

Teorema de Fuchs

Hemos visto que si $P(z)$ y $Q(z)$ son funciones analíticas, entonces las soluciones de la ecuación $y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0$ son analíticas. Parecería razonable esperar que si $P(z)$ y $Q(z)$ tienen un polo en z_0 , las soluciones de la ecuación diferencial también tengan un polo en ese punto.

Es fácil ver que esto no es cierto en general ya que, por ejemplo, una solución de la ecuación $y'' + \frac{1}{z^2}y' - \frac{1}{z^3}y = 0$ es la función $-ze^{1/z}$. El desarrollo de Laurent de dicha función en un entorno a $z = 0$ tiene infinitos términos con potencias negativas, o sea tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Sea

$$A(z)y'' + B(z)y' + C(z)y = 0$$

una ecuación diferencial homogénea de segundo orden cuyos coeficientes son funciones analíticas en una cierta región. Dividiendo por $A(z)$ ambos miembros de la ecuación anterior se tiene una ecuación de la forma

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0. \quad (1)$$

Decimos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un *punto singular* de la ecuación (1) si lo es de p y/o de q .

En muchos casos interesa obtener soluciones de la ecuación (1) definidas en $0 < |z - z_0| < R$, donde z_0 es un punto singular, y de la forma

$$z^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (2)$$

con $a_0 \neq 0$, y $r \in \mathbb{C}$.

Un punto z_0 tal que sea una singularidad de la ecuación y tal que exista una solución de la forma 2 se dice que es un *punto singular regular* o un *punto de Fuchs*.

Teorema de Fuchs: z_0 es un punto singular regular o un punto de Fuchs de la ecuación (1) si y sólo si

1. z_0 es un punto singular de p y/o q y
2. $(z - z_0)p(z)$ y $(z - z_0)^2 q(z)$ son analíticas en z_0 .

Consideremos, por simplicidad, $z_0 = 0$. De lo anterior, $p(z)$ tiene a lo sumo un polo simple y $q(z)$ a lo sumo un polo de orden dos en z_0 , por lo tanto podemos escribirlas como:

$$p(z) = \frac{A}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \quad \text{y} \quad q(z) = \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n. \quad (3)$$

Buscamos soluciones de la ecuación (1) de la forma $z^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $a_0 \neq 0$, y $r \in \mathbb{C}$.

Podemos considerar, por la linealidad de la ecuación, que $a_0 = 1$ y así la solución toma la forma

$$y(z) = z^r + a_1 z^{r+1} + \dots + a_n z^{r+n} + \dots \quad (4)$$

Si reemplazamos (3) y (4) en la ecuación diferencial (1) tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n z^{n+r-2} + \left(\frac{A}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n z^{n+r-1} \right) + \\ & + \left(\frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r} \right) = 0 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} & [r(r-1) z^{r-2} + a_1(r-1) r z^{r-1} + \dots + a_n(r+n)(r+n-1) z^{r+n-2} + \dots] + \\ & + \left[\frac{A}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots \right] [r z^{r-1} + a_1(r+1) z^r + \dots + a_n(r+n) z^{r+n-1} + \dots] + \\ & + \left[\frac{B}{z^2} + \frac{C}{z} + \beta_0 + \beta_1 z + \dots \right] [z^r + a_1 z^{r+1} + \dots + a_n z^{r+n} + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando las series tenemos

$$\begin{aligned} & r(r-1) z^{r-2} + a_1(r-1) r z^{r-1} + \dots + a_n(r+n)(r+n-1) z^{r+n-2} + \dots + \\ & + A r z^{r-2} + A a_1(r+1) z^{r-1} + \dots + A a_n(r+n) z^{r+n-2} + \dots + \alpha_0 r z^{r-1} + \alpha_0 a_1(r+1) z^r + \dots + \\ & + a_n(r+n) z^{r+n-1} + \dots + \alpha_1 r z^r + \alpha_1 a_1(r+1) z^{r+1} + \dots + \alpha_1 a_n(r+n) z^{r+n} + \dots + B z^{r-2} + \\ & + B a_1 z^{r-1} + B a_2 z^r + \dots + B a_n z^{r+n-2} + \dots + C z^{r-1} + C a_1 z^r + C a_2 z^{r+1} + \dots + C a_n z^{r+n-1} + \\ & + \dots + \beta_0 z^r + \beta_0 a_1 z^{r+1} + \beta_0 a_2 z^{r+2} + \dots + \beta_0 a_n z^{r+n} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Reordenando adecuadamente llegamos a

$$\begin{aligned} & r(r-1) z^{r-2} + a_1(r-1) r z^{r-1} + \dots + a_n(r+n)(r+n-1) z^{r+n-2} + \dots + A r z^{r-2} + \\ & + [A a_1(r+1) + \alpha_0 r] z^{r-1} + [A a_2(r+2) + \alpha_0 a_1(r+1) + \alpha_1 r] z^r + \dots + B z^{r-2} + \\ & (B a_1 + C) z^{r-1} + (B a_2 + C a_1 + \beta_0) z^r + \dots = 0. \end{aligned}$$

O sea, podemos escribir la ecuación de la forma

$$z^{r-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 0,$$

lo que implica que todos los coeficientes b_n son iguales a cero. Entonces

$b_0 = r(r-1) + Ar + B = 0$. Luego si llamamos *polinomio indicial* al polinomio $I(r) = r(r-1) + Ar + B$, obtenemos a partir de sus raíces los valores de r que permiten obtener las soluciones de la forma (3).

$$b_1 = (r+1)ra_1 + A(r+1)a_1 + \alpha_0 r + B a_1 + C = \underbrace{[r(r+1) + A(r+1) + B]}_{I(r+1)} a_1 + (\alpha_0 r + C) = 0$$

Luego, $I(r+1)a_1 + \alpha_0 r + C = 0$.

En general, si se anula el coeficiente de z^{n+r-2} se obtiene:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n(r+n)(r+n-1) + a_n(r+n)A + P_n + a_n B + Q_n =, \\ &= \underbrace{[(r+n)(r+n-1) + (r+n)A + B]}_{I(r+n)} a_n + P_n + Q_n = 0 \end{aligned}$$

donde P_n es función de $a_1, \dots, a_{n-1}$ y de $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ y Q_n es función de $a_1, \dots, a_{n-1}$ y de $C, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}$.

Luego la fórmula de recurrencia puede escribirse en la forma $I(r+n)a_n + T_n = 0$ (4). A partir de esta ecuación se pueden determinar los coeficientes por recurrencia, siempre que la ecuación se pueda resolver para $n \geq 1$ y ello será posible si $I(r+n) \neq 0$, $n \geq 1$.

Tenemos tres casos distintos:

1. *Primer caso:* $I(r)$ tiene dos raíces r_1 y r_2 distintas tales que su diferencia no es un número entero.

Entonces, $\forall n \geq 1$, $r_1 + n \neq r_2$ y $r_2 + n \neq r_1$, lo que implica que para $n \geq 1$ se tiene que $I(r_1 + n) \neq 0$, $I(r_2 + n) \neq 0$; luego para ambos valores de ecuación siempre puede resolverse y se obtiene dos soluciones:

$$y_1(z) = z^{r_1} [1 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots] = z^{r_1} f_1(z)$$

$$y_2(z) = z^{r_2} [1 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots] = z^{r_2} f_2(z)$$

siendo f_1 y f_2 analíticas en 0 y $f_1(0) = f_2(0) = 1$.

Estas dos soluciones son linealmente independientes y por lo tanto la solución general de la ecuación es

$$y(z) = C_1 z^{r_1} f_1(z) + C_2 z^{r_2} f_2(z).$$

Se dice entonces que, en ese punto, la ecuación es del *primer tipo de Fuchs*.

2. *Segundo caso:* $I(r)$ tiene una raíz doble r .

En este caso hay una solución de la forma

$$y_1(z) = z^r f(z)$$

Una segunda solución es de la forma

$$y_2(z) = y_1(z) g(z),$$

donde $g(z)$ se puede determinar reemplazando y_2 en la ecuación diferencial.

La ecuación se dice que es del *segundo tipo de Fuchs*.

Ecuación del segundo tipo de Fuchs

3. *Tercer caso:* $I(r)$ tiene dos raíces distintas cuya diferencia es un entero, es decir, las raíces son r_1 y $r_2 = r_1 + p$, para algún $p \in \mathbb{N}$. En este caso $I(r_2 + n) \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Luego la ecuación (4) tiene solución para $r = r_2$. Por lo tanto, la ecuación admite una solución de la forma

$$y_2(z) = z^{r_2} (1 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots).$$

Ahora, $I(r_1 + n) = 0$ para $n = p$ y no nulo para cualquier otro número natural. La ecuación (4), toma la forma $0 a_p + T_p = 0$. Si $T_p \neq 0$, la determinación de a_p es imposible y la ecuación diferencial tiene una sola solución de la forma $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$ y la ecuación es del segundo tipo de Fuchs.

En cambio, si se tiene que $T_p = 0$, la ecuación admite como solución cualquier valor de a_p . Fijando uno de ellos arbitrariamente, se pueden determinar todos los valores de a_n y se obtienen dos soluciones de la forma $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+r}$, o sea, la ecuación es del primer tipo de Fuchs.

Veamos algunos ejemplos de soluciones alrededor de un punto singular:

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 y'' + (x^2 + x) y' - y = 0$.

Esta ecuación tiene al origen como punto singular. Escribamos la ecuación de la forma

$$y'' + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y' + \left(-\frac{1}{x^2}\right) y = 0.$$

Entonces $p(x) = \frac{1}{x} + 1$ y $q(x) = -\frac{1}{x^2}$

De acuerdo con (2) tenemos $A = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_i = 0 \forall i \geq 1$, $B = -1$, $C = 0$ y $\beta_j = 0 \forall j \geq 0$.

Luego el polinomio indicial es $I(r) = r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1$, cuyas raíces son $r_1 = -1$, $r_2 = 1$.

$$r_2 = r_1 + p, \Rightarrow p = 2.$$

Las raíces difieren en un entero, y como

$$T_p = [\alpha_0(r_1 + 1) + C]a_1 + \alpha_1 r_1 + \beta_0 = [1(-1 + 1) + 0]a_1 + 0(-1) + 0 = 0$$

entonces, la ecuación tiene una solución de la forma

$$y_1(x) = x^{-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$$

y otra de la forma

$$y_2(x) = x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}$$

Halleemos y'_1 y y''_1

$$y'_1(x) = -\frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-2} \quad y''_1(x) = \frac{2}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2) a_n x^{n-3}.$$

Ahora reemplacemos en la ecuación diferencial

$$x^2 \left(\frac{2}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \right) + (x^2 + x) \left(-\frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-2} \right) - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 0$$

Multiplicando y reordenando adecuadamente obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2) a_n x^{n-1} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n x^n - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-1} - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \\
& = \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n-2) a_n x^{n-1} - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) a_{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-1} - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \\
& = \frac{2}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n-2) a_n x^{n-1} - 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) a_{n-1} x^{n-1} - \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n x^{n-1} - \frac{1}{x} - a_1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-1} = \\
& = -1 - a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)(n-2) a_n + (n-2) a_{n-1} + (n-1) a_n - a_n] x^{n-1} = \\
& = -1 - a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-2) a_n + (n-2) a_{n-1}] x^{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Luego,

$$-1 - a_1 = 0 \text{ y } n(n-2) a_n + (n-2) a_{n-1} = 0, \text{ entonces,}$$

$$a_1 = -1 \text{ y } a_n = -\frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2.$$

Si tomamos $a_2 = 0$ tenemos que $a_n = 0, n \geq 2$ y la solución es

$$y_1(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Hacemos lo mismo para la otra solución:

$$y_2'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^n \quad y_2''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n b_n x^{n-1}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial tenemos:

$$\begin{aligned}
& x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n b_n x^{n-1} + (x^2 + x) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^n \right) - x - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n b_n x^{n+1} + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+2} + x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+1} - x - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = \\
& = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) n b_n x^{n+1} + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+2} = \\
& = 3 b_1 x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2) n b_n x^{n+1} + x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^{n+2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (3b_1 + 1)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)(n+1)b_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)b_n x^{n+2} = \\
&= (3b_1 + 1)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+3)(n+1)b_{n+1} + (n+1)b_n]x^{n+2} = 0.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$b_1 = -1/3 \quad \text{y} \quad (n+3)(n+1)b_{n+1} + (n+1)b_n = 0, \text{ o sea, } b_{n+1} = \frac{-b_n}{n+3}, n \geq 1.$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{-b_1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4!} \\
b_3 &= \frac{-b_2}{5} = -\frac{2}{5 \cdot 4!} = -\frac{2}{5!} \\
b_4 &= \frac{-b_3}{6} = \frac{2}{6 \cdot 5!} = \frac{2}{6!} \\
b_5 &= \frac{-b_4}{7} = -\frac{2}{7 \cdot 6!} = -\frac{2}{7!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{(-1)^n 2}{(n+2)!}, \quad n \geq 1$$

Luego, la otra solución nos queda

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{(n+2)!} x^{n+1} = x - \frac{2}{3!} x^2 + \frac{2}{4!} x^3 - \frac{2}{5!} x^4 + \dots = \\
&= \frac{1}{x} \left(\frac{2}{2!} x^2 - \frac{2}{3!} x^3 + \frac{2}{4!} x^4 + \dots \right) = \frac{1}{x} \left(-2 + 2x + 2 - 2x + \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2}{3!} x^3 + \frac{2}{4!} x^4 + \dots \right) = \\
&= \frac{1}{x} \left(2x - 2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$y_2(x) = \frac{2}{x} (x - 1 + e^{-x}).$$

Por lo tanto

$$y(x) = C_1 \frac{x - 1 + e^{-x}}{x} + C_2 \frac{1 - x}{x} = A_1 \frac{e^{-x}}{x} + A_2 \frac{1 - x}{x}.$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$.

El punto singular es el origen. Escribamos la ecuación de la forma

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0.$$

Entonces $p(x) = -\frac{3}{x}$ y $q(x) = -\frac{4}{x^2}$

De acuerdo con (2) tenemos $A = -3$, $\alpha_i = 0 \forall i \geq 0$, $B = 4$, $C = 0$ y $\beta_j = 0 \forall j \geq 0$.

Luego el polinomio indicial es $I(r) = r(r-1) - 3r + 4 = (r-2)^2$. $r = 2$ es raíz doble. Entonces, es del segundo tipo de Fuchs y tiene una solución de la forma

$$y_1(x) = x^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right) = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

Hallemos y_1' y y_1''

$$y_1'(x) = 2x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n x^{n+1} \quad y_1''(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n.$$

Ahora reemplacemos en la ecuación diferencial

$$x^2 \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n\right) - 3x \left(2x + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+1}\right) + 4 \left(x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n x^{n+2} - 6x^2 - 3 \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) a_n x^{n+2} + 4x^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} &= \\ = (2-6+4)x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) - 3(n+2) + 4] a_n x^{n+2} &= 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$[(n+2)(n+1) - 3(n+2) + 4] a_n = n^2 a_n = 0,$$

entonces, $a_n = 0$, $n \geq 1$.

Luego la solución es

$$y_1(x) = x^2.$$

Busquemos la otra solución

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) = u(x) x^2$$

$$y_2'(x) = u'(x) x^2 + u(x) 2x \quad \text{y} \quad y_2''(x) = u''(x) x^2 + 2u'(x) 2x + u(x) 2$$

Reemplacemos en la ecuación diferencial

$$x^2 (u''(x) x^2 + 2u'(x) 2x + u(x) 2) - 3x (u'(x) x^2 + u(x) 2x) + 4u(x) x^2 = 0$$

$$u''(x) x^4 + 4u'(x) x^3 + u(x) 2x^2 - 3u'(x) x^3 - 6u(x) x^2 + 4u(x) x^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u''(x) x^2 + 4u'(x) x + u(x) 2 - 3u'(x) x - 6u(x) + 4u(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u''(x) x^2 + u'(x) x = 0 \quad \Rightarrow \quad u''(x) x + u'(x) = 0$$

Sea $z = u'$, entonces $z' x + z = 0$, que tiene como solución $z = \frac{k}{x}$.

$$\text{Luego, } u' = \frac{k}{x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = k \ln|x|.$$

Entonces la solución es $y_2(x) = x^2 \ln|x|$.

Por lo tanto,

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln|x|.$$