

Resolución de la guía de álgebra II 61.11 y 81.02

Alf

31 de julio de 2013

El presente documento fue escrito por un alumno mientras preparaba la materia para rendir el final y es compartido para la comunidad estudiantil con toda la buena intención, pero no se garantiza que no contenga algún que otro error. Se pueden corroborar los resultados con las resoluciones oficiales de la materia (disponibles en <http://materias.fi.uba.ar/6108/tps.html>). Ante cualquier duda lea el prospecto o consulte con su profesor de cabecera.

Índice

I Ejercicios resueltos	3
1. Práctica 5: Autovalores y autovectores	4
13. (a).	4
13.(b).	4
14.	6
15.	6
16.	7
(a)	7
(b)	8
(c)	9
17.	10
18.	10
19.(a)	12
19.(c).	16
19.(d)	18
19.(e).	19
19.(f).	20
19.(g).	21
20.	22
21.	22

2. Práctica 5: Sistemas de ED	22
1.(a).	22
1.(b).	23
1.(c).	24
2.(a).	24
3.(a)	25
3.(b).	26
5.(a).	28
5.(b).	30
6.	31
7.	32
10.	32
3. Práctica 6: Matrices hermiticas. Formas cuadráticas. DVS	33
6.	33
7.	34
9.	35
10.	36
11.	36
12.	38
13.	39
14.	40
15.	40
17.	40
II Teoría	43
4. Matriz de una transformación lineal	44
4.1. Matriz de la transformación	44
4.2. Matriz de cambio de base	44
5. Wronskiano	45
6. Producto interno	45
6.1. Propiedades	45
6.2. Matriz del producto interno	46
Propiedades de G_B	46
7. Proyección ortogonal	46
Formula magica de proyección	46
Propiedades de proyección ortogonal	46
7.1. Matriz de proyección	47
Propiedades	47
Cálculo de P_S	47
7.2. Gram-Schmidt	47

7.3. Cuadrados mínimos	47
8. Descomposición QR	47
8.1. Descomposición QR y cuadrados mínimos	48
9. Autovalores y autovectores	48
Observaciones/propiedades	49
10. Diagonalización	49
10.1. Matrices semejantes	50
11. Matrices hermiticas y simétricas	50
11.1. Matrices unitarias y ortogonales	50
Observaciones/propiedades:	50
11.2. Matrices hermíticas y simétricas	51
Propiedades:	51
11.2.1. Teorema de la descomposición espectral	51
11.2.2. “Signo” de una matriz	52
11.3. Formas cuadráticas	52
11.3.1. Cambio de coordenadas/variables	52
11.3.2. Optimización	53
Desigualdad de Rayleigh:	53
11.3.3. Restricción caso estandar $\ x\ = r \in \mathbb{R}$	53
11.3.4. Restricción $R(x) = x^T R x = k$	53
11.3.5. Propiedades de las formas cuadráticas	54
12. Descomposición en valores singulares (DVS)	54
12.1. Valor singular	55
12.2. Teorema de DVS	55
Cómo hallar una DVS:	56
12.3. DVS reducida	56
12.4. Pseudoinversa de Moore Penrose	57
12.5. Cuadrados mínimos y DVS	57
12.6. Transformaciones lineales y DVS	58
13. EDOs lineales	58
13.1. de primer orden	58
13.2. de segundo orden	60
14. Sistemas de ecuaciones diferenciales	62

Parte I

Ejercicios resueltos

1. Práctica 5: Autovalores y autovectores

13. (a). Demuestre que A y B no son semejantes siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Supongamos primero que $A \sim B \Rightarrow \exists Q$ tal que

$$A = QBQ^{-1} \rightarrow \text{definición de semejanza}$$

Una propiedad de los determinantes es $\det(AB) = \det A \det B$ por lo tanto podemos aplicar determinante a ambos lados y ver qué pasa:

$$\det A = \det(QBQ^{-1}) = \det Q \det B \det(Q^{-1})$$

Otra propiedad de los determinantes es que $\det A = \det(A^{-1})^{-1}$ por lo tanto:

$$\det A = \det Q \det B \det(Q^{-1}) = \det B$$

En este punto podemos afirmar

$$A \sim B \Rightarrow \det A = \det B \rightarrow \text{propiedad piola}$$

y vemos que no se cumple por lo que $A \not\sim B$.

Podríamos proceder con la traza también, conociendo la propiedad cíclica: $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$ la aplicamos a la primera expresión:

$$\text{tr} A = \text{tr}(QBQ^{-1}) = \text{tr}\left(\underbrace{Q^{-1}Q}_I B\right) = \text{tr}(IB) = \text{tr} B$$

y nuevamente podemos afirmar otra propiedad

$$A \sim B \Rightarrow \text{tr} A = \text{tr} B \rightarrow \text{propiedad piola}$$

que en éste caso tampoco se cumple.

13.(b). Comprobar que A y B son semejantes y hallar $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversible tal que $A = QBQ^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 2,5 & 1,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

En éste ejercicio las propiedades usadas en el anterior no nos sirven para demostrar que son semejantes ya que solo vale el camino de ida. Pero sabemos

que $A \sim B \iff \text{aval}(A) = \text{aval}(B)^1$ por lo tanto podríamos encararlo de la siguiente forma:

$$\begin{cases} A = Q_A D Q_A^{-1} \\ B = Q_B D Q_B^{-1} \end{cases}$$

donde $D = \text{diag}\{\text{aval}(A)\}$ y sabiendo que si $A \sim D$ y $B \sim D \Rightarrow A \sim B$.

Vamos a calcular los autovalores de cada matriz entonces.

$$P_A(\lambda) = \left(\frac{5}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{9}{4} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \rightarrow \text{raíces: } \lambda \in \{1, 4\}$$

$$P_B(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 \rightarrow \text{raíces: } \lambda \in \{1, 4\}$$

Perfecto. De entrada los polinomios característicos son los mismos² así que ya podemos afirmar que $A \sim B$.

Ahora nos falta encontrar Q . Planteamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{cases} A = Q_A D Q_A^{-1} \\ B = Q_B D Q_B^{-1} \end{cases} & \quad (a) \Rightarrow D = Q_B^{-1} B Q_B \\ \Rightarrow \text{reemplazo en (a)} & \Rightarrow A = Q_A \underbrace{Q_B^{-1} B Q_B}_D Q_A^{-1} \end{aligned}$$

De ésta forma la matriz pedida en la consigna es $Q = Q_A Q_B^{-1}$.

Calculamos los autovectores de A :

$$S_{\lambda=1} = \{x \in \mathbb{R}^2 / Ax = x\}$$

lo cual se reduce a hallar (siempre)

$$S_{\lambda=1} = \text{nul}(A - 1I)$$

Entonces

$$A - I = \begin{bmatrix} 1,5 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Busco $S_{\lambda=4} = \text{nul}(A - 4I)$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -1,5 & 1,5 \\ 1,5 & -1,5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow S_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Luego, para la matriz A

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{Q_A} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}}^{Q_A^{-1}}$$

¹ $\text{aval}(A) = \{\lambda \text{ tal que } \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

²Otra característica de las matrices semejantes.

Calculamos los autovectores de B :

$$B - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow S_{\lambda=1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B - 4I = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow S_{\lambda=4} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

entonces

$$B = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{Q_B} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}^{Q_B^{-1}}$$

Para concluir, tal como dijimos antes:

$$Q = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^{Q_A} \overbrace{\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}^{Q_B^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

y se comprueba la ecuación $A = QBQ^{-1}$.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con autovalores $a + bi$ y $a - bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Muestre que $A \sim B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Bueno, lo que yo haría es calcular los autovalores de la matriz que nos dan y ver qué obtenemos...

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = \underbrace{\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2}_{P(\lambda)}$$

Buscamos las raíces de $P(\lambda)$ con la formulita mágica:

$$\frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 + b^2)}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4(a^2 - a^2 - b^2)}}{2} = \frac{2a \pm 2\sqrt{-b^2}}{2} = \frac{2(a \pm ib)}{2}$$

Hermoso... Salió de una!

15. Demostrar que si $P(t)$ es el polinomio característico de A , entonces $P(A) = 0$.

Sabemos que $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ el polinomio característico se obtiene según

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

por lo tanto

$$P(A) = \det(A - AI) = \det(A - A) = \det(0_{\mathbb{C}^{n \times n}}) = 0$$

A mi me convence ésta respuesta... Pero la verdad que no estoy seguro.

16. Para cada transformación encontrar: autovalores, multiplicidades, autoespacios y si es posible representarla con una forma diagonal.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x) = [x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3]^T$
 Lo primero que podemos hacer es hallar $[T]_E$ así trabajamos la transformación como una matriz con todo lo que ya sabemos. Para hacer esto (seguro que no nos acordamos) seguimos estos pasos:

1. Anotamos en una matriz los vectores de la base de salida, en este caso la canónica:

$$[e_1|e_2|e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. A cada columna (vector) le aplicamos lo que hace la transformación

$$[T(e_1)|T(e_2)|T(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Por último buscamos las coordenadas de cada cosa en la base de llegada, que como es la canónica es como no hacer nada...

$$[[T(e_1)]_E | [T(e_2)]_E | [T(e_3)]_E] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{= [T]_E}$$

Ahora que ya tenemos la matriz que caracteriza a ésta transformación vamos a buscar todo lo que nos piden.

Autovalores

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2}} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - (2-\lambda)^2 - [(2-\lambda)^2] = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda)^2 = \\ &= (2-\lambda)^2(1-\lambda-2) = \underbrace{(2-\lambda)^2(-1-\lambda)}_{= P(\lambda)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$aval([T]_E) = \{2, 2, -1\}$$

La multiplicidad algebraica del 2 es 2 por lo que debería ser $\dim(S_{\lambda=2}) = 2$ si es que queremos encontrar una representación diagonal. Veamos:

$$S_{\lambda=2} = nul([T]_E - 2I)$$

$$[T]_E - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x_2 = x_1 + x_3 \\ F_2 = -F_1 \\ F_3 = F_1 \end{array} \Rightarrow S_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Perfecto. Vamos ahora con -1 :

$$[T]_E + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x_1 = -1/2x_2 + 1/2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ F_3 = F_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ya estamos en condiciones de definir una representación diagonal de la transformación:

$$[T]_E = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{C_{BE}} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{[T]_B} \overbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}^{C_{EB} = C_{BE}^{-1}}$$

donde la base B esta formada por las columnas de C_{BE} o bien, los autovectores de $[T]_E$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- (b) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2/T (a + bt + ct^2) = 2a + ct + (-b - c)t^2$
Lo mismo que antes: Busquemos $[T]_E$ siendo $E = \{1, t, t^2\}$

$$[T]_E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Buscamos autovalores con $P(\lambda) = \det([T]_E - \lambda I)$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (2-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) + (2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)[1 - \lambda(-1-\lambda)] = \underbrace{(2-\lambda)[\lambda^2 + \lambda + 1]}_{P(\lambda)}$$

por lo tanto

$$\text{aval}([T]_E) = \left\{ 2, \frac{-1 + i\sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Con ésta información ya podemos decir que T no es diagonalizable en $\mathbb{R}$. No me voy a fijar en $\mathbb{C}$ ya que las raíces son muy feas...

(c) $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que en la base $B = \{v_1, v_2\}$ $T_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Supongamos que T_E es la representación en la base canonica (que no la conocemos), entonces deben existir C_{BE} y $C_{EB} = C_{BE}^{-1}$ tales que

$$T_E = C_{BE} T_B C_{EB}$$

y si pasa esto entonces $T_E \sim T_B \Rightarrow \text{aval}(T_E) = \text{aval}(T_B)$. Por lo tanto, podemos calcular los autovalores de T_B y ver qué pasa...

$$\det(T_B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda^2 + 1 = P(\lambda)}$$

A ojo ya se ve que $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ que sea raíz de $P(\lambda)$ por lo que T no admite representación diagonal en los reales, pero si en complejos ya que

$$\text{aval}(T_B) = \{-i, i\}$$

Y si T es diagonalizable en complejos entonces debe existir alguna base B_2 tal que

$$T_B = \underbrace{C_{B_2 B}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}}_D \underbrace{C_{B B_2}}_{Q^{-1}}$$

y como ya sabemos (o deberíamos) esas matrices Q se componen de autovectores de T_B por lo que podemos hacer lo que hacemos todas las noches: Tratar de conquistar al mundo:

$$S_{\lambda=i} = \text{nul}(T_B - iI)$$

$$T_B - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 = ix_1 \\ F_2 = -iF_1 \end{matrix} \Rightarrow S_{\lambda=i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=-i} = \text{nul}(T_B + iI)$$

$$T_B + iI = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 = -ix_1 \\ F_2 = iF_1 \end{matrix} \Rightarrow S_{\lambda=-i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$$

Y ahora ya podemos armar la diagonalización completa

$$T_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \right)$$

pero nos falta encontrar cual es la base B_2 . Esta información la sacamos de las matrices de cambio de base:

$$C_{B_2 B} = \begin{bmatrix} \underbrace{1}_{[b_1]_B} & \underbrace{1}_{[b_2]_B} \\ \underbrace{i}_{[b_1]_B} & \underbrace{-i}_{[b_2]_B} \end{bmatrix}$$

$$C_{BB_2} = \begin{bmatrix} \underbrace{1/2}_{[v_1]_{B_2}} & \underbrace{-i/2}_{[v_2]_{B_2}} \\ \underbrace{1/2}_{[v_1]_{B_2}} & \underbrace{i/2}_{[v_2]_{B_2}} \end{bmatrix}$$

en particular no interesa lo que dice C_{B_2B} ya que nos indica cómo formar sus elementos a partir de los elementos de B , entonces:

$$B_2 = \{b_1, b_2\} = \{v_1 + iv_2, v_1 - iv_2\}$$

17. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(v) = v - 3 \frac{uu^T}{u^T u} v$$

donde $u = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. (a) Hallar autovalores y decir si T es diagonalizable para cualquier base. (b) Resolver lo mismo pero con u cualquier vector de $\mathbb{R}^3$.

T se puede definir en forma de producto matricial como

$$T(v) = \left(I - 3 \frac{uu^T}{u^T u} \right) v$$

y entonces sus autovalores se calculan como siempre

$$\det \left(I - 3 \frac{uu^T}{u^T u} - \lambda I \right) = \det \left(I(1 - \lambda) - 3 \frac{uu^T}{u^T u} \right)$$

no se cómo seguir... Esto es eso de Householder que no lo toman nunca así que no hay que gastarse mucho.

18. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$T_B = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) Calcular los autovalores de T y ver que no dependen de α . (b) Para los valores de α que T sea diagonalizable hallar una base tal que la representación sea diagonal.

Lo de siempre

$$\begin{aligned} \det(T_B - I\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1 + \alpha - \lambda & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha - \lambda & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & \lambda & 1 \\ 2 + \alpha & -\alpha - \lambda & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1 - \lambda) [(-\alpha - \lambda)(-\lambda) + \alpha - 1] - \lambda [(2 + \alpha)(-\lambda) - 2(\alpha - 1)] + 1 [-(2 + \alpha) - 2(-\alpha - \lambda)] = \\
&\quad \underbrace{(-1 - \lambda) [\lambda^2 + \lambda\alpha + \alpha - 1]}_{- \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda^2\alpha - \lambda\alpha - \lambda\alpha - \alpha + \lambda + 1} - \underbrace{\lambda [-2\lambda - \lambda\alpha - 2\alpha + 2]}_{2\lambda^2 + \lambda^2\alpha + 2\alpha\lambda - 2\lambda} + \underbrace{[-2 - \alpha + 2\alpha + 2\lambda]}_{2\lambda + \alpha - 2} = \\
&= \lambda^3(-1) + \lambda^2(-1 - \alpha + 2 + \alpha) + \lambda(-\alpha - \alpha + 1 + 2\alpha - 2 + 2) + (-\alpha + 1 + \alpha - 2) = \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \rightarrow \text{increible... Encima raíces hermosas}
\end{aligned}$$

Luego, los autovalores de T_B son

$$\text{aval}(T_B) = \{1, 1, -1\}$$

Hasta aquí resolvimos el punto (a). Ahora tenemos que hallar los valores de α para los cuales $\exists Q$ tal que $T_B = QDQ^{-1}$, y como Q está formada por autovectores de T_B lo que estamos buscando es que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ sea dos. Para ello nos proponemos a hallar el autoespacio $S_{\lambda=1}$ y lo forzamos a tener dos dimensiones³:

$$S_{\lambda=1} = \text{nul}(T_B - I)$$

$$T_B - I = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 + \alpha & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\dim(S_{\lambda=1}) = 2 \iff$ todas las filas de $T_B - I$ son $ld \iff aF_1 + bF_2 + cF_3 = 0$ tiene solución no trivial

$$\begin{aligned}
a \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 + \alpha \\ -1 - \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + \left(b \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right) + c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 &= (a + b) \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + (b + c) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Mirando esta última expresión deducimos que

1. Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ la ecuación se cumple $\forall (a \ b \ c) \in \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ lo cual da soluciones no triviales $\Rightarrow T_B$ es diagonalizable.
2. Si $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ la ecuación se cumple $\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$ que es la solución trivial $\Rightarrow T_B$ NO es diagonalizable.

³Para forzar al espacio a tener exactamente dos dimensiones necesitamos que la matriz $T_B - I$ tenga las tres filas linealmente dependientes y solo "sobreviva" una.

Entonces buscamos una diagonalización de T_B fijando el valor de $\alpha = 0$ con lo que

$$S_{\lambda=1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y entonces

$$T_B = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{T_{B_2 B}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^{T_{B_2}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}^{T_{B B_2}}$$

La base B_2 expresada con los elementos de la base B es

$$B_2 = \{v_1 + 2v_3, v_2 - v_3, v_2 + v_3\}$$

19.(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la rotación en un ángulo α alrededor de un eje no nulo.

Antes de arrancar con el ejercicio veamos como se obtiene una matriz de rotación (apuesto a que no sabes). Empecemos analizando el caso de $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que R toma a un vector v y lo rota un ángulo α alrededor del origen de coordenadas. Entonces

$$T(v) = \|v\| \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde β es el ángulo que forma el vector v con el eje x (si no me crees hace un dibujito y vas a ver que esto es así). Bueno, para armar la matriz de ésta transformación procedemos como siempre, sea la base canonica $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ entonces

$$T_E = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} T(1,0) \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{matrix}} & \overbrace{\begin{matrix} T(0,1) \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$T(v) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} v$$

Este es el caso canonico en $\mathbb{R}^2$ en el que se gira el espacio alrededor del origen.

En $\mathbb{R}^3$ tenemos “mas opciones” ya que podemos girar de infinitas formas alrededor del origen, es decir, alrededor de distintos ejes representados por rectas que cruzan el origen. Analicemos el movimiento en forma gráfica primero. En la figura 1 se puede ver un esquema de lo que estamos haciendo. El eje $E = \text{gen} \{e\}$

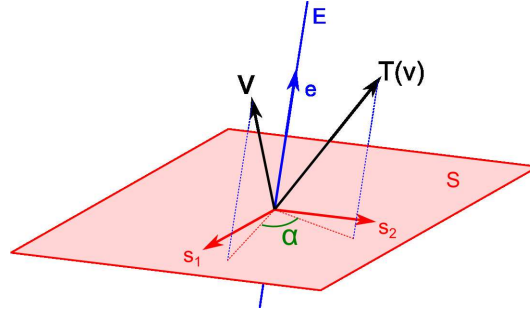


Figura 1: Rotación alrededor de E.

es el eje de rotación y tiene una dirección cualquiera (e no es un vector de la base canonica, es cualquier vector de $\mathbb{R}^3$). El subespacio $S = E^\perp$ “es el que rota”. Para resolver ésta transformación conviene pensarla como una transformación en $\mathbb{R}^2$ proyectando los vectores sobre S para rotarlos y luego reconstruirlos teniendo en cuenta que su proyección sobre E sigue siendo la misma.

Entonces vamos a definir a T sobre una base B formada por los vectores de E y S , lo cual hará las cosas mucho mas fáciles: Sea

$$B = \{e, s_1, s_2\}$$

Sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector tal que $v = ae + bs_1 + cs_2 \Rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ son las coordenadas de v en la base B . Vamos a trabajar con las proyecciones de v sobre éstos dos subespacios:

$$v = P_E(v) + P_S(v) \rightarrow P_E(v) = ae, \quad P_S(v) = bs_1 + cs_2$$

Le aplicamos la transformación a v expresado de ésta forma:

$$\Rightarrow T(v) = T(P_E(v) + P_S(v)) = T(P_E(v)) + T(P_S(v))$$

y gracias a nuestro gráfico podemos apreciar que la transformación solo actúa sobre la proyección sobre S por lo tanto:

$$T(P_E(v)) = P_E(v)$$

Lo que falta ahora es hallar $T(P_S(v))$ pero si te fijas es lo mismo que habíamos deducido antes para $\mathbb{R}^2$... Podemos pensar a S como el plano real y a s_1 y a s_2 como los versores canonicos que lo definen. Vamos a pedirle un requisito mas a la base B para que todo sea mas sencillo: que sea una base ortonormal⁴. Entonces definimos

$$BON(\mathbb{R}^3) = B = \{e, s_1, s_2\}$$

⁴Todos los vectores tienen norma uno y son ortogonales entre si.

y utilizando ésta base definimos nuestra transformación:

$$\left\{ \begin{array}{l} [T(e)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{no lo modificamos} \\ [T(s_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{se deduce de la ecuación 1} \\ [T(s_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{se deduce de la ecuación 1} \end{array} \right.$$

Finalmente representamos nuestra transformación en forma matricial:

$$[T(v)]_B = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}^{T_B} [v]_B \quad \text{con } B = \{e, s_1, s_2\}$$

donde B es ortonormal y e genera el subespacio alrededor del cual se rotan los vectores.

Bueno, ahora “empieza” el ejercicio: ver si es diagonalizable y todo eso.

Calculamos autovalores:

$$\begin{aligned} \det(T_B - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) (\cos \alpha - \lambda)^2 - [(1 - \lambda) (\sin \alpha) (-\sin \alpha)] = \\ &= (1 - \lambda) (\cos \alpha - \lambda)^2 - [(1 - \lambda) (-1) \sin^2 \alpha] = \\ &= (1 - \lambda) [\cos^2 \alpha - 2\lambda \cos \alpha + \lambda^2] + \sin^2 \alpha (1 - \lambda) = \\ &= (1 - \lambda) [\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_{=1} + \lambda^2 - 2\cos \alpha \lambda] = \\ &= (1 - \lambda) [\lambda^2 - 2\cos \alpha \lambda + 1] = P(\lambda) \end{aligned}$$

Uno de los autovalores es 1, los otros dos salen de la formula para calcular las raíces de una cuadrática:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2} &= \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4(\cos^2 \alpha - 1)}}{2} = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = \\ &= \cos \alpha \pm \sqrt{-\sin^2 \alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha \Rightarrow \\ \text{aval}(T_B) &= \{1, \cos \alpha - i \sin \alpha, \cos \alpha + i \sin \alpha\} \end{aligned}$$

Vemos que, dependiendo de α los autovalores serán reales o complejos:

1. Si $\sin \alpha = 0 \Rightarrow \text{aval}(T_B) \subset \mathbb{R}$ por lo tanto:

$$a) \text{ Si } \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} + \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{aval}(T_B) = \{1, 1, 1\}$$

$$b) \text{ Si } \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} + \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{aval}(T_B) = \{1, -1, -1\}$$

2. Si $\sin \alpha \neq 0 \Rightarrow \text{aval}(T_B) \subset \mathbb{C} \iff \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} + \{0\}$

$$a) \text{ Si } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} + \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 1 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{aval}(T_B) = \{1, i, -i\}$$

$$b) \text{ Si } \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} + \{0\} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{aval}(T_B) = \{1, i, -i\}$$

c) Si $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ (o múltiplos que den mas vueltas) $\Rightarrow$ los autovalores de T_B serán complejos “mixtos”.

Calculamos autovectores:

$$S_{\lambda=1} = \text{nul}(T_B - I) = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha - 1 & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \in \mathbb{R} \\ (\cos \alpha - 1)x_2 = (\sin \alpha)x_3 \\ (\sin \alpha)x_2 = (1 - \cos \alpha)x_3 \end{matrix} \Rightarrow$$

1. Si $\sin \alpha \neq 0$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} x_2 \Rightarrow (\sin \alpha)x_2 = (1 - \cos \alpha) \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} x_2 \Rightarrow$$

$$(\sin^2 \alpha)x_2 = \left(-\underbrace{1 - \cos^2 \alpha}_{\sin^2 \alpha} + 2 \cos \alpha \right) x_2 = \left(-\underbrace{\sin^2 \alpha}_{\sin^2 \alpha} + 2 \cos \alpha \right) x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2 \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} x_2 \iff$$

$$\iff \frac{2 \cos \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1$$

y acá no se cómo seguir... Uno quisiera suponer que ésto se cumple para ningún α ya que el unico autoespacio real que deberíamos obtener es el del eje de rotación, peeeeeerooooo...

2. Si $\sin \alpha = 0 \Rightarrow$ dos opciones: (a) $\cos \alpha = 1$ o (b) $\cos \alpha = -1$

a) Si $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} + \{0\}$

$$\Rightarrow S_{\lambda=1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$$

b) Si $\alpha = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} + \{0\}$

$$\Rightarrow S_{\lambda=1} = \text{nul} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Los autoespacios complejos no me los pidas.

19.(c). $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ la proyección ortoconal sobre un subespacio S siendo $\dim(\mathbb{V}) = n$. Hallar autovalores y autovectores.

Vamos a definir nuestra transformación en algún sistema de coordenadas útil. Sea

$$BON(S) = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, k \leq n$$

una base ortonormal de S , entonces, la matriz de proyección sobre S será

$$P_S = QQ^H$$

dónde

$$Q = [s_1 | s_2 | \dots | s_k]$$

Ahora completamos una base de $\mathbb{V}$ utilizando el complemento ortogonal de S :

$$BON(\mathbb{V}) = B = \{s_1, s_2, \dots, s_k, s_1^\perp, s_2^\perp, \dots, s_{n-k}^\perp\}$$

Apliquemosle a cada vector de B la transformación lineal para luego poder armar una matriz que la represente:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s_1) = s_1 \\ T(s_2) = s_2 \\ \vdots \\ T(s_k) = s_k \\ T(s_1^\perp) = 0_{\mathbb{V}} \\ T(s_2^\perp) = 0_{\mathbb{V}} \\ \vdots \\ T(s_{n-k}^\perp) = 0_{\mathbb{V}} \end{array} \right.$$

Con esta información podemos armar T_B^5 :

$$T_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

tal que

$$[T(x)]_B = T_B [x]_B$$

y como $T_E = C_{BE}T_B C_{EB} \Rightarrow T_B \sim T_E \Rightarrow \text{aval}(T_B) = \text{aval}(T_E)$ y además si $x \in \text{avec}(T_B) \Rightarrow C_{BE}x \in \text{avec}(T_E)$ y por lo tanto podemos hallar toda la información que nos solicitan.

Autovalores: hacemos lo de siempre $\rightarrow P(\lambda) = \det(T_B - \lambda I^{n \times n})$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & & & & & \\ & 1-\lambda & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1-\lambda & & \\ & & & & -\lambda & \\ & & & & & -\lambda \\ & & & & & & \ddots \\ & & 0 & & & & & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^k (-\lambda)^{n-k}$$

Si no sabes cómo se calcula ese determinante tan rápido: propiedad→el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.

Vemos entonces que ya tenemos el polinomio factorizado y los autovalores de T_E son

$$aval(T_E) = \left\{ \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{k \text{ veces}}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-k \text{ veces}} \right\}$$

Autovectores:

⁵Ver cómo se hace en la sección 4 al final del documento.

1. Para la matriz $T_B \rightarrow S_{\lambda=1} = \text{nul}(T_B - I)$

$$\text{nul}(T_B - I) = \text{nul} \left(\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & -1 \\ & 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \right) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

como ésta información la tenemos codificada en las coordenadas en base $B \rightarrow$ las pasamos a la base canonica y obtenemos los autovectores de T_E

$$S_{\lambda=1} = \text{gen} \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$$

2. Para la matriz $T_B \rightarrow S_{\lambda=0} = \text{nul}(T_B)$

$$\text{nul}(T_B) = \text{nul} \left(\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y nuevamente decodificamos ésta información para obtener los autovectores de T_E

$$S_{\lambda=0} = \text{gen} \{s_1^\perp, s_2^\perp, \dots, s_{n-k}^\perp\}$$

Obtuvimos algo que se podría haber sabido de antemano sin calcular y por intuición: Si T proyecta sobre S entonces es obvio que todos los vectores que están en S no serán afectados por T ya que su proyección son ellos mismos, es decir que serán multiplicados por 1 y por eso resultó que $S_{\lambda=1} = S$. Por otro lado, los vectores que están en $S^\perp$ serán anulados por la transformación ya que su proyección sobre S será el 0_V y por esto resultó que obtuvimos que $S_{\lambda=0} = S^\perp$.

- 19.(d)** $T : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ tal que $T(f) = f' - f$. Hallar autovalores y autovectores.

Éste ejercicio no lo podemos encarar como veníamos haciendo ya que $\nexists$ una base de $\mathcal{C}^\infty$... Pero todavía nos queda la definición de autovalor y autovector: $\lambda \in \text{aval}(T)$ y $v \in \text{avec}(T) \iff T(v) = \lambda v \Rightarrow$

$$T(f) = f' - f = \lambda f \Rightarrow f' = f(1 + \lambda)$$

Esto es una sencilla ecuación diferencial.

$$\begin{aligned}\frac{df}{f} &= (1 + \lambda) dx \Rightarrow \int \frac{df}{f} = \int (1 + \lambda) dx \\ \Rightarrow \ln f &= (1 + \lambda)x + c \Rightarrow f = e^{x(1+\lambda)+c} = ke^{x(1+\lambda)} \Rightarrow\end{aligned}$$

En ningún momento tuvimos que imponer restricción alguna sobre $\lambda \Rightarrow$

$$aval(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}\}$$

y los autoespacios son

$$S_{\lambda=\lambda_i} = gen \left\{ e^{x(1+\lambda_i)} \right\}$$

donde omitimos la constante k por el siguiente motivo: Si $S = gen \{ke^{algo}, k \in \mathbb{R}\} \Rightarrow f \in S \iff f = \alpha ke^{algo}$ donde α te indica la coordenada de f en S ... Pero si k es cualquier número, es como que lo podés meter adentro de α y no te cambia nada, por lo tanto es factible fijar el valor de k en algún número $\neq 0$ y simplificar notación.

19.(e). $T : C^\infty \rightarrow C^\infty$ tal que $T(f) = f''$. Hallar autovalores y autovectores.

Trabajamos con la definicion: $\lambda \in aval(T)$ y $v \in vec(T) \iff T(v) = \lambda v \Rightarrow$

$$T(f) = f'' = \lambda f$$

y esto es una ecuación diferencial de segundo orden que la resolvéis como mas os plazca. Si prestais un poco de atencion notareis que se trata de resolver un sistema homogéneo:

$$f'' - \lambda f = 0$$

en el que para cada λ la solución es el autoespacio asociado, por lo que proponemos la milagrosa solución de las ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{cases} f_h = e^{ax} \\ f'_h = ae^{ax} \\ f''_h = a^2 e^{ax} \end{cases} \quad a \in \mathbb{C}$$

entonces reemplazando en $f'' - \lambda f = 0$ nos queda

$$e^{ax} (a^2 - \lambda) = 0 \iff \underbrace{a^2 - \lambda = 0}$$

Acá tenemos varias posibilidades de resolución de la ecuación:

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow$

- a) Si $\lambda \in \mathbb{R} > 0 \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_1 = -a_2 = a$ son raíces y $a_1^2 = a_2^2 = \lambda$ entonces las soluciones serán $S_{\lambda>0} = gen \{e^{ax}, e^{-ax}\}$
- b) Si $\lambda = 0 \Rightarrow a = 0$ y las soluciones serán $S_{\lambda=0} = gen \{1, x\}$

c) Si $\lambda \in \mathbb{R} < 0 \Rightarrow \exists a_1, a_2$ raíces tales que $a_1 = -a_2 = ia$ con $a = \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$ (porque $-\lambda > 0$) y $a_1^2 = a_2^2 = -a^2 = -(\sqrt{-\lambda})^2 = -\lambda$ por lo que las soluciones son $S_{\lambda < 0} = \text{gen} \{e^{i\sqrt{-\lambda}x}, e^{-i\sqrt{-\lambda}x}\} = \text{gen} \{\sin(\sqrt{-\lambda}x), \cos(\sqrt{-\lambda}x)\}$

2. Si $\lambda \in \mathbb{C} \rightarrow$ ni en pedo lo hago.

19.(f). $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $T(A) = A + A^T$. Hallar autovalores y autovectores.

Dado que

$$\begin{cases} A + A^T = 2A & \text{si } A \in \mathcal{M}_{\text{simétricas}} \\ A + A^T = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 0 \\ 0 & 2a_{22} \end{bmatrix} & \text{si } A \in \mathcal{M}_{\text{antisimétricas}} \end{cases}$$

quizas nos convenga utilizar una base del subespacio de matrices simétricas.

Sea $S = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ el subespacio de las matrices

simétricas y $S^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ el subespacio de *algunas* matrices anti-

simétricas (no todas). Es claro que podemos definir una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ya que $S \oplus$

$S^\perp = \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Entonces sea nuestra base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{cases} T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ T \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Con ésta información podemos armar la matriz

$$T_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son

$$\text{aval}(T_B) = \{2, 2, 2, 0\}$$

ya que al ser una matriz diagonal son los mismos elementos de la diagonal. Los autoespacios serán los que definieron a la transformacion respectivamente:

$$S_{\lambda=2} = S$$

$$S_{\lambda=0} = S_2$$

19.(g). $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que $T(p(x)) = p(3x - 1)$. Hallar autovalores y autovectores.

No se me ocurre ningún truco como para “zafar” así que lo planteamos de una. Sea la base $B = \{1, x, x^2\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(x) = 3x - 1 \\ T(x^2) = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases}$$

y la respectiva matriz es

$$T_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Uhh, fijate que quedó una matriz triangular superior y eso es piola porque los autovalores son los elementos de la diagonal (Y).

$$aval(T) = \{1, 3, 9\}$$

Buscamos los autoespacios:

$$S_{\lambda=1} = nul(T_B - I) = nul \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \\ F_2 + 2F_1 \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\rightarrow nul \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} = gen \{1\}$$

$$S_{\lambda=3} = nul(T_B - 3I) = nul \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} = gen \{1 - 2x\}$$

$$S_{\lambda=9} = nul(T_B - 9I) = nul \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_2 = -8x_1 + x_3 \\ -x_2 = x_3 = 4x_1 \\ \Rightarrow x_2 = -4x_1 \end{array} = gen \{1 - 4x + 4x^2\}$$

20. Sea T una matriz. 2 es un autovalor y los otros dos son complejos conjugados. Hallar los valores sabiendo $\det T = 50$ y $\operatorname{tr} T = 8$.

$$\text{propiedades} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tr} T = \sum \lambda_i \Rightarrow & 8 = 2 + \alpha + \bar{\alpha} \\ \det T = \prod \lambda_i \Rightarrow & 50 = 2\alpha\bar{\alpha} \end{cases}$$

De resolver ese sencillo sistema se obtiene

$$\operatorname{aval}(T) = \{2, 3 + 4i, 3 - 4i\}$$

21. Sea A la matriz que representa a una transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ con $\dim(\mathbb{V}) = 3$. Si T tiene tres autovalores diferentes, cuales son mayores que cero, menores que cero o iguales?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} \rightarrow a, b, c > 0$$

Calcular el polinomio característico es bastante bardero (ya lo intenté y fracasé), pero fíjate algo interesante: $\det A = bcd$ y como son todos mayores que cero $\Rightarrow \det A > 0$. Además $\det A = \prod \lambda_i \Rightarrow \lambda_i \neq 0 \forall i$.

2. Práctica 5: Sistemas de ED

1.(a). $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Buscamos diagonalización de $A \rightarrow$ autovalores:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{aval}(A) = \{2, 4\} \end{aligned}$$

Autovectores:

$$S_{\lambda=2} = \operatorname{nul}(A - 2I) = \operatorname{nul} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=4} = \operatorname{nul} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces, una diagonalización de A será:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Siendo nuestro sistema original $X' = AX$ hacemos un cambio de variables:

$$\underbrace{Q^{-1}X'} = D \underbrace{Q^{-1}X} \rightarrow Y' = DY$$

$$Q^{-1}X' = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}X = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

y obtenemos nuestro sistema

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 & \rightarrow y_1(t) = c_1 e^{2t} \\ y_2' = 4y_2 & \rightarrow y_2(t) = c_2 e^{4t} \end{cases}$$

Ahora tenemos que reescribirlo en nuestra variable original. $Y = Q^{-1}X \Rightarrow X = QY$ con lo que obtenemos

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \\ c_2 e^{4t} - c_1 e^{2t} \end{bmatrix}$$

1.(b). $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Buscamos diagonalización $\rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) + 2 = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \text{aval}(A) = \{-1, 0\}$

Autovectores:

$$S_{\lambda=-1} = \text{nul}(A + I) = \text{nul} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=0} = \text{nul}(A) = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Por lo que la diagonalización es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Planteamos el sistema

$$Y' = DY \Rightarrow \begin{cases} y_1' = -y_1 & \rightarrow y_1(t) = c_1 e^{-t} \\ y_2' = 0 & \rightarrow y_2(t) = c_2 \end{cases}$$

Volvemos a las variables originales

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + 2c_2 \\ c_1 e^{-t} + c_2 \end{bmatrix}$$

$$1.(c). \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizo:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -2 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & -2-\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2-\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \text{imposible no equivocarse...}$$

$$2.(a). \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Diagonalizamos} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff |2-\lambda| = 1 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{3, 1\}$$

Autovectores

$$S_{\lambda=3} = \text{nul}(A - 3I) = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y la diagonalización es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = 3y_1 & \rightarrow y_1 = c_1 e^{3t} \\ y'_2 = y_2 & \rightarrow y_2 = c_2 e^t \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^t \end{bmatrix}$$

y cambiamos de variables

$$X = QY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} + c_2 e^t \\ c_2 e^t - c_1 e^{3t} \end{bmatrix}$$

Falta ahora la condición inicial

$$\begin{aligned} X(0) &= \begin{bmatrix} c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ c_2 e^0 - c_1 e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 - c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_1 = -\frac{3}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Diagonalizamos amigo} \rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{-i, i\}$$

$$S_{\lambda=-i} = \text{nul} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=i} = \text{nul} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

y la diagonalización queda

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = -iy_1 & \rightarrow y_1 = c_1 e^{-it} \\ y'_2 = iy_2 & \rightarrow y_2 = c_2 e^{it} \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Pasamos a las viejas coordenadas

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-it} \\ c_2 e^{it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-it} + c_2 e^{it} \\ ic_2 e^{it} - ic_1 e^{-it} \end{bmatrix} \Rightarrow X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} e^{-it} \\ -ie^{-it} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{it} \\ ie^{it} \end{bmatrix} \right\}$$

Usando la identidad de Euler ($e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \neq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$) lo escribimos como

$$\begin{aligned} X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \cos(-t) + i \sin(-t) \\ -i(\cos(-t) + i \sin(-t)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ i(\cos t + i \sin t) \end{bmatrix} \right\} = \\ = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \cos t - i \sin t \\ -i \cos t - \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Nos piden solamente las soluciones reales, así que todo lo que tiene una i lo tenemos que sacar. El tema es que hay que ser muy cuidadosos ya que $X \in \mathbb{C} - \text{espacio}$ y si lo multiplicamos por i nos dará nuevas soluciones que son linealmente dependientes en $\mathbb{C}$ pero no en $\mathbb{R}$.

Fijate lo que digo con un ejemplo sencillo:

- Sea $S = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \right\}$ un $\mathbb{C}$ -espacio y supónete que nos interesa solamente la parte real. Uno podría decir “facil, no hay generadores reales así que no tiene”... Pero estarías cometiendo un equívoco grave por lo siguiente:

$$S = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \alpha \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \right\}$$

donde α es un escalar, porque $\text{gen}\{v\} = \text{gen}\{2v\} = \text{gen}\{\alpha v\}$. Pero en nuestro caso $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow$ fíjate lo que pasa si $\alpha = i$

$$S = \text{gen} \left\{ i \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, i \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Por lo tanto y considerando que S es un $\mathbb{C}$ -espacio entonces:

$$S = \text{gen} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{es ld en } \mathbb{C}} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y ahora la cosa cambia, no?

Bueno, apliquemos lo mismo de acá arriba al ejercicio posta:

$$\begin{aligned} X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \cos t - i \sin t \\ -i \cos t - \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{bmatrix} \right\} &\rightarrow \text{multiplico por } i \\ \Rightarrow X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \cos t + \sin t \\ \cos t - i \sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \cos t - \sin t \\ -\cos t - i \sin t \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

y ahora tomamos la parte real de cada uno de estas dos bases

$$X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} \right\}$$

y para no tener cosas de mas

$$X \in \left\{ \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \right\}$$

Ojo que el resuelto de la página oficial creo que está mal...

$$\mathbf{3.(b).} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Buscamos diagonalización} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ (2-\lambda) [(-\lambda)(2-\lambda) + 2] &= (2-\lambda) [\lambda^2 - 2\lambda + 2] \Rightarrow \text{aval}(A) = \{2, 1+i, 1-i\} \\ \text{Autovectores} \end{aligned}$$

$$S_{\lambda=2} = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_2 = x_3 \\ x_1 \in \mathbb{C} \\ x_2 = 0 \end{matrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=1+i} = \text{nul}(A - (1+i)I) = \text{nul} \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -1-i & 1 \\ 0 & -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_2 \\ \rightarrow \\ F_3 - (1-i)F_2 \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{nul} \begin{pmatrix} 1-i & -i & 0 \\ 0 & -1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_1 = (-1/2 + 1/2i) x_2 \\ x_3 = (1+i) x_2 \\ x_2 \in \mathbb{C} \end{array} \Rightarrow \\
&S_{\lambda=1+i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2} \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \right\} \\
&S_{\lambda=1-i} = \text{nul} (A - (1-i)I) = \text{nul} \begin{pmatrix} 1+i & 1 & -1 \\ 0 & i-1 & 1 \\ 0 & -2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 + F_2 \\ \rightarrow \\ F_3 - (1+i) F_2 \end{array} = \\
&= \text{nul} \begin{pmatrix} 1+i & i & 0 \\ 0 & i-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x_1 = (-1/2 - 1/2i) x_2 \\ x_3 = (1-i) x_2 \\ x_2 \in \mathbb{C} \end{array} \Rightarrow \\
&S_{\lambda=1-i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-1-i}{2} \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Y la diagonalización resulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2+2i & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1+i}{4} & -\frac{i}{4} \\ 0 & \frac{1-i}{4} & \frac{i}{4} \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 & \rightarrow y_1 = c_1 e^{2t} \\ y'_2 = (1+i)y_2 & \rightarrow y_2 = c_2 e^{(1+i)t} \\ y'_3 = (1-i)y_3 & \rightarrow y_3 = c_3 e^{(1-i)t} \end{cases}$$

y volvemos a las variables originales

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1+i & -1-i \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2+2i & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{(1+i)t} \\ c_3 e^{(1-i)t} \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} -1+i \\ 2 \\ 2+2i \end{bmatrix} + c_3 e^{(1-i)t} \begin{bmatrix} -1-i \\ 2 \\ 2-2i \end{bmatrix}$$

y los generadores del subespacio complejo son

$$X \in \text{gen} \left\{ e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{t+it} \begin{bmatrix} i-1 \\ 2 \\ 2+2i \end{bmatrix}, e^{t-it} \begin{bmatrix} -1-i \\ 2 \\ 2-2i \end{bmatrix} \right\}$$

Es momento de aplicar la magica identidad de Euler pa poder separar claramente en parte real e imaginaria

$$\begin{cases} e^{2t} = e^{2t} \\ e^{t+it} = e^t (\cos t + i \sin t) \\ e^{t-it} = e^t (\cos t - i \sin t) \end{cases}$$

y reemplazarlo en los generadores para obtener:

$$X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t (-(\cos t + \sin t) + i(\cos t - \sin t)) \\ e^t (2 \cos t + 2i \sin t) \\ e^t (2(\cos t - \sin t) + 2i(\cos t + \sin t)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t (-(\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t)) \\ e^t (2 \cos t + 2i \sin t) \\ e^t (2(\cos t - \sin t) - 2i(\cos t + \sin t)) \end{bmatrix} \right\}$$

Ahora hay que multiplicar toda esa basura por i para generar otra base que es linealmente dependiente en $\mathbb{C}$ pero no en $\mathbb{R}$

$$X \in \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} ie^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t (-i(\cos t + \sin t) - (\cos t - \sin t)) \\ e^t (i2 \cos t - 2 \sin t) \\ e^t (i2(\cos t - \sin t) - 2(\cos t + \sin t)) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^t (-i(\cos t + \sin t) - (\sin t - \cos t)) \\ e^t (i2 \cos t - 2 \sin t) \\ e^t (i2(\cos t - \sin t) + 2(\cos t + \sin t)) \end{bmatrix} \right\}$$

y nos quedamos solamente con las partes reales de cada conjunto, entonces

$$X \in \text{gen} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, e^t \begin{bmatrix} -\cos t - \sin t \\ 2 \cos t \\ 2(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}, e^t \begin{bmatrix} -\cos t - \sin t \\ 2 \cos t \\ 2(\cos t - \sin t) \end{bmatrix}, \underbrace{e^t \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \sin t \\ 2(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}}, e^t \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ 2 \sin t \\ -2(\cos t + \sin t) \end{bmatrix} \right\}$$

Los dos indicados están bien porque aparecen en los resueltos oficiales. Entre los otros debe haber alguna combinación lineal tal que te queda lo de los resueltos, pero no tengo ganas de fijarme...

$$5.(a). \quad X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^t \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{Diagonalizamos} \rightarrow \text{aval}(A) \Rightarrow (2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \iff |2 - \lambda| = 1 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{1, 3\}$$

Autovectores

$$S_{\lambda=1} = \text{nul} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Como A es simétrica entonces

$$S_{\lambda=3} = S_{\lambda=1}^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces una diagonalización es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

Y ahora podemos hacer unos trucos con cambios de variables, si $Y = P^{-1}X \Rightarrow$

$$\begin{aligned} X' &= PDP^{-1}X + B \rightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X + P^{-1}B \rightarrow \\ &\rightarrow Y' = DY + P^{-1}B \end{aligned}$$

donde

$$P^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t - e^{2t} \\ e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

y el sistema resultante es

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + \frac{e^t - e^{2t}}{2} \\ y_2' = 3y_2 + \frac{e^t + e^{2t}}{2} \end{cases}$$

Resolvemos $y_1' - y_1 = \frac{e^t - e^{2t}}{2} \Rightarrow$ factor integrante⁶ $u = e^{-t} \Rightarrow$

$$\underbrace{e^{-t}y_1' - e^{-t}y_1}_{(y_1e^{-t})'} = e^{-t} \frac{e^t - e^{2t}}{2} = \frac{1 - e^t}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_1e^{-t} &= \int \frac{1 - e^t}{2} dt = \frac{1}{2}t - \frac{e^t}{2} + c_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{te^t}{2} + c_1e^t - \frac{e^{2t}}{2} \end{aligned}$$

Resuelvo la segunda línea $y_2' - 3y_2 = \frac{e^t + e^{2t}}{2} \Rightarrow u = e^{-3t} \Rightarrow$

$$\underbrace{e^{-3t}y_2' - 3e^{-3t}y_2}_{(y_2e^{-3t})'} = e^{-3t} \frac{e^t + e^{2t}}{2} = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-t}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_2e^{-3t} &= \frac{1}{2} \int (e^{-2t} + e^{-t}) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{e^{-t}}{-1} \right) + c_2 = \frac{e^{-2t}}{-4} + \frac{e^{-t}}{-2} + c_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2 &= -\frac{e^t}{4} - \frac{e^{2t}}{2} + c_2e^{3t} \end{aligned}$$

y ahora volvemos al viejo sistema de coordenadas haciendo $X = PY$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{te^t}{2} + c_1e^t - \frac{e^{2t}}{2} \\ -\frac{e^t}{4} - \frac{e^{2t}}{2} + c_2e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}te^t + c_1e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + c_2e^{3t} \\ \frac{1}{2}te^t + c_1e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} - c_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

y separandolo mas lindo queda:

$$X = c_1e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t - e^{2t} \\ \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^t \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

⁶Es un método de resolución que se ve en análisis matemático 2 que a mi me gusta mas ya que te da de una la solución general. En realidad es lo mismo pero con otra forma...

5.(b). $X' + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$

Buscamos diagonalización de la matriz $aval(A) \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \iff |\lambda| = 1 \Rightarrow aval(A) = \{1, -1\}$

Autovec

$$S_{\lambda=1} = nul \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=-1} = nul \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces la diagonalización es

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1}}$$

y hacemos el glorioso cambio de coordenadas $X' + PDP^{-1}X = F(t) \rightarrow Y = P^{-1}X \Rightarrow \underbrace{P^{-1}X'} + D \underbrace{P^{-1}X} = \underbrace{P^{-1}F(t)}$

$$Y' + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

y escrito como ecuaciones es

$$\begin{cases} y_1' + y_1 = t & (1) \\ y_2' - y_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Resuelvo (1) $\rightarrow$ factor integrante⁷ $\Rightarrow u = e^t \rightarrow$

$$\underbrace{e^t y_1' + e^t y_1}_{(y_1 e^t)'} = t e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 e^t = \int t e^t dt = e^t (t - 1) + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = t - 1 + c_1 e^{-t}$$

Resuelvo (2) $\rightarrow u = e^{-t} \Rightarrow$

$$\underbrace{e^{-t} y_2' - e^{-t} y_2}_{(y_2 e^{-t})'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_2 e^{-t}}_{y_2 e^{-t}} = \int 0 dt = c_2 \Rightarrow$$

$$y_2 = c_2 e^t$$

⁷Es un método de resolución que se ve en análisis matemático 2 que a mi me gusta mas ya que te da de una la solución general. En realidad es lo mismo pero con otra forma...

y ahora solo nos falta volver a las coordenadas originales pichon:

$$\begin{aligned} X = PY &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t-1+c_1e^{-t} \\ c_2e^t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} t-1+c_1e^{-t}+c_2e^t \\ c_2e^t-t+1-c_1e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

lo expresamos mas líndo:

$$X = c_1e^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t-1 \\ 1-t \end{bmatrix}$$

6. Hallar A tal que la solución de $X' = AX$ sea $X = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + c_25e^{3t} \\ c_12e^{-t} + c_2e^{3t} \end{bmatrix} \rightarrow$

$A_{B^C D^E FG}$
CalCulo $X' \rightarrow$

$$X' = \begin{bmatrix} -c_1e^{-t} + c_28e^{3t} \\ -2c_1e^{-t} + 3c_2e^{3t} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -c_1e^{-t} + c_28e^{3t} \\ -2c_1e^{-t} + 3c_2e^{3t} \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + c_25e^{3t} \\ c_12e^{-t} + c_2e^{3t} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} a_{11}(c_1e^{-t} + c_25e^{3t}) + a_{12}(c_12e^{-t} + c_2e^{3t}) = -c_1e^{-t} + c_28e^{3t} \\ a_{21}(c_1e^{-t} + c_25e^{3t}) + a_{22}(c_12e^{-t} + c_2e^{3t}) = -2c_1e^{-t} + 3c_2e^{3t} \end{cases} \end{aligned}$$

le asignamos valores a $c_1 = c_2 = 1$ para hacer mas fácil

$$\begin{cases} a_{11}(e^{-t} + 5e^{3t}) + a_{12}(2e^{-t} + e^{3t}) = -e^{-t} + 8e^{3t} \\ a_{21}(e^{-t} + 5e^{3t}) + a_{22}(2e^{-t} + e^{3t}) = -2e^{-t} + 3e^{3t} \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{cases} e^{-t}(a_{11} + 2a_{12}) + e^{3t}(5a_{11} + a_{12}) = -e^{-t} + 8e^{3t} \\ e^{-t}(a_{21} + 2a_{22}) + e^{3t}(5a_{21} + a_{22}) = -2e^{-t} + 3e^{3t} \end{cases}$$

Como $\{e^{-t}, e^{3t}\}$ es linealmente independiente, éstas dos ecuaciones se cumplen

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = -1 & \rightarrow a_{11} = -1 - 2a_{12} \\ 5a_{11} + a_{12} = 8 & \rightarrow 5(-1 - 2a_{12}) + a_{12} = 8 \\ a_{21} + 2a_{22} = -2 & \rightarrow a_{21} = -2 - 2a_{22} \\ 5a_{21} + a_{22} = 3 & \rightarrow 5(-2 - 2a_{22}) + a_{22} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 17 & -13 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$$

7. Considere la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ y el sistema $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} Y$

1. Probar que si Y es solución del sistema, entonces y_1 es solución de la ecuación de segundo orden.

Escribamos el sistema como un sistema

$$\text{sistema} \rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 & (a) \\ y_2' = -by_1 - ay_2 & (b) \end{cases}$$

Busco las segundas derivadas:

$$\text{derigo el sistema} \rightarrow \begin{cases} y_1'' = y_2' & (c) \\ y_2'' = -by_1' - ay_2' & (d) \end{cases}$$

Despejo de (b):

$$y_1 = -\frac{y_2' + ay_2}{b} \iff b \neq 0$$

entonces tenemos

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{y_2' + ay_2}{b} \\ y_1' = y_2 \\ y_1'' = y_2' \end{cases} \iff b \neq 0$$

y si reemplazamos en $y'' + ay' + by = 0$ tenemos lo que buscábamos:

$$y_2' + ay_2 + b \left(-\frac{y_2' + ay_2}{b} \right) = 0$$

2. Gilada

3. Mas gilada

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ diagonalizable, con autovalores reales y $\det A > 0$ y $\text{tr} A < 0$. Muestre que toda solución de $Y' = AY$ verifica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_i = 0$.

$$\text{Sean } \text{aval}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} \Rightarrow \begin{cases} \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \\ \text{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \end{cases} \iff \lambda_1 < 0 \text{ y } \lambda_2 < 0.$$

Entonces, supongase una diagonalización $A = QDQ^{-1}$ y se cambian las variables según $X = Q^{-1}Y$. Resulta el sistema

$$X' = DX \rightarrow \begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \Rightarrow x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \Rightarrow x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Como $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$, ambas funciones son decrecientes con asintota en 0 y el cambio de variables a las originales simplemente es una combinación lineal de ellas, que también tenderá a 0.

3. Práctica 6: Matrices hermíticas. Formas cuadráticas. DVS

6. Diagonalizar ortogonalmente:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Autovalores⁸: $\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff |3-\lambda| = 1 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{2, 4\}$

Autovectores:

$$S_{\lambda=2} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=4} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Fijaos que $S_{\lambda=2} = S_{\lambda=4}^\perp$ y esto es una propiedad piola de las matrices simétricas.

La diagonalización que buscamos es $A = PDP^T$ donde las columnas de P forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ construida con autovectores de A .
Entonces solo tenemos que normalizar los autovectores amigos:

$$A = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1} = P^T}$$

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Autovalores: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{aval}(B) = \{-2, 2, 5\}$

Autovectores

$$S_{\lambda=-2} = \text{nul} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=5} = \text{nul} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{matrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

⁸Propiedad: $\text{aval}(A) \subset \mathbb{R} \forall A$ simétrica.

Vamos por buen camino ya que todos los autoespacios son ortogonales.
Normalizamos los vectores y armamos la descomposicion:

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}^{P^{-1} = P^T}$$

7. Diagonalizar unitariamente:

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovalores} \rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{-1, 1\}$$

Autovectores:

$$S_{\lambda=-1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=1} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Con el producto interno canónico en $\mathbb{C}^2$ son ortogonales ($\langle i, -i \rangle = \overline{i}(-i) = 1$) así que tamos bien! Normalizamos y armamos las matrices

$$A = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1} = P^T}$$

$$2. B = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovalores} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i & 0 \\ -i & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] \Rightarrow \text{aval}(B) = \{0, 1, 2\}$$

Autovectores:

$$S_{\lambda=0} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \text{nul} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Con el producto interno de $\mathbb{C}^3$ son ortogonales (Y). Entonces la diagonalización es

$$B = \overbrace{\begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^D \quad P^{-1} = P^T \quad \underbrace{[P^T]}$$

9. Verdadero o falso

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable ortogonalmente entonces A es simétrica

Verdadero: Sea $A = PDP^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T$

2. Una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene n autovalores reales distintos

Falso: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene un solo autovalor. Es verdadero el hecho de que $\text{aval}(A) \subset \mathbb{R}$.

3. Las multiplicidades algebraica y geométrica de cada autovalor de una matriz simétrica coinciden

Verdadero: Es porque si A es simétrica $\Rightarrow A$ es diagonalizable $\iff$ las multiplicidades son iguales.

4. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces A es hermitica

Falso ya que hay matrices que no lo cumplen como las del ejercicio 8.

5. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable unitariamente y sus autovalores son reales entonces A es hermitica

Verdadero: $A = UDU^H = (UDU^H)^H = (U^H)^H D^H U^H = UDU^H$.

6. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces A^k también es diagonalizable unitariamente.

Verdadero: $A = UDU^H \Rightarrow A^k = (UDU^H)^k = UD \underbrace{U^H U}_I \underbrace{D U^H \dots U}_I DU^H = UD^k U^H$.

7. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable unitariamente entonces su inversa (en caso de existir) también lo es

Verdadero: $A = UDU^H \Rightarrow A^{-1} = (UDU^H)^{-1} = (U^H)^{-1} D^{-1} U^{-1} = UD^{-1} U^H$

10.

1. Encontrar autovalores y autovectores de $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y comprobar que es diagonalizable unitariamente.
Autovalores $\rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{aval}(C) = \{-i, i\}$
Autovectores:

$$S_{\lambda=-i} = \text{nul} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=i} = \text{nul} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Normalizamos y armamos la diagonalización bien piola:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

2. Considere $A = iC = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ (es hermitica a simple vista). Explicar por qué a partir de esto último se deduce que los autovalores de C son imaginarios y que C es diagonalizable unitariamente.
 $A = iC \Rightarrow A^H = (iC)^H = i^T \overline{C}^T = -iC^T = -i(-C) = iC = A$
3. Demuestre que si $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es antisimétrica entonces $A = iC$ es hermitica.
 $A = iC \Rightarrow A^H = (iC)^H = i^T \overline{C}^T = -iC^T = -i(-C) = iC = A$
4. No se
5. Demuestre que si $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces es singular si n es impar.
 C es antisimétrica $\iff \underbrace{C = -C^T}_{\text{antisimétrica}} \Rightarrow \det C = \det(-C^T) = -\det(C^T) = -\det C \iff \det C = 0 \dots$ En ningún momento usé lo de n impar, no sé qué pasó ahí...

11.

1. Hallar $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica tal que $\text{aval}(A) = \{-1, 2\}$ sean sus autovalores y $S_{\lambda=-1} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Sabemos que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ tiene que ser 2 por el dato de $S_{\lambda=-1}$. Lo que podemos hacer es completar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir del dato y de ahí sacar la matriz.

$$\mathbb{R}^3 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Normalizamos y armamos la descomposición

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Halle $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ hermitica tal que $B = A^3 - A^2 + A - I$ sea singular, $\lambda = 2$ sea autovalor doble y $S = \{X \in \mathbb{C}^3 / x_1 - ix_2 + x_3 = 0\}$ sea invariante por A .

Ya que S debe ser invariante, podemos proponerlo como un autoespacio.

$$S = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y viendo que $\dim(S) = 2$ nos sirve para usarlo como autoespacio asociado a $\lambda = 2$ por lo tanto ya lo definimos

$$S_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La condición del polinomio ese feo la podemos cumplir haciendo que algún autovalor de A sea raíz ya que si $\lambda \in \text{aval}(A)$ y $B = P(A) \Rightarrow P(\lambda) \in \text{aval}(B)$. Las raíces del polinomio son $\{1, i, -i\}$. Fueron astutos, de las tres raíces SOLAMENTE SIRVE 1, ya que si A es hermitica $\Rightarrow \text{aval}(A) \subset \mathbb{R}$. Entonces ya podemos definir $\text{aval}(A) = \{1, 2, 2\}$. Acto seguido buscamos una base ortonormal de $S_{\lambda=2}$ y la extendemos pa completar $\mathbb{C}^3$. Con la formula magica de proyección

$$\begin{aligned} P_{\text{gen}\{v\}}(x) &= \frac{(v, x)}{(v, v)} v \Rightarrow \\ P_{\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \frac{\left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{i}{2} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y ahora sabemos lo siguiente: $X = P_{\text{gen}\{v\}}(x) + P_{\text{gen}\{v\}^\perp}(x) \rightarrow$ así que podemos obtener la parte ortogonal restando

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -i/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$S_{\lambda=2} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Solo falta completar la base con el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ que sale del siguiente

sistema

$$\begin{cases} -ia + 1b = 0 \\ -a + ib + 2c = 0 \end{cases}$$

que garantiza su ortogonalidad respecto a los otros dos. Entonces

$$\begin{cases} b = ia & a \in \mathbb{C} \\ 2c = a - ib & \Rightarrow c = a \end{cases}$$

$$\mathbb{C}^2 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Simplemente normalizamos y armamos la matriz solicitada:

$$A = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & i & -1 \\ -i & 5 & -i \\ -1 & i & 5 \end{bmatrix}$$

12. Clasificar cada forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ y efectuarles un cambio de variable para que queden expresadas en forma linda. Graficar conjuntos de nivel.

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$

Expresarlo en forma matricial es como sigue $f(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} x$ y nues-

tra hermosa matriz a analizar será $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Vamos a buscar una diagonalización de A para hacer todo lo que nos piden

Autovalores $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 25 = 0 \iff |1-\lambda| = 5 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{-4, 6\}$

Autovectores

$$S_{\lambda=-4} = \text{nul} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=6} = \text{nul} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Por lo tanto la descomposición ortogonal de A es

$$A = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1} = P^T}$$

A ES INDEFINIDA ya que sus autovalores son tanto positivos como negativos. El cambio de variables sería decir $y = P^T x$ entonces resulta

$$f(x) = \overbrace{x^T}^{y^T} \overbrace{P}^D \overbrace{P^T x}^y \Rightarrow f(y) = y^T \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} y = -4y_1^2 + 6y_2^2$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

$$f(x) = x^T \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x \rightarrow \text{buscamos autovalores y toda la bola } \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1 \Rightarrow \text{aval}(A) = \{\text{basura}\} \text{ Los autovalores son bastante feos y es lo mismo que acá arriba.}$$

13. Lo mismo que el 12 pero en erre tres.

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

$$\text{En forma matricial } f(x) = x^T \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} x \rightarrow \text{sencillamente no pinta hacer todo... Es lo de siempre: diagonalizas y listo.}$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

$$f(x) = x^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2 + 3\lambda \Rightarrow \text{aval}(A) = \{2, -1\}$$

Busco autovectores

$$S_{\lambda=-1} = \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=2} = \text{nul} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1}} \text{nul} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

La diagonalización resulta ser

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cambio de variables $y = Q^{-1}x$ queda $f(y) = y^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} y =$
 $2y_3^2 - y_2^2 - y_1^2$

14.

1. Demuestre que $(x, y) = x^H Q y$ define un producto interno $\iff Q$ es definida positiva

Como Q es hermítica entonces se la puede descomponer como $Q = U D U^H$ y hacer el hermoso cambio de variables $z = U^H y$ y $w = U^H x \Rightarrow w^H = x^H U$ con lo que queda $f(w, z) = w^H D z = \lambda_1 \bar{w}_1 z_1 + \dots + \lambda_n \bar{w}_n z_n$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ porque los autovalores de matrices hermíticas siempre son reales. Por otra parte, el producto interno queda definido si y solo si cumple con las siguientes condiciones (su definición):

- a) $(u, v) = \overline{(v, u)}$
 $f(w, z) = \overline{f(w, z)} \Rightarrow \overline{f(w, z)} = \overline{\lambda_1 \bar{w}_1 z_1 + \dots + \lambda_n \bar{w}_n z_n} = \overline{\lambda_1 \bar{w}_1 z_1} + \dots + \overline{\lambda_n \bar{w}_n z_n} = \lambda_1 \bar{\bar{w}_1} \bar{z}_1 + \dots + \lambda_n \bar{\bar{w}_n} \bar{z}_n = \lambda_1 w_1 \bar{z}_1 + \dots + \lambda_n w_n \bar{z}_n = \lambda_1 \overline{\bar{w}_1 z_1} + \dots + \lambda_n \overline{\bar{w}_n z_n} = \overline{f(w, z)} \forall w, z \in \mathbb{C}^n$
- b) $(\alpha u, w) = \overline{\alpha} (u, w)$
Bla bla
- c) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$
Bla bla
- d) $(v, v) \geq 0$ y $(v, v) = 0 \iff v = 0_V$
Si $w = a + bi$ entonces $f(w, w) = w^H D z = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{w}_j w_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j (a_j^2 + b_j^2) \geq 0 \forall w \in \mathbb{C}^n \iff \lambda_j > 0 \forall j = 1, \dots, n \iff Q$ es definida positiva.

2. Agarras a cada una y te fijas si la matriz característica es definida positiva y hermítica.
3. Lo mismo.

15. Demuestre que si $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ entonces $G = B^T B$ es semidefinida positiva. Encontrar la condición de B para que G sea definida positiva.

Podemos probarlo de la siguiente manera: $x^T G x = x^T B^T B x = (Bx)^T Bx = (Bx, Bx) = \|Bx\|^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Además $x^T G x = 0 \iff x = 0 \Rightarrow G$ es definida positiva.

17.

1. Encontrar los máximos y mínimos de las formas cuadráticas con la restricción $\|x\| = 1$.
Para ésto usamos la desigualdad de Rayleigh: $\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 = x^T \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} x$ y además $\text{aval}(A) = \{-4, 6\} \Rightarrow -4 \leq f(x) \leq 6$
Hallar en dónde sucede esto es fácil. Si contamos con la representación matricial podemos decir lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{P^{-1} = P^T}$$

y la función queda

$$f(x) = x^T P D P^T x = y^T D y = f(y)$$

donde $y = P^T x$ entonces

$$f(y) = y^T \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} y = -4y_1^2 + 6y_2^2$$

entonces buscamos dónde se dan los extremos

$$\begin{cases} -4y_1^2 + 6y_2^2 = -4 & \Rightarrow |y_1| = 1 \\ -4y_1^2 + 6y_2^2 = 6 & \Rightarrow |y_2| = 1 \end{cases}$$

El máximo se alcanza en $y = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el mínimo en $y = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

así que pasandolo a la vieja variable con $x = Py$ queda

$$\text{Máximo} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Mínimo} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Encontrar los extremos de $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 10x_3^2$ con la restricción $x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 = 9$.

La expresión matricial de Q es $Q(x) = x^T \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x$.

La restricción es $R(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} x = 9$. Laburamos con esto. Si

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ busquemos una matriz B simétrica tal que $R = B^2 = P D P^T$. En este caso ya tenemos una matriz diagonal así que nos ahorra

laburo. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Lo que sigue es decir:

$$\begin{aligned} R(x) &= x^T R x = x^T B^2 x = \\ &= x^T B B x = x^T B^T B x = (Bx)^T B x = y^T y = \|y\|^2 = 9 \end{aligned}$$

con $y = Bx$. Por ende resolvemos el problema de hallar los extremos de $Q(y)$ con la restricción $\|y\| = 3$. Como $x = B^{-1}y$ entonces hacemos el cambio en Q :

$$Q(x) = x^T Q x = (B^{-1}y)^T Q (B^{-1}y) = y^T \underbrace{(B^{-1})^T Q B^{-1}} y \Rightarrow$$

$$Q(y) = y^T \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10/9 \end{bmatrix}}^{Q*} y$$

Utilizamos Rayleigh. Necesitamos los autovalores de $Q*$:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 10/9 \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{10}{9} \right) [(\lambda + 2)^2 - 1] \Rightarrow \text{aval}(Q) = \left\{ -3, -\frac{10}{9}, -1 \right\}$$

Entonces el amigo Rayleigh dice que

$$\lambda_{\min} \|y\|^2 \leq y^T A y \leq \lambda_{\max} \|y\|^2$$

y si la restricción es $\|y\| = 3$ nos queda:

$$-27 \leq Q(y) \leq -9$$

Para saber a dónde se alcanzan estos extremos, podemos diagonalizar $Q(y) = y^T Q * y$ y buscarlos allí.

$$\begin{aligned} S_{\lambda=-\frac{10}{9}} &= \text{nul} \begin{pmatrix} -8 & -1 & 0 \\ -1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ S_{\lambda=-3} &= \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 17/9 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ S_{\lambda=-1} &= \text{nul} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

entonces armamos una diagonalización ortogonal de $Q(y)$ (es necesario que sea ortogonal pa lo que sigue):

$$Q* = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^P \overbrace{\begin{bmatrix} -10/9 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}^{P^{-1} = P^T}$$

Expresemos la función diagonalizada:

$$Q(y) = y^T Q* y = y^T \underbrace{P} D \underbrace{P^T} y \Rightarrow$$

$$Q(w) = w^T D w$$

con $w = P^T y$. Falta la restricción: Sabemos que $\|y\| = 3$ es la restricción para y por lo tanto:

$$y = Pw \Rightarrow \|y\| = \|Pw\| = \|w\| = 3$$

Lo anterior se deduce de una propiedad de las matrices ortogonales y unitarias: $\|Pv\| = \|v\|$. Entonces, conociendo de antemano los valores máximo y mínimo alcanzados por la función Q buscamos en qué coordenadas de w sucede con la restricción $\|w\| = 3$:

$$Q(w) = -\frac{10}{9}w_1^2 - 3w_2^2 - w_3^2 \rightarrow \begin{cases} Q(w) = -27 & \rightarrow |w_2| = 3 \\ Q(w) = -9 & \rightarrow |w_3| = 3 \end{cases}$$

- El mínimo $Q(w) = -27$ se alcanza en $w = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

- El máximo $Q(w) = -3$ se alcanza en $w = \pm \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ahora tenemos que expresarlo en las variables originales: $w = P^T y$ y $y = Bx \Rightarrow w = P^T Bx \Rightarrow x = B^{-1}Pw$. Hacemos el cambio

- El mínimo $Q(x) = -27$ se alcanza en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

- El máximo $Q(x) = -9$ se alcanza en $x = \pm$ se va a la mierda...

Parte II

Teoría

4. Matriz de una transformación lineal

Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ con $\dim(\mathbb{V}) = n$. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ otra base de $\mathbb{V}$.

4.1. Matriz de la transformación

Para hallar T_{BB_2} se procede de la siguiente manera:

1. Armar una matriz cuyas columnas sean los vectores de la base inicial B

$$[v_1 | v_2 | \dots | v_n]$$

2. Aplicarle a cada vector lo que hace la transformación, es decir, buscar la imagen de cada vector

$$[T(v_1) | T(v_2) | \dots | T(v_n)]$$

3. Buscar las coordenadas de cada imagen en la base final B_2

$$T_{BB_2} = [[T(v_1)]_{B_2} | [T(v_2)]_{B_2} | \dots | [T(v_n)]_{B_2}]$$

4.2. Matriz de cambio de base

Si la matriz que se deseara hallar fuese la de cambio de base, se procede igual que para la matriz de una transformación pensando que el cambio de coordenadas es una transformación lineal:

1. Armar una matriz cuyas columnas sean los vectores de la base inicial B

$$[v_1 | v_2 | \dots | v_n]$$

2. Aplicarle a cada vector lo que hace la transformación, es decir, NADA para el cambio de coordenadas.

$$[T(v_1) | T(v_2) | \dots | T(v_n)] = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$$

3. Buscar las coordenadas de cada imagen en la base final B_2

$$C_{BB_2} = [[v_1]_{B_2} | [v_2]_{B_2} | \dots | [v_n]_{B_2}]$$

5. Wronskiano

Sirve para saber si un conjunto de funciones son linealmente independientes o dependientes.

Sea un conjunto de funciones $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ con $f_i \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, $f_i = f_i(x)$, entonces se define el wronskiano como

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \det \left(\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \right) \quad x \in I$$

Si $\exists x_0 \in I$ tal que $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x_0) \neq 0 \Rightarrow \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es linealmente independiente.

6. Producto interno

Sean $u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow$ un producto interno es una función $(,) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ que cumple

1. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
2. $(\alpha u, w) = \alpha(u, w)$
3. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$
4. $(v, v) \geq 0$ y $(v, v) = 0 \iff v = 0_{\mathbb{V}}$

6.1. Propiedades

1. Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{V} \rightarrow \begin{cases} |(u, v)| = \|u\| \|v\| & \iff \text{son ld} \\ |(u, v)| < \|u\| \|v\| & \iff \text{son li} \end{cases}$$

2. Desigualdad triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

3. Ortogonalidad

$$u \perp v \iff (u, v) = 0$$

4. Teorema de Pitagoras

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff (u, v) = 0$$

en general,

$$\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2 \iff v_1 \perp v_2 \perp \dots \perp v_n$$

6.2. Matriz del producto interno

Al igual que una transformación lineal, un producto interno queda definido sobre una base B de $\mathbb{V}$ y/o con una matriz⁹. Si se conoce el producto interno entre todos los elementos de una base entonces se conoce el producto interno para todos los vectores del espacio:

$$(u, v) = \overline{[u]_B}^T G_B [v]_B$$

donde $[u]_B$ son “las coordenadas de u en la base B ” y $G_B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se define como

$$G_B = \begin{bmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \cdots & (b_1, b_n) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \cdots & (b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_n, b_1) & (b_n, b_2) & \cdots & (b_n, b_n) \end{bmatrix}$$

donde b_i son los elementos $B = \text{base}(\mathbb{V})$.

Propiedades de G_B

1. G_B es hermitica o simétrica
2. G_B es definida positiva (ver sección 11.2.2 signo de una matriz)

7. Proyección ortogonal

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto interno y $S \subset \mathbb{V}$ un subespacio, entonces se dice que x' es la proyección de x sobre $S \iff$

$$1) x' \in S \quad 2) x - x' \in S^\perp$$

Formula magica de proyección Si $B = \text{bog}(S) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ entonces

$$P_S(x) = \sum_{i=1}^k \frac{(b_i, x)}{(b_i, b_i)} \cdot b_i \quad (2)$$

Propiedades de proyección ortogonal

1. $P_S(x) = 0_{\mathbb{V}} \iff x \in S^\perp$ y $P_S(x) = x \iff x \in S$
2. $x = P_S(x) + P_{S^\perp}(x) \Rightarrow x - P_S(x) = P_{S^\perp}(x)$
3. La proyección ortogonal es una transformación lineal
4. Sea A un subespacio $\Rightarrow d(v, A) = d(v, P_A(v)) = \|v - P_A(v)\| = \|P_{A^\perp}(v)\|$

⁹Sin embargo, el producto interno NO es una transformación lineal.

7.1. Matriz de proyección

$P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz de proyección si cumple que

1. P es hermítica
2. $P = PP$

Propiedades

1. $Px = P_{col(P)}(x)$
2. P proyecta sobre $col(P)$
3. Si P_S es la matriz de proyección sobre $S \Rightarrow P_{S^\perp} = (I - P_S)$

Cálculo de P_S Sea $S \subset \mathbb{K}^n$ un subespacio y $BON(S) = B = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Definimos $Q = [u_1 | u_2 | \dots | u_k] \in \mathbb{K}^{n \times k}$ con los elementos de B y entonces

$$P_s = QQ^H$$

7.2. Gram-Schmidt

Consiste en buscar bases ortogonales a partir de bases que no lo son. Sea $S = gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ donde los elementos v_i no son ortogonales. Entonces aplicamos la formula magica de proyeccion (formula 2). Primero buscamos $P_{gen\{v_1\}}(v_2) = u_2$. Luego buscamos $P_{gen\{v_1, u_2\}}(v_3) = u_3$ y así sucesivamente hasta que obtenemos todos los elementos en forma ortogonal entre si.

7.3. Cuadrados mínimos

Sea el sistema lineal $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Si es compatible todo bien, pero si es incompatible qué hacemos? Bueno, sabemos que $Ax \in col(A) \Rightarrow$ podemos buscar la solución “mas próxima” a b resolviendo $A\hat{x} = P_{col(A)}(b)$. Con deducciones y un poco de magia la conclusión es que resolver $Ax = b$ por cuadrados mínimos es resolver:

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

Si $rg(A) = n$ (es decir, si A es de rango máximo) entonces cuadrados mínimos tiene una única solución.

Ver también la sección 12.5 Cuadrados mínimos y DVS.

8. Descomposición QR

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $rg(A) = n \Rightarrow$ siempre $\exists Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A = QR$.

- La matriz Q se define como

$$Q = [u_1 | u_2 | \dots | u_n]$$

donde $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = BON(col(A))$

- La matriz R se define como

$$R = \begin{bmatrix} \|u_1\| & algo & \cdots & algo \\ 0 & \|u_2\| & \cdots & algo \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|u_n\| \end{bmatrix}$$

donde *algo* es “algo” que no creo que tomen... Pero puedes hallar R de la siguiente manera:

$$A = QR \Rightarrow R = Q^T A$$

Al parecer $Q \in \mathcal{M}_O \Rightarrow Q^{-1} = Q^T \dots$

8.1. Descomposición QR y cuadrados mínimos

Si $rg(A) = n \Rightarrow \hat{x} = R^{-1}Q^T b \dots$. No se por que pero mi carpeta dice eso.

9. Autovalores y autovectores

Sea A una matriz cuadrada $\in \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), entonces:

1. **Autovector:** $v \in \mathbb{K}^n$ es autovector de $A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} / Av = \lambda v$. λ es el autovalor asociado a v .
2. **Polinomio característico de A :** $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. SIEMPRE el grado de P_A es n .
3. **Autovalor:** λ es autovalor de $A \iff \exists v \in \mathbb{K}^n / Av = \lambda v$. Los autovalores de A son las raíces de $P_A(\lambda)$.
 - a) Multiplicidad algebraica de λ : Es la multiplicidad de λ como raíz de $P_A(\lambda)$.
 - b) Multiplicidad geométrica de λ : Es la dimensión del autoespacio asociado a λ .

$$\text{SIEMPRE} \rightarrow \text{malg}(\lambda) \geq \text{mgeo}(\lambda)$$

4. **Autoespacio:** $S_{\lambda_o} \subset \mathbb{K}^n$ es el autoespacio asociado a λ_o y se define como $S_{\lambda_o} = \{v \in \mathbb{K}^n / Av = \lambda_o v\}$.

Observaciones/propiedades

- Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ son autovalores de A con $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es li
- Si $\lambda_o = 0$ es autovalor de $A \Rightarrow \exists v \neq 0 / Av = 0 \Rightarrow v \in Nul(A) \Rightarrow S_{\lambda=0} = Nul(A)$
- $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
 - $\lambda = 0 \in \text{aval}(A) \iff \det A = 0 \stackrel{10}{\Rightarrow} A \text{ es singular} \stackrel{11}{\iff} \lambda = 0 \in \text{aval}(A)$
 - $rg(A) < n \iff \lambda = 0 \in \text{aval}(A)$
- $tr A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
- $\alpha\lambda \in \text{aval}(\alpha A), \alpha \in \mathbb{K}$
- $\lambda^k \in \text{aval}(A^k), k \in \mathbb{N}$
- Si $\exists A^{-1} \Rightarrow \lambda^{-1} \in \text{aval}(A^{-1})$
- Sea $p(x) \in \mathcal{P}_m \Rightarrow p(\lambda) \in \text{aval}(p(A))$ y el autoespacio asociado es el mismo
- $(A + kI)v = Av + kIv = \lambda v + kv = (\lambda + k)v, k \in \mathbb{K}$
- $A^k v = A^{k-1}Av = A^{k-1}\lambda v = \dots = \lambda^k v$
- Si $v \in \text{aval}(A) \cap \text{aval}(B) \Rightarrow v \in \text{aval}(A + B)$ y $v \in \text{aval}(AB)$
- Si S es autoespacio de $A \Rightarrow S$ es invariante¹² por A y $S^\perp$ también.

10. Diagonalización

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es diagonalizable $\iff \exists Q, D/A = QDQ^{-1}$ donde Q está formada por autovectores de A y $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$. A es diagonalizable $\iff \exists$ una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A .

- A es diagonalizable en $\mathbb{R} \iff \lambda_i \in \mathbb{R} \forall i$ y $\text{malg}\lambda_i = \text{mgeo}\lambda_i \forall i$
- A es diagonalizable en $\mathbb{C} \iff \text{malg}\lambda_i = \text{mgeo}\lambda_i \forall i$

¹⁰ $\text{aval}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

¹¹ A es singular $\iff \det A = 0$

¹² S es invariante por A si $Av \in S \forall v \in S$

10.1. Matrices semejantes

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son semejantes $\iff \exists Q/B = QAQ^{-1}$.¹³

- Si A es diagonalizable $\Rightarrow A = QDQ^{-1} \Rightarrow A \sim D$ ¹⁴
- Si $A \sim B$ y $C \sim B \Rightarrow A \sim C$
- A y B representan a la misma transformación lineal $\iff A \sim B$
- $A \sim B \Rightarrow \det A = \det B$
- $A \sim B \Rightarrow \text{tr} A = \text{tr} B$

Sean $A \sim B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, entonces:

- $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \Rightarrow \text{aval}(A) = \text{aval}(B)$ ¹⁵ y también la *malg* cada autovalor.
- Si $\lambda \in \text{aval}(A) \Rightarrow \lambda \in \text{aval}(B) \Rightarrow \text{mgeo}(\lambda) \text{ en } A = \text{mgeo}(\lambda) \text{ en } B$
- Si $v \in \text{avec}(A) \Rightarrow Qv \in \text{avec}(B)$

11. Matrices hermiticas y simétricas

11.1. Matrices unitarias y ortogonales

- Se dice que $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es unitaria $\iff U^{-1} = U^H$.¹⁶ Llamaremos $\mathcal{M}_U$ al conjunto de matrices unitarias.
- Se dice que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal $\iff P^{-1} = P^T$. Llamaremos $\mathcal{M}_O$ al conjunto de matrices ortogonales.

Es claro que $\mathcal{M}_O \subset \mathcal{M}_U$, es decir, toda matriz ortogonal es unitaria $\Rightarrow$ TODAS LAS PROPIEDADES DE LAS MATRICES UNITARIAS SE CUMPLEN PARA LAS ORTOGONALES, que serían simplemente un caso particular de las unitarias.

Observaciones/propiedades:

- $U \in \mathcal{M}_U \iff$ sus columnas forman una $BON(\mathbb{C}^n)$
- $U \in \mathcal{M}_U \iff$ sus filas forman una $BON(\mathbb{C}^n)$
- $U \in \mathcal{M}_U \Rightarrow U$ representa una matriz de reflexión o de rotación
- Si $U \in \mathcal{M}_U \Rightarrow |\det U| = 1$ (ojo que $\det U \in \mathbb{C}$)

¹³La idea es que tanto A como B representan la misma transformación lineal pero desde distintas bases y Q es $C_{BB'}$ que son las bases sobre las que se definen A y B . Algo así: $[T]_{B'} = C_{BB'} [T]_B C_{BB'}^{-1}$ donde $B = [T]_{B'}$ y $A = [T]_B$.

¹⁴ $A \sim D$ significa " A es semejante a D ".

¹⁵ $\text{aval}(A)$ es el conjunto de autovalores de A . $\text{aval}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \lambda \text{ es autovalor de } A\}$

¹⁶ $U^H = \bar{U}^T$

- Si $P \in \mathcal{M}_O$ y $\det P = 1 \Rightarrow$ es de rotación
- Si $P \in \mathcal{M}_O$ y $\det P = -1 \Rightarrow$ es de reflexión
- Si U y $V \in \mathcal{M}_U \Rightarrow (UV) \in \mathcal{M}_U$
- Si $U \in \mathcal{M}_U \Rightarrow (Ux, Uy) = (x, y) \forall x, y \in \mathbb{C}^n$
 - Una consecuencia de esto es que $\|Ux\| = \|x\|$
- Si $U \in \mathcal{M}_U$ y $\lambda \in \text{aval}(U) \Rightarrow |\lambda| = 1$
- Si $U \in \mathcal{M}_U$ y $\text{BON}_1(\mathbb{C}^n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow \{Uv_1, Uv_2, \dots, Uv_n\} = \text{BON}_2(\mathbb{C}^n)$. Esto se puede entender facilmente ya que si $U \in \mathcal{M}_U \Rightarrow U$ es de rotación o reflexión $\Rightarrow$ al multiplicar una BON por U todos sus vectores son rotados o reflejados simplemente.

11.2. Matrices hermíticas y simétricas

Nuevamente ocurre que $\mathcal{M}_H \supset \mathcal{M}_S \Rightarrow$ todas las propiedades que se cumplan para matrices hermíticas se cumplen para matrices simétricas.

Propiedades: sea $A \in \mathcal{M}_H$, entonces

1. $\bar{x}^T Ax \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{C}^n$
2. $\text{aval}(A) \subset \mathbb{R}$, es decir: todos los autovalores de A son reales.
3. Si λ_1 y $\lambda_2 \in \text{aval}(A)$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow S_{\lambda_1} \perp S_{\lambda_2}$

11.2.1. Teorema de la descomposición espectral

1. Para matrices complejas:

$$A \in \mathcal{M}_{Herm} \Rightarrow \exists D = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ y } U \in \mathcal{M}_U / A = UDU^H$$

En palabras: Si A es hermitica $\Rightarrow \exists$ una matriz unitaria U y una matriz diagonal D real tal que $A = UDU^H$. Se puede deducir que $A \in \mathcal{M}_H \Rightarrow \exists \text{BON}(\mathbb{C}^n) = \text{avec}(A)$.

2. Para matrices reales

$$A \in \mathcal{M}_{Sim} \iff A \text{ es diagonalizable ortogonalmente}$$

11.2.2. “Signo” de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_H$ y $\lambda_i \in \text{aval}(A)$, entonces:

1. A es definida positiva $\iff \lambda_i > 0 \forall i$
2. A es semidefinida positiva $\iff \lambda_i \geq 0 \forall i$
3. A es definida negativa $\iff \lambda_i < 0 \forall i$
4. A es semidefinida negativa $\iff \lambda_i \leq 0 \forall i$
5. A es indefinida $\iff \lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$ para algún par i, j

Ver también la primera parte de la sección “11.3 Formas cuadráticas”.

También se puede encontrar el “signo” de una matriz mediante los determinantes de los menores. A es definida positiva $\iff \det(M_i) > 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$

11.3. Formas cuadráticas

Son funciones definidas como $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \bar{x}^T A x$ con $A \in \mathcal{M}_H$ o bien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^T A x$ con $A \in \mathcal{M}_S$.

1. A es definida positiva $\iff f(x) > 0 \forall x \neq 0$
2. A es definida negativa $\iff f(x) < 0 \forall x \neq 0$
3. A es indefinida $\iff \exists x_1, x_2 / f(x_1) > 0$ y $f(x_2) < 0$
4. A es semidefinida positiva $\iff f(x) \geq 0 \forall x \neq 0$
5. A es semidefinida negativa $\iff f(x) \leq 0 \forall x \neq 0$

Ver también la sección “11.2.2 “Signo” de una matriz”.

11.3.1. Cambio de coordenadas/variables

Las formas cuadráticas $f(x)$ resultan mas simples cuando A es diagonal, por ende siempre se trata de llevar la forma cuadrática a una expresión en la que la matriz que la caracteriza sea diagonal. Los conjuntos de nivel de una forma cuadrática siempre son elipses y cosas del estilo:

- Cuando A no es diagonal, las elipses y figuritas aparecen rotadas respecto a los ejes que definen a x
- Cuando A es diagonal, las elipses y figuritas aparecen alineadas con los ejes que definen a x

Entonces, supongamos que tenemos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^T A x$. Como $A \in \mathcal{M}_o \Rightarrow A = P D P^T$ por lo que podemos escribir la forma cuadrática como:

$$f(x) = x^T P D P^T x$$

Llamando $y = P^T x$ se puede claramente ver que $y^T = x^T P$ y la $f(x)$ puede expresarse fácilmente como

$$f(y) = y^T D y$$

donde D es una matriz diagonal. Así, obtuvimos una forma sencilla de expresar la forma cuadrática mediante un cambio de variables. Si graficamos los conjuntos de nivel de $f(x)$ veremos las mismas figuras que si graficamos $f(y)$ pero estarán rotadas feo.

11.3.2. Optimización

Se trata de buscar los máximos y mínimos de las formas cuadráticas definidas en la sección 11.3 sujeto a restricciones en el dominio del tipo $\|x\| = r \in \mathbb{R}$ (que serían círculos) o restringir el dominio a curvas de nivel de otra función $R(x) = x^T R x = k \in \mathbb{R}$ que serían curvas cuadráticas.

Desigualdad de Rayleigh: Sean $A \in \mathcal{M}_S \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\text{aval}(A) = \{\lambda_{MAX}, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_{min}\}$ con $\lambda_{MAX} > \dots > \lambda_k > \dots > \lambda_{min}$, entonces:

$$\text{Desigualdad} \rightarrow \lambda_{min} \|x\|^2 \leq x^T A x = f(x) \leq \lambda_{MAX} \|x\|^2 \quad (3)$$

y además se cumple la igualdad:

$$\text{Igualdad} \rightarrow \begin{cases} \lambda_{min} \|x\|^2 = x^T A x = f(x) & \iff x \in S_{\lambda_{min}} \\ \lambda_{MAX} \|x\|^2 = x^T A x = f(x) & \iff x \in S_{\lambda_{MAX}} \end{cases} \quad (4)$$

11.3.3. Restricción caso estandar $\|x\| = r \in \mathbb{R}$

Problema Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^T A x$ con $A \in \mathcal{M}_S \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Hallar los extremos con $\|x\| = r \in \mathbb{R}$.

Por la desigualdad de Rayleigh (eq 3) y debido a que la restricción del dominio para $f(x)$ es $\|x\| = r$ un número constante, entonces podemos asegurar que

$$\lambda_{min} r^2 \leq f(x) \leq \lambda_{MAX} r^2$$

y además sabemos que las igualdades se cumplen si y solo si $x \in S_{\lambda_{min}}$ o $x \in S_{\lambda_{MAX}}$. Por lo tanto, los extremos serán justamente los valores alcanzados en la igualdad y se alcanzaran en los correspondientes x .

11.3.4. Restricción $R(x) = x^T R x = k$

Problema Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = x^T A x$ con $A \in \mathcal{M}_S \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Hallar los extremos con $x \in C_k = \{x \in \mathbb{R}^n / R(x) = x^T R x = k, R \in \mathcal{M}_S, k \in \mathbb{R}\}$.

En este caso la restricción que se plantea es que $x \in$ a un conjunto de nivel de $R(x)$, que es otra forma cuadrática. Es como pedir que $x \in$ a una elipse o

hiperbola (o cosas del estilo) que tranquilamente pueden estar rotados respecto a los ejes que definen a x .

Como $R \in \mathcal{M}_S \Rightarrow \exists B \in \mathcal{M}_S$ tal que $B^2 = R = QDQ^T$ con $Q \in \mathcal{M}_O$ y $D = \text{diag} \{ \text{aval}(B^2) \}$, $\text{aval}(B) = \{b_1, \dots, b_n\}$ con $b_i > 0$.

$$B = Q \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_n \end{bmatrix} Q^T$$

$$R = B^2 = Q \begin{bmatrix} b_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_n^2 \end{bmatrix} Q^T$$

$\Rightarrow R = B^2 = BB$, como $B \in \mathcal{M}_S \Rightarrow B = B^T \Rightarrow BB = B^T B$. Entonces $R(x) = x^T R x = x^T B^T B x = z^T z$ donde $z = Bx \Rightarrow x = B^{-1}z$. Sabiendo esto podemos hacer un cambio de variables:

$$f(x) = x^T A x = (B^{-1}z)^T A (B^{-1}z) = z^T \underbrace{(B^{-1})^T A B^{-1}} z$$

Llamamos $A^* = (B^{-1})^T A B^{-1}$ y es momento de plantear un hermoso cambio de variables de x a $z \Rightarrow f(z) = z^T A^* z$. Como la restricción $R(z) = z^T z = k \Rightarrow \|z\| = \sqrt{k}$ y resulta que $\sqrt{k} \in \mathbb{R}$ es un número constante por lo que el problema se reduce al caso estandar de la sección 11.3.3:

$$\text{Problema estandar} \rightarrow \begin{cases} f(z) = & z^T A^* z \\ \|z\| = & \sqrt{k} \end{cases}$$

11.3.5. Propiedades de las formas cuadráticas

Sea $f(x) = x^T A x$ con $A \in \mathcal{M}_S$, entonces:

- $f(kx) = k^2 f(x)$, $k \in \mathbb{R}$
- Si v_1 y $v_2 \in \text{avec}(A)$ y están asociados a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ respectivamente, $\Rightarrow v_1 \perp v_2$ entonces $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda_1 \alpha^2 \|v_1\|^2 + \lambda_2 \beta^2 \|v_2\|^2$.

12. Descomposición en valores singulares (DVS)

Se aplica $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces vamos a ver primero algunas propiedades:

1. $\overline{A}^T A \in \mathcal{M}_H \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ y semidefinida positiva $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow \text{aval}(\overline{A}^T A) \subset \mathbb{R} \geq 0$ o bien:

- Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow A^T A \in \mathcal{M}_S \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ y semidefinida positiva $\Rightarrow \text{aval}(A^T A) \subset \mathbb{R} \geq 0$

2. $rg(A) = rg(A^T A)$
3. $Nul(A) = Nul(A^T A)$
4. $Fil(A) = Fil(A^T A)$
5. Gancho pero no está de mas: $Nul(A) = (Fil(A))^\perp$

12.1. Valor singular

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se dice que $\sigma \in \mathbb{R} \geq 0$ es un valor singular de $A \iff \sigma = \sqrt{\lambda}$, $\lambda \in \text{aval}(A^T A)$.

Propiedades:

1. La cantidad de valores singulares de A es $\leq n$
2. $rg(A) = r \iff A$ tiene r valores singulares $\neq 0$
3. $\|Av_i\| = \sigma_i$ donde $v_i \in BON(gen(avec(A^T A)))$ y σ_i es el valor singular asociado a v_i
4. $BON(col(A)) = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{Av_r}{\sigma_r} \right\}$ donde $v_i \in BON(gen(avec(A^T A)))$ y σ_i es el valor singular asociado a v_i
5. $sval(A) = sval(A^T)^{17}$

De la propiedad 5 se deduce que si $A \in \mathbb{R}^{2 \times 100} \Rightarrow A^T A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ y se complica encontrar los valores singulares, pero puedes buscar los valores singulares de $A^T A \in \mathbb{R}^{100 \times 2} \Rightarrow AA^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que es una gilada y sabes que son los mismos.

12.2. Teorema de DVS

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $rg(A) = r$.

Sea $U \in \mathcal{M}_O \subset \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que

$$U = \left[\underbrace{u_1 | u_2 | \dots | u_r}_{BON(col(A))} \mid \underbrace{u_{r+1} | \dots | u_m}_{\text{Basura de relleno}} \right]$$

donde $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} = BON(col(A))$ que sale de la propiedad 4 de la sección 12.1 anterior. Luego $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ completan una $BON(\mathbb{R}^m)$ con Gram Schmidt.

¹⁷ $sval(A) = \{\sigma \in \mathbb{R} / \sigma \text{ es valor singular de } A\}$

Sea $V \in \mathcal{M}_O \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$V = \left[\underbrace{|v_1|v_2| \dots |v_r|}_{BON(fil(A))} \mid \underbrace{|v_{r+1}| \dots |v_n|}_{BON(nul(A))} \right]$$

donde $v_i \in BASE(avec(A^T A))$.

Sea $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

donde $D = diag\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ siendo $\sigma_i \in sval(A)$ y el resto de las filas y columnas de Σ se rellenan con 0.

Entonces se cumple que

$$A = U\Sigma V^T$$

y se dice que lo que se halló es una DVS de A . Σ es única para cada A , pero U y V no.

Cómo hallar una DVS:

1. Calcular los autovalores y autovectores de $A^T A$.
2. Armar la matriz Σ con los valores singulares $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
3. Armar la matriz V cuyas columnas tienen una $BON(\mathbb{R}^n)$ formada primero con los autovectores de $A^T A$ en el orden decreciente de autovalores y luego lo completás con cualquier cosa (que termina siendo $nul(A)$).
4. Las columnas de U salen de $BON(col(A)) = \left\{ \frac{Av_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{Av_r}{\sigma_r} \right\}$.

12.3. DVS reducida

Si te fijás, al hacer la cuenta $U\Sigma V^T$ como Σ tiene muchos ceros, hay muchas cosas que se pierden en la cuenta y “están de mas”. Simplificamos la notación para que no sea tanto bardo:

$$U = \left[\underbrace{|u_1|u_2| \dots |u_r|}_{BON(col(A))} \mid \underbrace{|u_{r+1}| \dots |u_m|}_{Basura\ de\ relleno} \right] = [U_r | U_{m-r}]$$

$$V = \left[\underbrace{v_1|v_2|\dots|v_r}_{BON(fil(A))} \quad \underbrace{v_{r+1}|\dots|v_n}_{BON(nul(A))} \right] = [V_r|V_{n-r}] \Rightarrow V^T = \left[\begin{array}{c} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{array} \right]$$

Entonces

$$A = U\Sigma V^T = [U_r|U_{m-r}] \cdot \left[\begin{array}{ccc} D^{r \times r} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{array} \right] = U_r \cdot D^{r \times r} \cdot V_r^T = U_r \cdot D \cdot V_r^T$$

ya que tanto U_{m-r} como V_{n-r}^T se anulan al multiplicarse por Σ . Entonces podemos tener casi la misma información con una DVS reducida.

12.4. Pseudoinversa de Moore Penrose

Sea $A = U_r \cdot D \cdot V_r^T \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow$ se define la pseudoinversa de Moore Penrose como $A^+ = V_r \cdot D^{-1} \cdot U_r^T$ a partir de la DVS reducida o

$$A^+ = V \cdot \Sigma^\dagger U^T$$

a partir de la DVS.

$$\Sigma^\dagger = \Sigma^T \text{ con } diag = \{\sigma_i^{-1}\}$$

Propiedades

1. $AA^+ = P_{col(A)}$ Matriz de proyección sobre $col(A)$
2. $A^+A = P_{fil(A)}$ Matriz de proyección sobre $fil(A)$
3. $AA^+A = A$
4. Si A es inversible $\Rightarrow A^+ = A^{-1}$

12.5. Cuadrados mínimos y DVS

Queremos resolver $Ax = b$ por cuadrados mínimos $\Rightarrow A\hat{x} = proy_{col(A)}^b = P_{col(A)}b = AA^+b$ entonces obtenemos el sistema

$$A\hat{x} = AA^+b$$

Una solución evidente es $x^+ = A^+b$ y es una solución particular. Luego, todas las soluciones serán $\hat{x} = x^+ + x_N$, donde $x_N \in nul(A)$. Pero algo mágico es que $x^+ \in fil(A) = nul(A)^\perp$ por lo tanto $\|\hat{x}\| = \|x^+ + x_N\|$ y como $x^+ \perp x_N \Rightarrow$ pitagoras $\Rightarrow \|\hat{x}\|^2 = \|x^+\|^2 + \|x_N\|^2 \Rightarrow \|\hat{x}\| \geq \|x^+\| \forall x$, es decir: x^+ es la solución de menor norma o “la mas precisa”.

12.6. Transformaciones lineales y DVS

Suponte que tienes una tl tal que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} x$ y te piden que halles dos bases tales que $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$... Ya te estarás imaginando por dónde viene la mano, no?

$$[T]_{EE'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underbrace{U}_{C_{B'E'}} \underbrace{\Sigma}_{[T]_{BB'}} \underbrace{V^T}_{C_{EB}}$$

entonces se trata simplemente de hallar una DVS de $[T]_{EE'}$.

13. EDOs lineales

Nos vamos a avocar exclusivamente a los siguientes dos casos:

- $y' + ay = f(x) \rightarrow$ EDO lineal de primer orden con coeficientes constantes
- $y'' + ay' + by = f(x) \rightarrow$ EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes

Derivar es una transformación lineal tal que $T : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ donde $T(f(x)) = f'(x) \Rightarrow$ lo analizamos como una transformación lineal. Recordemos una propiedad antes de seguir:

- Sea una transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y sean $v, v_n \in \mathbb{V}/T(v) = w \in \mathbb{W}, T(v_n) = 0_{\mathbb{W}}$ entonces $T^{-1}(w) = v + v_n$ porque $T(v + v_n) = T(v) + T(v_n) = w + 0_{\mathbb{W}} = w$.

Ahora no se bien cómo es que se llega a lo siguiente, pero las soluciones de nuestras ecuaciones tendrán la pinta de

$$\underbrace{y_g}_{\text{general}} = \underbrace{y_h}_{\in \text{nul}(T)} + \underbrace{y_p}_{\text{particular}}$$

donde y_g es la solución general de nuestra ecuación y es lo que estamos buscando.

13.1. de primer orden

Sea la ecuación diferencial

$$y' + ay = f(x) \tag{5}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1. Buscamos las **soluciones del homogéneo** y_h :

$$y_h' + ay_h = 0 \iff y_h' = -ay_h$$

y llegamos a

$$\frac{dy_h}{y_h} = -a dx$$

lo que se resuelve fácilmente integrando a ambos lados de la igualdad. En realidad para nuestras insignificantes y sencillas ecuaciones para chicos siempre resulta que

$$y_h = ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}$$

2. Luego buscamos la **solución particular** y_p . Aca tenemos dos metodos

- **Variación de los parametros:** sirve $\forall$ los casos, pero es “el mas difícil”. Proponemos “algo” $u(x)$ tal que $y_p = uy_{ho} = ue^{-ax}$ donde y_{ho} es una solución del homogéneo. Entonces obtenemos:

$$\begin{cases} y_p = ue^{-ax} \\ y_p' = u'e^{-ax} + u(-a)e^{-ax} \end{cases}$$

Si tomas estas dos cosas y las metés en la ecuación 5 original obtienes

$$u'e^{-ax} - \underbrace{aue^{-ax}} + \underbrace{aue^{-ax}} = u'e^{-ax} = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \int f(x)e^{ax} dx$$

Por lo tanto, a modo de receta magica de la ecuación 5 por el método de variación de parámetros tenemos:

$$y_g = \underbrace{ke^{-ax}}_{y_h} + \underbrace{\int f(x)e^{ax} dx e^{-ax}}_{y_p}$$

- **Coefficientes indeterminados:** Es el mas fácil pero no siempre te salva las papas del fuego. Sirve para cuando en la ecuación 5 tenes uno de los siguientes casos:

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx}P(x) & k \in \mathbb{R}, P \text{ un polinomio} \\ \sin(kx)e^{\alpha x} & k, \alpha \in \mathbb{R} \\ \cos(kx)e^{\alpha x} & k, \alpha \in \mathbb{R} \\ g(x) & g(x) \text{ combinación lineal de lo anterior} \end{cases}$$

NO SÉ COMO SIGUE ESTO!!!! Pero creo que no es necesario saberlo ya que con el otro método salen todas.

13.2. de segundo orden

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (6)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Busco las **soluciones del homogéneo** (siempre resulta un subespacio de dimensión dos):

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (7)$$

proponemos misteriosamente¹⁸ la siguiente solución

$$\begin{cases} y_h = e^{\lambda x} \\ y'_h = \lambda e^{\lambda x} \\ y''_h = \lambda^2 e^{\lambda x} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

y la reemplazamos en la ecuación 7, obteniendo:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \iff$$

$$\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0, \lambda \in \mathbb{C}$$

Esto puede tener tres casos

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_i \in \mathbb{R} & (1) \\ \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_i \in \mathbb{R} & (2) \\ \lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \lambda_i \in \mathbb{C} & (3) \end{cases}$$

- (1) $y_h \in \text{gen} \{y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}\}$
- (2) $y_h \in \text{gen} \{y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}\}$
- (3) $\lambda_1 = \beta + i\alpha \Rightarrow \lambda = \beta - i\alpha$ entonces $y_h \in \text{gen} \{y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}\} = \overbrace{\text{gen} \{y_1 = e^{\beta x} \sin(\alpha x), y_2 = e^{\beta x} \cos(\alpha x)\}}^{\text{por la identidad de Euler } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \neq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}}$ entonces

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\beta + i\alpha)x} = e^{\beta x} e^{i\alpha x} = e^{\beta x} (\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)) = y_1 \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\beta - i\alpha)x} = e^{\beta x} e^{-i\alpha x} = e^{\beta x} (\cos(-\alpha x) + i \sin(-\alpha x)) = y_2 \end{cases}$$

entonces, todo $y_h \in$ soluciones del homogéneo se podrá escribir como combinación lineal con $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} y_h &= ay_1 + by_2 = ae^{\beta x} (\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)) + be^{\beta x} (\cos(-\alpha x) + i \sin(-\alpha x)) = \\ &= e^{\beta x} \left(a \cos(\alpha x) + ia \sin(\alpha x) + \underbrace{b \cos(-\alpha x)} + \underbrace{ib \sin(-\alpha x)} \right) = \end{aligned}$$

¹⁸Digo misteriosamente porque no se de dónde sale, pero funciona...

$$\begin{aligned}
&= e^{\beta x} \left(a \cos(\alpha x) + ia \sin(\alpha x) + \overbrace{b \cos(\alpha x)} + \overbrace{ib - \sin(\alpha x)} \right) = \\
&= e^{\beta x} ((a+b) \cos(\alpha x) + i(a-b) \sin(\alpha x)) = \\
&= \underbrace{(a+b)}_{c_1} e^{\beta x} \cos(\alpha x) + \underbrace{i(a-b)}_{c_2} e^{\beta x} \sin(\alpha x) = \\
&= c_1 e^{\beta x} \cos(\alpha x) + c_2 e^{\beta x} \sin(\alpha x) = y_h \Rightarrow \\
&\Rightarrow y_h \in \text{gen} \{ e^{\beta x} \cos(\alpha x), e^{\beta x} \sin(\alpha x) \} \text{ } \mathbb{C}\text{-espacio vectorial}
\end{aligned}$$

2. Busco las **soluciones particulares** y hay dos métodos:

- **Variación de parámetros:** Conociendo la solución del homogeneo proponemos una solución particular de la forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

donde y_1, y_2 son soluciones del homogeneo y u_1, u_2 son funciones a determinar. Si derivamos obtenemos:

$$y'_p = u'_1 y_1 + u_1 y'_1 + u'_2 y_2 + u_2 y'_2$$

y por algún motivo imponemos la condición de que $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$ por lo que nos queda

$$y'_p = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

y si volvemos a derivar obtenemos

$$y''_p = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2$$

Si ahora reemplazamos todas estas cosas en la ecuación original $y'' + ay' + by = f(x) \rightarrow$

$$u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2 + a(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + b(u_1 y_1 + u_2 y_2) = f(x)$$

agrupando convenientemente y casi por acto divino:

$$u_1 \underbrace{(y''_1 + ay'_1 + by_1)}_{y_1 \in y_h \Rightarrow 0} + u_2 \underbrace{(y''_2 + ay'_2 + by_2)}_{y_2 \in y_h \Rightarrow 0} + \underbrace{u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2}_{\text{sobrevive}} = f(x)$$

Lo único que sobrevive es lo indicado mas arriba, que expresado matricialmente junto con la condición $u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0$ que habíamos impuesto antes es:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

de donde por algún motivo desconocido para mí:

$$\begin{cases} u'_1 = \frac{y_2 f}{W(y_1, y_2)} \\ u'_2 = \frac{y_1 f}{W(y_1, y_2)} \end{cases}$$

donde $W(y_1, y_2)$ es el wronskiano (ver sección 5 Wronskiano). Luego u_1 y u_2 se obtienen integrando éstas expresiones.

■ **Coefficientes indeterminados** Sirve solo a veces y no se cómo es...

14. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Veremos sistemas de la pinta

$$X' = AX$$

donde $X(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $A \in \mathcal{M}_{\text{diagonalizables}}$. Como A es diagonalizable $\Rightarrow A = QDQ^{-1}$ donde Q esta formada por autovectores de A . Entonces el sistema se puede escribir

$$\begin{aligned} X' &= QDQ^{-1}X \Rightarrow \\ X' &= QDQ^{-1} \Rightarrow \underbrace{Q^{-1}X'}_{Y'} = D \underbrace{Q^{-1}X}_Y \end{aligned}$$

y llevarlo a un sistema diagonalizado mediante un cambio de variables:

$$Y' = DY$$

que se puede escribir de la siguiente manera y resolver fácilmente:

$$\begin{cases} y'_1 = \lambda_1 y_1 & \rightarrow y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \vdots \\ y'_n = \lambda_n y_n & \rightarrow y_n = c_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

Finalmente se busca X :

$$Y = Q^{-1}X \Rightarrow X = QY$$

Siempre termina quedando que la solución es

$$X = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

donde v_i esta asociado a λ_i .