b, e y f la incerteza porcentual es la que más influye en la calidad de la medida, pues el cociente que surge de dividir la incerteza porcentual por la relativa a los dígitos que indica el *tester* es, en cada caso, igual a 4,2, 12,6 y 4,71. Luego, la primera contribuye en mucho mayor medida al valor final de la incerteza que la segunda.

Lo contrario ocurre en los items a, c y d. En efecto: si en cada caso dividimos la incerteza relativa a los dígitos por la incerteza porcentual obtendremos —en forma aproximada— 30, 30 y 2, respectivamente.

A.3. Problema 3

Enunciado

Determinar la condición de equilibrio del puente de Wheatstone (fig. 1) a partir de las reglas de Kirchhoff.

Resolución

Haciendo la circulación en dos mallas distintas, obtenemos:

$$\begin{aligned} V_0 &= i_1\,(R_1+R) \\ V_0 &= i_2\,(R_2+r_3) \\ i_1\,(R_1+R) &= i_2\,(R_2+r_3)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Asimismo, como no debe circular corriente por la rama en la que se encuentra el galvanómetro, debe ser:

$$V_C = V_D. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} V_C - V_B &= V_C - 0 \\ &= V_C \\ &= i_1 R. \end{aligned}$$

$$i_1 = \frac{V_C}{R}. \tag{9}$$

$$\begin{aligned} V_D - V_B &= V_D - 0 \\ &= V_D \\ &= i_2 R_3. \end{aligned}$$

$$i_2 = \frac{V_D}{R_3}. \tag{10}$$

Con lo cual, reemplazando (9) y (10) en (7), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{R_1+R}{R}\cdot V_C &= \frac{R_2+R_3}{R_3}\cdot V_D \\ \frac{R_1}{R}+1 &= \frac{R_2}{R_3}+1 \\ \frac{R_1}{R} &= \frac{R_2}{R_3} \\ \frac{R}{R_1} &= \frac{R_3}{R_2} \\ RR_2 &= R_1R_3. \end{aligned} \tag{11}$$

A.5. Problema 5

Enunciado

Para el circuito de la figura 2, calcular las caidas de tensión sobre las resistencias y computar la suma algebraica de dichas caidas:

a) Considerando el *tester* ideal (fig. 4), con los siguientes valores:

I) $V_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}$.

II) $V_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 560\,\mathrm{k\Omega}$.

III) $V_0 = 10\,\mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 5{,}6\,\mathrm{M\Omega}$.

b) Considerando el *tester* real ($R_{\mathrm{int}} = 10\,\mathrm{M\Omega}$, fig. 5), para el mismo juego de valores del punto *a*.

Resolución

a) I)

$$\begin{aligned} V_0 &= iR_1 + iR_2 \\ V_0 &= i\,(R_1 + R_2) \\ i &= \frac{V_0}{R_1 + R_2} \\ i &= \frac{10\,\mathrm{V}}{5{,}6\,\mathrm{k\Omega} + 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}} \\ i &= 0{,}89\,\mathrm{mA}. \end{aligned} \tag{12}$$

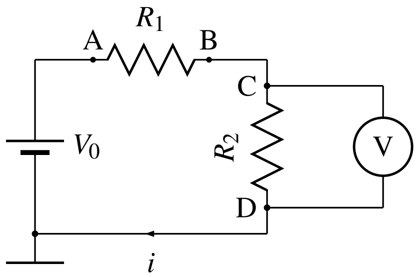

Figura 4: Circuito considerando el *tester* ideal

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{AB}} &= V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} \\ &= -iR_1 \\ &= -0{,}89\,\mathrm{mA} \cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega} \\ V_{\mathrm{AB}} &= -5\,\mathrm{V}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{CD}} &= -iR_2 \\ V_{\mathrm{CD}} &= -5\,\mathrm{V}. \end{aligned} \tag{14}$$

II)

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{AB}} &= -\frac{V_0}{R_1+R_2}\cdot R_1 \\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}}{560\,\mathrm{k\Omega}+560\,\mathrm{k\Omega}}\cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\ &= -0{,}01\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}}0{,}01\,{}^{\mathrm{V}}\!/\!{}_{\mathrm{k\Omega}}\cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\ V_{\mathrm{AB}} &= -5\,\mathrm{V}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{CD}} &= -\frac{V_0}{R_1+R_2}\cdot R_2 \\ V_{\mathrm{CD}} &= -5\,\mathrm{V}. \end{aligned} \tag{16}$$

III)

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{AB}} &= -\frac{V_0}{R_1+R_2}\cdot R_1 \\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}}{2\cdot\cancel{5{,}6\,\mathrm{M\Omega}}}\cdot\cancel{5{,}6\,\mathrm{M\Omega}} \\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}}{2} \\ V_{\mathrm{AB}} &= -5\,\mathrm{V}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{CD}} &= -\frac{V_0}{R_1+R_2}\cdot R_2 \\ V_{\mathrm{CD}} &= -5\,\mathrm{V}. \end{aligned} \tag{18}$$

b)

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} 10\,\mathrm{V} - i_1R_1 - i_2R_2 &= 0 \\ i_1R_1 + i_2R_2 &= 10\,\mathrm{V}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$i_2R_2 - i_3R_{\mathrm{int}} = 0. \tag{21}$$

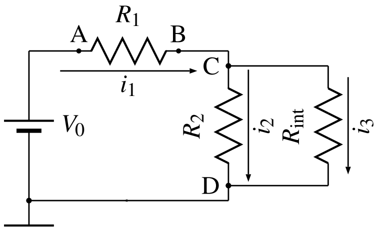

Figura 5: Circuito considerando el *tester* real

Planteando la matriz asociada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & 10\,\mathrm{V} \\ 0 & R_2 & -R_{\mathrm{int}} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{triangulando}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{10\,\mathrm{V}R_{\mathrm{int}}+10\,\mathrm{V}R_2}{(R_1+R_2)R_{\mathrm{int}}+R_1R_2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10\,\mathrm{V}R_{\mathrm{int}}}{(R_1+R_2)R_{\mathrm{int}}+R_1R_2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10\,\mathrm{V}R_2}{(R_1+R_2)R_{\mathrm{int}}+R_1R_2} \end{array}\right).$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{10\,\mathrm{V}R_{\mathrm{int}}+10\,\mathrm{V}R_2}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}}+R_1R_2}, && (22)\\ i_2 &= \frac{10\,\mathrm{V}R_{\mathrm{int}}}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}}+R_1R_2}, && (23)\\ i_3 &= \frac{10\,\mathrm{V}R_2}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}}+R_1R_2}. && (24)\end{aligned}$$

I)

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{AB}} &= -i_1R_1\\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}R_{\mathrm{int}}+10\,\mathrm{V}R_2}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}}+R_2R_1}\cdot R_1\\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}\cdot 10\,\mathrm{M\Omega}+10\,\mathrm{V}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}}{(5{,}6\,\mathrm{k\Omega}+5{,}6\,\mathrm{k\Omega})\,10\,\mathrm{M\Omega}+5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -\frac{1\,\mathrm{V}\,(100\,\mathrm{M\Omega}+56\,\mathrm{k\Omega})}{11{,}2\,\mathrm{k\Omega}\cdot 10\,\mathrm{M\Omega}+31{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -\frac{1\,\mathrm{V}\,(100000\,\mathrm{k\Omega}+56\,\mathrm{k\Omega})}{11{,}2\,\mathrm{k\Omega}\cdot 10000\,\mathrm{k\Omega}+31{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -\frac{1\,\mathrm{V}\cdot 100056\,\mathrm{k\Omega}}{112000\,\mathrm{k\Omega}^2+31{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -\frac{1\,\mathrm{V}\cdot 100056\,\mathrm{k\Omega}}{112031{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -0{,}89\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ V_{\mathrm{AB}} &= -5\,\mathrm{V}, && (25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{CD}} &= -i_2R_2\\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}R_{\mathrm{int}}}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}}+R_2R_1}\cdot R_2\\ &= -\frac{10\,\mathrm{V}\cdot 10\,\mathrm{M\Omega}}{112031{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -\frac{1\,\mathrm{V}\cdot 100\,\mathrm{M\Omega}}{112031{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -\frac{1\,\mathrm{V}\cdot 100000\,\mathrm{k\Omega}}{112031{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ &= -0{,}89\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}}\cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}\\ V_{\mathrm{CD}} &= -5\,\mathrm{V}, && (26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{CD}} &= -i_3 R_{\mathrm{int}} \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} R_{\mathrm{int}} + 10\,\mathrm{V} R_2}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}} + R_2 R_1} \cdot R_{\mathrm{int}} \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} \cdot 5{,}6\,\mathrm{k\Omega}}{112031{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V} \cdot 56\,\mathrm{k\Omega}}{112031{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 10000\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -5 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}} \cdot 10000\,\mathrm{k\Omega} \\
V_{\mathrm{CD}} &= -5\,\mathrm{V}.
\end{aligned} \tag{27}$$

II)

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{AB}} &= -i_1 R_1 \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} R_{\mathrm{int}} + 10\,\mathrm{V} R_2}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}} + R_2 R_1} \cdot R_1 \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} + 10\,\mathrm{V} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega}}{(560\,\mathrm{k\Omega} + 560\,\mathrm{k\Omega})\,10\,\mathrm{M\Omega} + 560\,\mathrm{k\Omega} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega}} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V}\,(100\,\mathrm{M\Omega} + 5600\,\mathrm{k\Omega})}{11{,}2\,\mathrm{k\Omega} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} + 31{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V}\,(100000\,\mathrm{k\Omega} + 5600\,\mathrm{k\Omega})}{1120\,\mathrm{k\Omega} \cdot 10000\,\mathrm{k\Omega} + 31{,}36\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V} \cdot 105600\,\mathrm{k\Omega}}{11200000\,\mathrm{k\Omega}^2 + 313600\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V} \cdot 105600\,\mathrm{k\Omega}}{11513600\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -9{,}17 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
V_{\mathrm{AB}} &= -5{,}14\,\mathrm{V},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{CD}} &= -i_2 R_2 \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} R_{\mathrm{int}}}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}} + R_2 R_1} \cdot R_2 \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega}}{11513600\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V} \cdot 100\,\mathrm{M\Omega}}{11513600\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V} \cdot 100000\,\mathrm{k\Omega}}{11513600\,\mathrm{k\Omega}^2} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
&= -8{,}69 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}} \cdot 560\,\mathrm{k\Omega} \\
V_{\mathrm{CD}} &= -4{,}86\,\mathrm{V},
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{CD}} &= -i_3 R_{\text{int}} \\
&= -\frac{10\,\text{V} R_{\text{int}} + 10\,\text{V} R_2}{(R_1 + R_2)\, R_{\text{int}} + R_2 R_1} \cdot R_{\text{int}} \\
&= -\frac{10\,\text{V} \cdot 560\,\text{k}\Omega}{11513600\,\text{k}\Omega^2} \cdot 10\,\text{M}\Omega \\
&= -\frac{1\,\text{V} \cdot 5600\,\text{k}\Omega}{11513600\,\text{k}\Omega^2} \cdot 10000\,\text{k}\Omega \\
&= -4{,}86 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{V}}{\text{k}\Omega} \cdot 10000\,\text{k}\Omega \\
V_{\text{CD}} &= -4{,}86\,\text{V}. \qquad (30)
\end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned}
V_{\text{AB}} &= -i_1 R_1 \\
&= -\frac{10\,\text{V} R_{\text{int}} + 10\,\text{V} R_2}{(R_1 + R_2)\, R_{\text{int}} + R_2 R_1} \cdot R_1 \\
&= -\frac{10\,\text{V} \cdot 10\,\text{M}\Omega + 10\,\text{V} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega}{(5{,}6\,\text{M}\Omega + 5{,}6\,\text{M}\Omega)\, 10\,\text{M}\Omega + 5{,}6\,\text{M}\Omega \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -\frac{1\,\text{V}\,(100\,\text{M}\Omega + 56\,\text{M}\Omega)}{11{,}2\,\text{M}\Omega \cdot 10\,\text{M}\Omega + 31{,}36\,\text{M}\Omega^2} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -\frac{1\,\text{V} \cdot 156\,\text{M}\Omega}{112\,\text{M}\Omega^2 + 31{,}36\,\text{M}\Omega^2} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -\frac{1\,\text{V} \cdot 156\,\text{M}\Omega}{143{,}36\,\text{M}\Omega^2} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -1{,}09\,\frac{\text{V}}{\text{M}\Omega} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
V_{\text{AB}} &= -6{,}09\,\text{V}, \qquad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{CD}} &= -i_2 R_2 \\
&= -\frac{10\,\text{V} R_{\text{int}}}{(R_1 + R_2)\, R_{\text{int}} + R_2 R_1} \cdot R_2 \\
&= -\frac{10\,\text{V} \cdot 10\,\text{M}\Omega}{143{,}36\,\text{M}\Omega^2} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -\frac{1\,\text{V} \cdot 100\,\text{M}\Omega}{143{,}36\,\text{M}\Omega^2} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -\frac{1\,\text{V} \cdot 100\,\text{M}\Omega}{143{,}36\,\text{M}\Omega^2} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
&= -0{,}70\,\frac{\text{V}}{\text{M}\Omega} \cdot 5{,}6\,\text{M}\Omega \\
V_{\text{CD}} &= -3{,}91\,\text{V}, \qquad (32)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{CD}} &= -i_3 R_{\mathrm{int}} \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} R_{\mathrm{int}} + 10\,\mathrm{V} R_2}{(R_1+R_2)\,R_{\mathrm{int}} + R_2 R_1} \cdot R_{\mathrm{int}} \\
&= -\frac{10\,\mathrm{V} \cdot 5{,}6\,\mathrm{M\Omega}}{143{,}36\,\mathrm{M\Omega}^2} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} \\
&= -\frac{1\,\mathrm{V} \cdot 56\,\mathrm{M\Omega}}{143{,}36\,\mathrm{M\Omega}^2} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} \\
&= -0{,}39\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{M\Omega}} \cdot 10\,\mathrm{M\Omega} \\
V_{\mathrm{CD}} &= -3{,}91\,\mathrm{V}. \qquad (33)
\end{aligned}
$$