

RESOLUCION PROPUESTA DE MODELO: TEMA 1 DEL 03.08.04

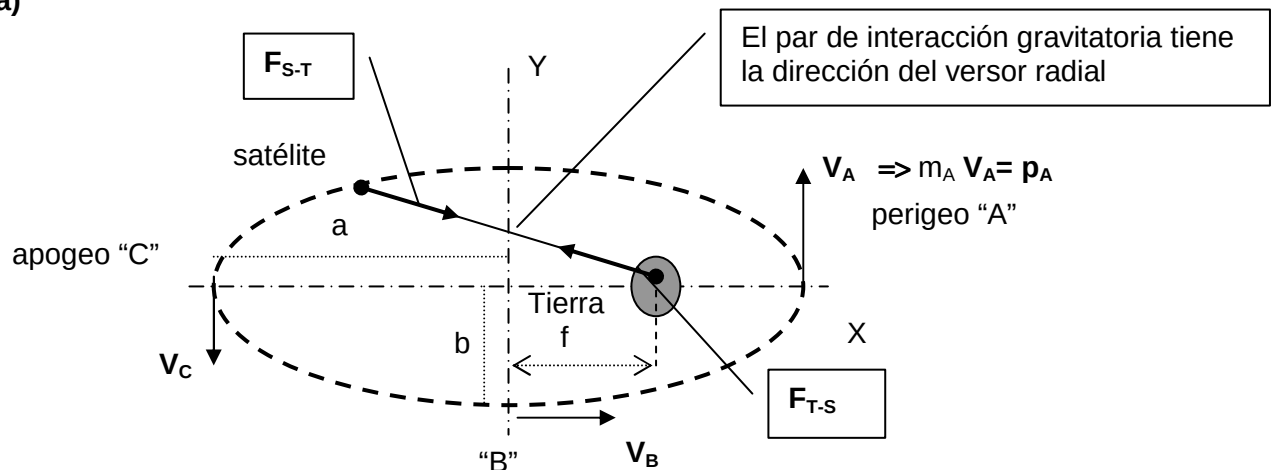
[\[volver a enunciado\]](#)

Proponemos una resolución abreviada para que el estudiante tenga una orientación sobre los temas a tratar; reconstruya su propia solución y haga las consultas personales a los docentes. Luego si desea, para mayores detalles e introducción teórica se introducen enlaces en cada ejercicio.

1) [\[detalle # 1 a\]](#)

Para el caso del ejercicio:

1 a)



La fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el satélite (F_{S-T}) es de dirección radial en el sistema polar con centro en el centro de la Tierra (si suponemos que la masa del satélite es mucho menor que la masa terrestre). Sino podemos considerar la masa reducida del satélite, para el sistema aislado Tierra-satélite.

El par de interacción correspondiente es central (fuerzas centrales).

Entonces para $m \ll M$, respecto del centro de la Tierra, vemos que los torques de las fuerzas externas sobre el satélite son nulos. Por lo tanto se debe conservar el momento cinético o angular del satélite respecto del centro de la Tierra.

$$\tau^O = \vec{0} \rightarrow \rightarrow \frac{d\vec{L}^O}{dt} = \vec{0} \rightarrow \rightarrow \vec{L}^O = \text{cte. en toda la órbita}$$

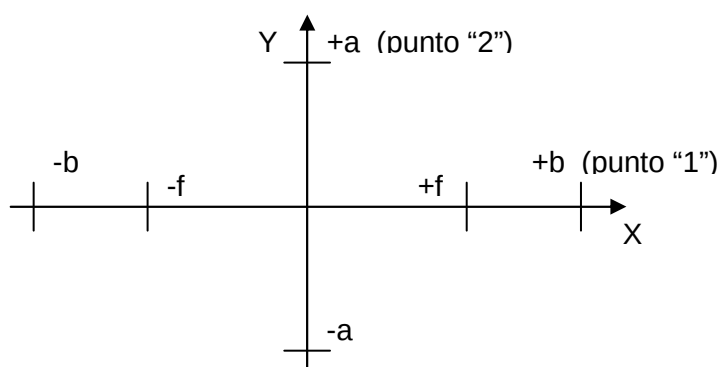
Calculemos para los puntos "A", "B", "C":

$$L_A^O = \vec{r}_{A-T} \times \vec{p}_A = (a - f)\vec{i} \times mV_A\vec{j} = m(a - f)V_A\vec{k}$$

$$L_B^O = \vec{r}_{B-T} \times \vec{p}_B = (-f\vec{i} - b\vec{j}) \times mV_B\vec{i} = m.bV_B\vec{k}$$

$$L_C^O = \vec{r}_{C-T} \times \vec{p}_C = (-a - f)\vec{i} \times (-mV_C)\vec{j} = m(a + f)V_C\vec{k}$$

En una elipse se pueden relacionar los semiejes "a" ; "b"; con la distancia al foco "f":



La cónica llamada **elipse** se define como: lugar geométrico de los puntos donde las distancias sumadas a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
 Entonces:

$$\text{Punto1: } (b - f) + (b + f) = D \Rightarrow D = 2b \Rightarrow D^2 = 4b^2$$

de la igualación sacamos:

$$\text{Punto2: } 2\sqrt{(a^2 + f^2)} = D \Rightarrow D^2 = 4(a^2 + f^2)$$

$$a^2 + f^2 = b^2 \Rightarrow f^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow f = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$$

Vamos a expresar los módulos de momentos cinéticos o angulares expresados anteriormente, en función de los semiejes de la elipse y de allí calcularemos las velocidades en los puntos correspondientes:

$$L_A^O = m(a - \sqrt{b^2 - a^2})V_A$$

$$L_B^O = m.bV_B \quad \text{Como los tres momentos son iguales podemos calcular las velocidades}$$

$$L_C^O = m(a + \sqrt{b^2 - a^2})V_C$$

$$\frac{L_B^O}{m.b} = V_B = \frac{(a - \sqrt{b^2 - a^2})V_A}{b} \rightarrow \text{vector} \rightarrow \vec{V}_B = \frac{(a - \sqrt{b^2 - a^2})V_A}{b} \hat{i}$$

$$\frac{L_C^O}{m(a + \sqrt{b^2 - a^2})} = V_C = \frac{(a - \sqrt{b^2 - a^2})V_A}{(a + \sqrt{b^2 - a^2})} \rightarrow$$

$$V_C = \frac{(a - \sqrt{b^2 - a^2})^2 V_A}{(a^2 - b^2 - a^2)} \rightarrow V_C = \frac{(a - \sqrt{b^2 - a^2})^2 V_A}{2a^2 - b^2} \rightarrow$$

$$\text{vector} \rightarrow \vec{V}_C = -\frac{(a - \sqrt{b^2 - a^2})^2 V_A}{2a^2 - b^2} \hat{j}$$

1b)

La aceleración total tiene una única componente radial en un sistema de coordenadas polares con origen en la Tierra, $(\rho; \theta)$. Debido a que la única fuerza sobre el satélite "s" es la interacción gravitatoria, que es una fuerza central y tiene la dirección radial "p"

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} \cdot \vec{\rho} - r \omega^2 \cdot \vec{\rho}$$

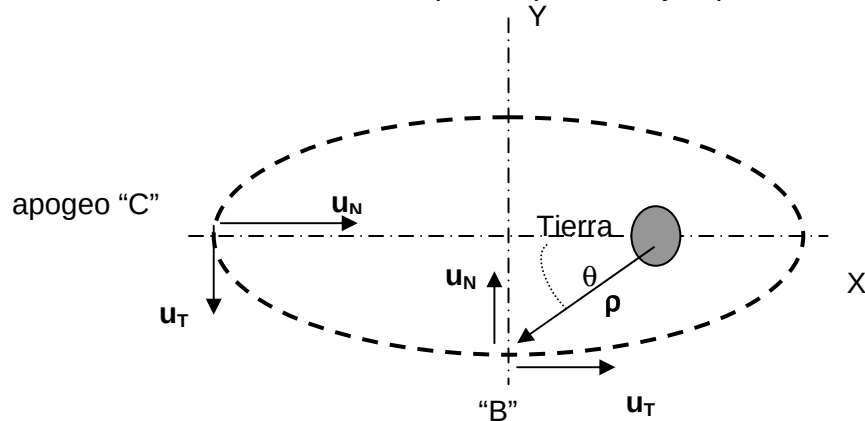
Entonces por la segunda ley de Newton y su ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_{ST} = m_s \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega^2 \right) \cdot \vec{\rho}$$

$$\vec{F}_{ST} = -\frac{Gm_s m_T}{r^2} \vec{\rho} \quad \text{igualamos:} \quad \vec{a} = -\frac{Gm_T}{r^2} \cdot \vec{\rho} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \omega^2 \right) \cdot \vec{\rho}$$

$$\rightarrow \vec{a} = -\frac{Gm_T}{r^2} \cdot \vec{\rho} \quad (\text{ecuación \# 9})$$

Si lo expresamos en coordenadas intrínsecas para el punto "B" y el punto "C":



$$\vec{\rho} = -\sin \theta \vec{u}_T - \cos \theta \vec{u}_N \quad (\text{ecuación \# 10})$$

La aceleración es radial y varía con la inversa del cuadrado del radio "r", sus componentes intrínsecas serán variables según la orientación de los versores respecto del foco de la elipse. En la dirección del versor normal " $\vec{u}_N$ " se encontrará siempre el centro de curvatura de la trayectoria elíptica, pero no necesariamente el foco de ésta. Si la trayectoria fuese circular, entonces coincidirían el foco y el centro de curvatura; la circunferencia es un caso particular de elipse.

En el apogeo "C", la dirección del versor " $\vec{u}_N$ " coincide con el versor radial " $\vec{\rho}$ " pero el sentido es opuesto, en ese punto la aceleración tangencial es nula y el módulo de la velocidad es constante en ese instante (mínima en este caso). Algo similar ocurre en el perigeo "A" (la velocidad es máxima en este caso).

La componente tangencial de la aceleración tiene sentido coincidente con la velocidad, durante una porción de la trayectoria y en ella el módulo de la velocidad aumenta. Análogamente durante la otra porción el módulo disminuye porque la aceleración tangencial es opuesta a la velocidad.

Componentes intrínsecas de la aceleración en el punto "B":

$$\sin \theta = \frac{b}{r} \quad ; \quad \cos \theta = \frac{f}{r} \quad ; \text{ y las ecuaciones \#9 \#10:}$$

$$\vec{a}_B = \frac{-Gm_T}{r^2} \left(-\frac{b}{r} \vec{u}_T - \frac{f}{r} \vec{u}_N \right)$$

$$\vec{a}_B = \frac{Gm_T}{r^3} (b\vec{u}_T + f\vec{u}_N) \quad \text{entonces recordamos que estamos aplicando en "B":}$$

$$\vec{a}_B = \frac{Gm_T}{(2b^2 - a^2)^{3/2}} (b\vec{u}_T + \sqrt{b^2 - a^2} \vec{u}_N)$$

Componentes intrínsecas de la aceleración en el punto "C":

$$\sin \theta = 0 \quad ; \quad \cos \theta = 1 \quad ; \text{ y las ecuaciones \#9 \#10:}$$

$$\vec{a}_C = \frac{-Gm_T}{r^2} (0\vec{u}_T - \vec{u}_N) \quad \text{análogamente:}$$

$$\vec{a}_C = \frac{Gm_T}{2b(b + (b^2 - a^2)^{1/2}) - a^2} \vec{u}_N$$

1 c)

En el sistema {Tierra; satélite} que se considera aislado, se mantiene constante el momento angular o cinético respecto de la Tierra. Pues la fuerza central realiza torque nulo respecto de la Tierra. El satélite se considera de masa pequeña y la Tierra se considera homogénea. En caso contrario habría que tomar como punto de reducción al centro de masa del sistema.

Se verifica que la fuerza de atracción gravitatoria es una fuerza conservativa, y no hay trabajo de ninguna fuerza no conservativa (por ejemplo fuerzas tidales o que provocan las mareas, actividad

atmosférica y actividades sobre la Tierra se consideran despreciables). Entonces se conserva la energía mecánica de este sistema aislado.

2) La resolución propuesta está en el enlace:
[\[detalle # 2 a\]](#)

3) [\[detalle # 3 a\]](#)

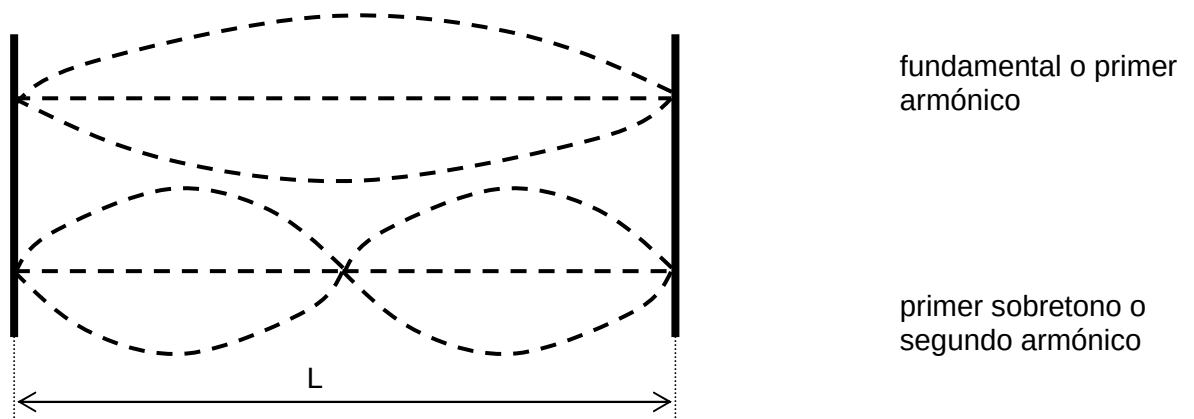
3 a y b)

La cuerda fija en ambos extremos presenta nodos en dichos extremos y con cada sobretodo ascendente se presenta un nuevo nodo intermedio.

La ecuación # 3 aplicada a este caso, con origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la cuerda; tiene el coeficiente "D=0":

$$\varepsilon = C \sin kx \cos \omega t$$

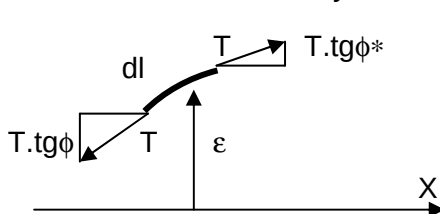
Donde: "C" es el doble de la amplitud de las ondas viajeras que se superponen para formar la onda estacionaria.



La relación entre la longitud de la cuerda fija en ambos extremos y la longitud de onda de los modos estacionarios es (la formulamos a partir de la figura anterior):

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (\text{ecuación \# 4})$$

La velocidad de propagación la calculamos a partir de las condiciones de deformación y de inercia de la cuerda de sección constante y distribución de masa homogénea que se propone estudiar.



La elongación desde la posición de equilibrio es: "ε" para el elemento de cuerda "dl" estudiado. La componentes transversales de las fuerzas se calcularán para amplitudes pequeñas, entonces la tangente del ángulo se puede hacer igual al ángulo medido en radianes.

La cuerda es de sección constante, de distribución lineal de masa "μ" es constante la cuerda se somete a una tracción de módulo "T".

$$dm = \mu \cdot dl \quad \mu \cdot dx \therefore \mu = \frac{dm}{dx} \quad \text{suponiendo } \phi \rightarrow 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \text{tg } \phi \rightarrow \text{si calculamos la resultante de las fuerzas transversales sobre el elemento de cuerda}$$

$$\text{Sumamos: } T \cdot \text{tg } \phi^* - T \cdot \text{tg } \phi = T \cdot d(\text{tg } \phi) = T \cdot d\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right)$$

Según la segunda ley de Newton la resultante de la fuerza la podemos expresar como masa por aceleración:

$$T \cdot d\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right) = dm \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \rightarrow \text{diferenciando por } x \text{ m.a m.} \rightarrow T \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

Entonces obtenemos la ecuación diferencial de onda para la cuerda y la velocidad de propagación:

$$T \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = \mu \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} = \frac{\mu}{T} \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \rightarrow v^2 = \frac{T}{\mu}$$

Volvemos a los modos estacionarios para la cuerda con extremos fijos; de la ecuación # 4:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \lambda_n f_n \rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n \sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2L} \quad \text{para } n=1;2;3;\dots \text{ (ecuación \# 5)}$$

Aplicación numérica:

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= 450 \text{ Hz} \\ f_i &= 375 \text{ Hz} \end{aligned} \quad \text{si aplicamos la ecuación \# 5 a cada frecuencia y hacemos el cociente m.a m.:}$$

$$\frac{450}{375} = \frac{i+1}{i} \rightarrow \frac{6}{5} = \frac{i+1}{i} \quad \text{Entonces la frecuencia del fundamental es: } f_1 = \frac{375}{5} \text{ Hz} = \frac{450}{6} \text{ Hz} = 75 \text{ Hz}$$

$$\text{De la ecuación \# 5: } f_1 = \frac{1 \sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2L} \rightarrow L = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2 f_1} = \frac{\sqrt{\frac{360 \text{ N}}{4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}}}}}{2 \cdot 75 \text{ Hz}} = 2 \text{ [m]}$$

3 c)

La aplicación de la ecuación # 3:

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \cdot \sin kx \cdot \cos \omega t$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_1} \text{ como } \lambda_1 = 2L \therefore k = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{2[m]} \rightarrow k = \frac{\pi}{2} [m^{-1}]$$

$$\omega = 2\pi f_1 = 150\pi [s^{-1}]$$

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \cos(150\pi t) \quad \text{Con } x \text{ medido en [m] y } t \text{ medido en [s].}$$

4 a)

[detalle #4 a]

Emplearemos teoría paraxial:

los rayos se consideran con abertura angular pequeña respecto del eje principal y los rayos son centrales es decir próximos al eje principal. El problema se analiza en el plano que contiene al rayo incidente y al refractado.

Convención de signos:

Adoptaremos un eje vertical normal al eje principal "y" con signo positivo cuando se mida por sobre el eje principal.

Adoptaremos un eje horizontal coincidente con el eje principal "x" con signo positivo cuando se mida desde el polo de la dioptra hacia el lado del objeto real (punto de donde proviene la luz), vale decir que el sentido positivo del eje es contrario a la luz incidente.

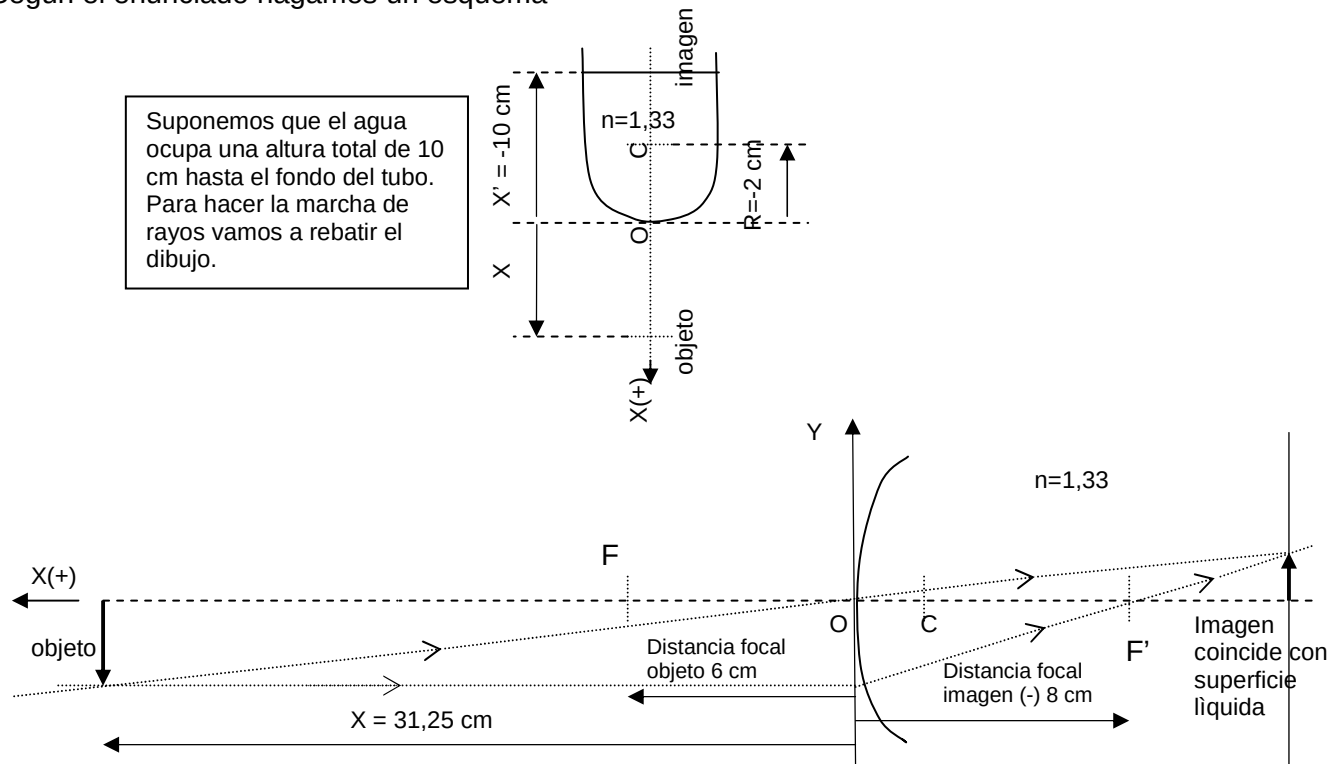
Focos Principales:

Sobre el eje principal podemos distinguir dos puntos que tienen una propiedad importante.

- El foco principal imagen, es el punto donde se hallaría la imagen, de un punto luminoso real colocado a una distancia infinita del polo de la dioptra sobre el eje principal. El plano normal al eje al cual pertenece este foco, se denomina plano focal imagen y cada punto de este plano se denomina foco secundario imagen.
- El foco principal objeto, es el sitio donde se debe colocar un punto objeto real, para que su imagen se encuentre a distancia infinita del polo de la dioptra sobre el eje principal. El plano normal al eje al cual pertenece este foco, se denomina plano focal objeto y cada punto de este plano se denomina foco secundario objeto.

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R} = \frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} \quad \text{Ecuación de las dioptras esféricas.}$$

Según el enunciado hagamos un esquema



Esta es la marcha o esquema de rayos que se pide, dibujada en función de los elementos calculados a continuación: [\[detalle #4b\]](#)

En nuestro caso el radio de la dioptra y la distancia imagen son negativos, calculemos las distancias focales:

$$f = \frac{-n_1}{n_2 - n_1} R = \frac{-1}{1,33 - 1} (-2) [cm] = 6 [cm]$$

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = \frac{1,33}{1,33 - 1} (-2) [cm] = -8 [cm]$$

Calculemos la posición del objeto pedida:

$$\frac{(n_2 - n_1)}{R} = \frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} \Rightarrow \frac{1,33 - 1}{-2} = \frac{1,33}{-10} - \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2}{0,33 - 0,266} = 31,25 [cm] \rightarrow x > 0$$

Permitámonos un pasito más:

El agrandamiento o aumento lateral de la dioptra: es la relación entre el tamaño (con su signo) de la imagen, sobre el tamaño del objeto.

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{n_1 X'}{n_2 X} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1 \cdot (-10)}{1,33 \cdot 25} = -0,24$$

Entonces el objeto es real y la imagen también. El objeto es más grande que la imagen y ésta es invertida respecto del objeto.

4 b)

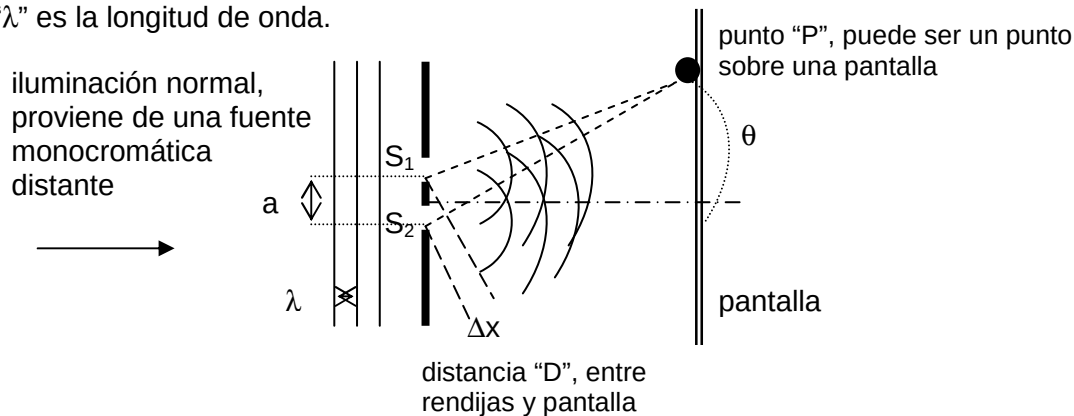
Para el estudio del patrón de intensidad que se observa cuando se ilumina con luz monocromática un par de rendijas alargadas vamos a distinguir dos fenómenos físicos, que luego superpuestos darán el resultado buscado.

En realidad no hay una distinción taxativa entre interferencia y difracción, pero es necesario reconocer dos aspectos del fenómeno que se produce al iluminar las dos rendijas. Entonces la cuestión de suponer dos rendijas como dos fuentes puntuales coherentes la analizaremos como "experimento de Young para dos rendijas" y el hecho de que la rendija es de ancho finito, considerando infinitas fuentes secundarias de Huygens, en ella, lo analizaremos considerando "difracción de campo lejano o de Fraunhofer".

Experimento de Young: [detalle]

"a" es la distancia entre rendijas.

"λ" es la longitud de onda.

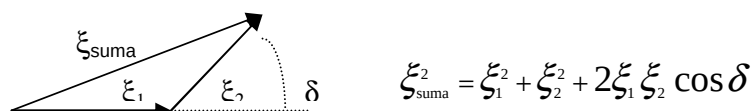


Coherencia (breve introducción)

Para la observación de franjas de interferencia, de la difracción o de la interferencia modulada por la difracción sobre la pantalla, en un punto "P" genérico de la pantalla, debemos considerar que la diferencia de fase "δ" de las ondas, que alcanzan ese punto desde diferentes fuentes, debe ser bien definida y sostenida sin alteración en el tiempo. Bajo estas condiciones (simplificadas de coherencia temporal) se dice que las fuentes luminosas S₁ y S₂, emiten en forma coherentes. Entonces se puede aplicar la superposición de oscilaciones por método fasorial para hallar la intensidad de iluminación de la pantalla en el punto "P".

Si en cambio, S₁ y S₂, son dos fuentes incandescentes independientes, no vale el esquema de interferencia de fuentes coherentes, y la iluminación en la pantalla será media y relativamente uniforme.

Fasores:



Como intensidad es proporcional a amplitud al cuadrado: $I \propto \xi^2$

$$I_s = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

Vamos a suponer que las intensidades dadas por cada una de las fuentes actuando separadamente son iguales: $I = I_1 = I_2$ entonces $I_s = 2I_1(1 + \cos \delta)$

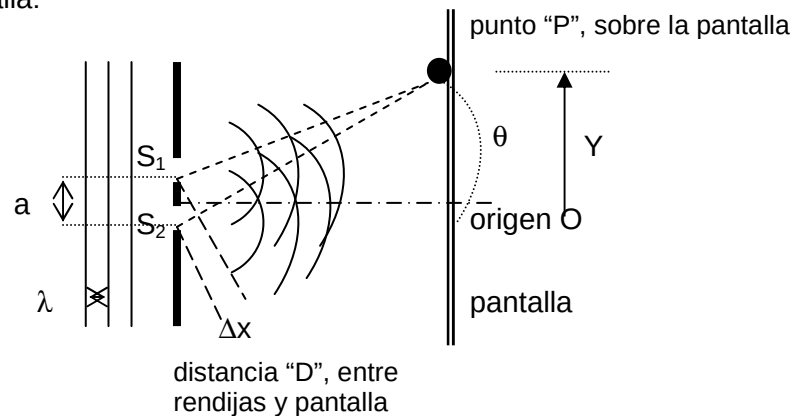
Se dice que hay interferencias constructiva, o hay un máximo si: $\cos \delta = +1$ entonces: $I_s = 4I_1$

Se dice que hay interferencias destructiva, o hay un mínimo si: $\cos \delta = -1$ entonces: $I_s = 0$

Si las fuentes no son coherentes, o en el caso ideal decimos son completamente incoherentes, el coseno es variable en el tiempo (δ variable) y su valor medio (su integral en un período de tiempo, dividida por ese período) es nulo.

Por lo tanto $I_s = I_1 + I_2 = 2I$

Volvemos a la cuestión del experimento de Young, ahora para calcular la posición de los máximos y mínimos sobre la pantalla:



Si la coordenada "Y" se toma desde el centro del máximo principal y se puede asumir que $Y \ll D$ las ecuaciones de máximo y mínimo se pueden expresar simplificada como sigue:

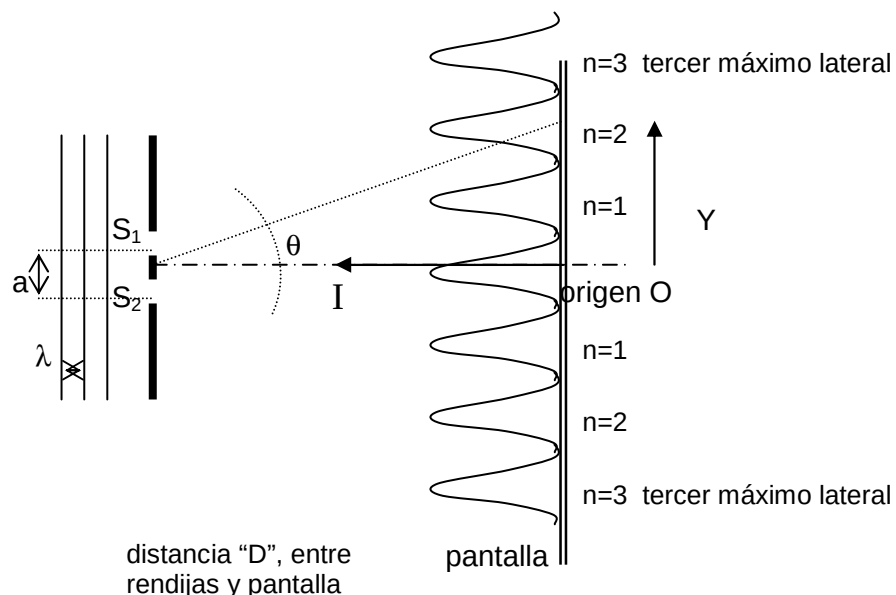
$$\sin \theta \quad \text{tg} \theta = \frac{Y}{D} \rightarrow$$

$$n\lambda = a \cdot \frac{Y}{D} \rightarrow Y = \frac{n\lambda D}{a} \quad \text{con } n=1;2;3;\dots \text{ MÁXIMOS DE INTERFERENCIA}$$

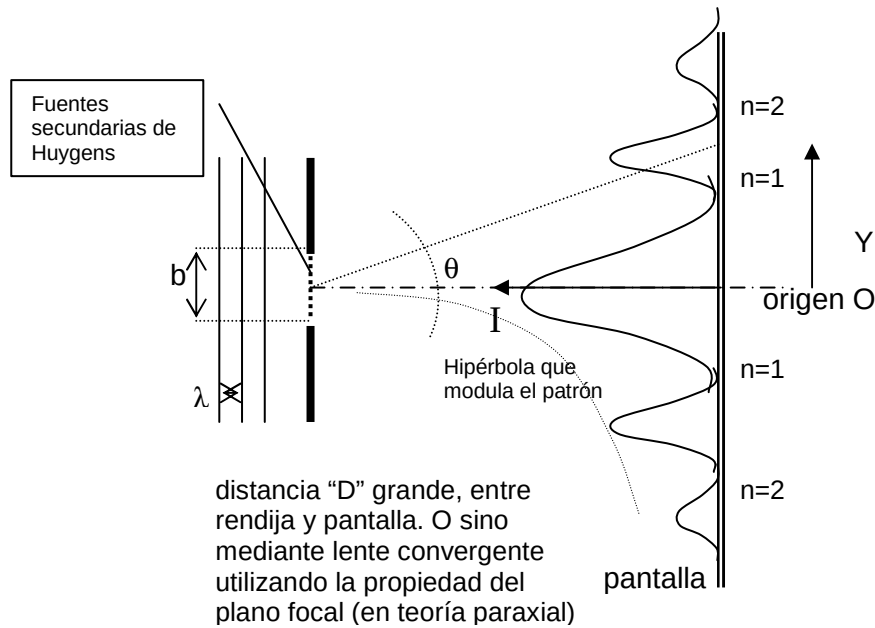
$$\text{impar} \cdot \frac{\lambda}{2} = a \cdot \frac{Y}{D} \rightarrow Y = \frac{\text{impar} \lambda D}{2a} \quad \text{MÍNIMOS DE INTERFERENCIA}$$

La ecuación de la forma el patrón de interferencia solamente, será: $I_s = 4I_1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} a \cdot \frac{Y}{D} \right]$

que es de la forma: $I_s = A \cos^2 [B \cdot Y]$ que se grafica a continuación:



Difracción de Fraunhofer o de campo lejano [\[detalle\]](#)



$b \sin \theta = n \lambda$ condición de mínimos de difracción de Fraunhofer.

$y = \frac{n \lambda D}{b}$ posición de los mínimos de difracción (simplificada para $D \gg y$)

Interferencia y difracción con doble ranura:

Si tomamos la ecuación #4.1 de interferencia de Young por doble ranura, modulada por la ecuación #4.2 de difracción de Fraunhofer, tenemos una expresión adecuada para este caso.

$$I_s = 4I_1 \cos^2 \left[\frac{\pi a \cdot y}{\lambda \cdot D} \right] \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b \cdot y}{\lambda \cdot D} \right)}{\left(\frac{\pi b \cdot y}{\lambda \cdot D} \right)^2} \quad (\text{ecuación \#4.3})$$

Interferencia modulada por difracción para dos rendijas alargadas, donde:

a es la distancia entre ranuras

b es el ancho de cada ranura

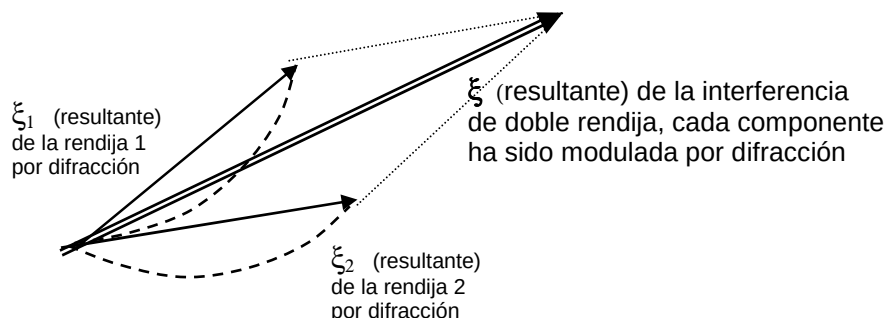
y es la posición sobre la pantalla

D es la distancia desde el plano de las ranuras a la pantalla

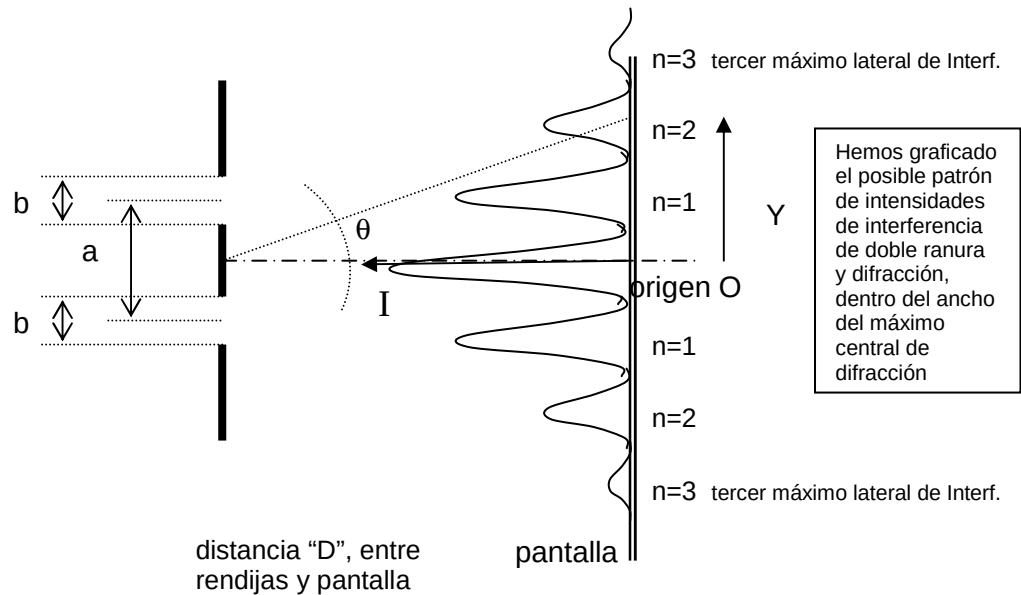
λ es la longitud de onda.

I_1 es la intensidad sobre la pantalla dada por una única rendija en el máximo central.

El diagrama de fasores correspondiente a la superposición es:



El patrón de intensidad sobre la pantalla esquemáticamente es:
 (corresponde al patrón de intensidades de interferencia modulado por la difracción)



Para responder a las cuestiones que propone el enunciado en la parte "b", nos referimos a la ecuación #4.3 y anteriores ($b \sin \theta = n\lambda$ difracción); ($n\lambda = a \cdot \frac{y}{D} \rightarrow y = \frac{n\lambda D}{a}$ con $n=1;2;3;\dots$ máx. interferencia):

4 b-1) Si aumenta la longitud de onda λ de la fuente monocromática, se hace más ancho el máximo central de difracción, se separan más del máximo central los máximos de interferencia y los mínimos de interferencia.

4 b-2) Si aumenta la separación entre ranuras, el ancho del máximo central de difracción no varía, pero se acercan al máximo central los máximos de interferencia y los mínimos de interferencia.

4 b-3) Si aumenta el ancho de las ranuras, el ancho del máximo central de difracción disminuye y también se acercan al centro los mínimos de difracción, pero no varía la posición de los máximos y mínimos de interferencia.

[\[top\]](#) [\[volver a resolución\]](#) [\[volver a modelos\]](#)