EXAMEN INTEGRADOR.19 de febrero de 2014

Un esquema de resolución

TEMA 2

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 1 & a+2 \\ a^2-5 & 0 & a^2-3 \end{pmatrix}$.

(**a**) Halle todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales T resulta diagonalizable.

Sea $A = [T]_B$. Los autovalores de A son $2, 1$ y $a^2 - 3$. Si estos 3 números son diferentes, T es diagonalizable. Cuando $a = 2$ o $a = -2$, 1 es autovalor doble de T y $rg(A - I) = 1$ solo si $a = -2$. Cuando $a = \sqrt{5}$ o $a = -\sqrt{5}$, 2 es autovalor doble de T y $rg(A - 2I) = 1$ en ambos casos.

Luego T es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R} \ - \{2\}$.

(**b**) Para $a = -2$ encuentre todos los $w \in V$ para los que existe $lim_{n\longrightarrow\infty} T^n(w)$.

En este caso, sean $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, autovalores de T. Cualquier $w \in V$ puede escribirse de la forma $w = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$ para adecuados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ siendo w_i autovector asociado a λ_i. Como $T^n(w) = \alpha\lambda_1^n w_1 + \beta\lambda_2^n w_2 + \gamma\lambda_3^n w_3 = \alpha 2^n w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$, para que exista $lim_{n\longrightarrow\infty} T^n(w)$, debe ser $\alpha = 0$. Además, resulta $w_2 = v_2, w_3 = v_3$.

2.

(**a**) Halle una $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica y definda positiva que cumpla: $A^2 + 3A + 2I = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Se considera una factorización de $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = MDM^T$ con $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, por ejemplo.

Un autovalor, sea λ_1, de A debe verificar $\lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 3 = 12$, y el otro, sea λ_2, debe verificar $\lambda_2^2 + 3\lambda_2 + 3 = 6$. Es decir, $\lambda_1 = 2$ o $\lambda_1 = -5$, y $\lambda_2 = 1$ o $\lambda_2 = -4$.

Basta definir $A = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^T$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

(**b**) Sea $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $(x, y) = x^T G y$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ y sea $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Pruebe que los autovalores de G coinciden con los valores singulares de $A = GR$.

Se considera una factorización de $G = MDM^T$ con $M^T = M^{-1}$. Si particularmente se ordenan de mayor a menor los autovalores de G en la diagonal de D, todos mayores que 0 pues G es definida positiva, se obtiene una DVS de A, $A = U\Sigma V^T$ donde $U = M$, $\Sigma = D$, $V^T = M^T R$.

3.

(**a**) Sean $f \in C(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $u_1(t) = (1 + t)e^t + t^2 + 8$ y $u_2(t) = e^t + t^2 + 8$ son soluciones de la ecuación $y'' + ay' + by = f(t)$ encuentre todas las soluciones de $y'' + ay' + by = e^t$.

$u_1(t)$-$u_2(t) = te^t$ resuelve la ecuación $y'' + ay' + by = 0$. Luego 1 es raiz doble de $p(t) = t^2 + at + b$. Por lo tanto $a = -2$, $b = 1$. La solución general de $y'' + ay' + by = e^t$ es $y(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{2}t^2 e^t$.

(**b**) Sean $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A = C(B^{12} - B)C^{-1}$. Encuentre todas las soluciones del sistema $X' = AX$.

Se considera una factorización de $B = MDM^{-1}$ donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por ejemplo. La solución del sistema es $X(t) = c_1 e^{(3^{12}-3)t} v_1 + c_2 v_2$ donde v_1, v_2 son sutovectores de A,

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta > 0$

Halle todos los valores de α, β para los que $4 \leq \|Ax\| \leq 12$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|x\| = 2$.

Supongamos $\alpha \geq \beta$ (el caso $\beta \geq \alpha$ se resulve de manera análoga).
A partir de la factoriazación de A , sus valores singulares son 15α y 15β. Luego si $min\|Ax\| = 4$ y $max\|Ax\| = 16$ para x tales que $\|x\| = 2$, debe ser $\alpha = \frac{16}{30}$ y $\beta = \frac{4}{30}$.

5. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(**a**) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es inversible entonces $A^+ = A^{-1}$.

Basta ver que $AA^+ = A^+A = I$. A partir de la definición de A^+, si se considera una DVS reducida de A, sabemos que $AA^+ = P_{col(A)}$ y que $A^+A = P_{col(A^T)}$. Como $rg(A) = n$, $col(A) = col(A^T) = \mathbb{R}^n$ y entonces resultan $P_{col(A)} = P_{col(A^T)} = I$.

(**b**) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ entonces $(A^+)^T = (A^T)^+$.

Se considera una DVS reducida de $A = U_r D V_r^T$ donde $r = rg(A)$, U_r y V_r tienen columnas ortonormales y son matrices $n \times r$ y $m \times r$ respectivamente , D es diagonal, $r \times r$, inversible, con números mayores que 0 en su diagonal, ordenados de mayor a menor. A partir de ella se define $A^+ = V_r D^{-1} U_r^T$. Luego $(A^+)^T = U_r D^{-1} V_r^T$.

Pot otra parte, $A^T = V_r D U_r^T$. Por la def. de pseudo-inversa de Moore-Penrose, resulta $(A^T)^+ = U_r D^{-1} V_r^T$.

EXAMEN INTEGRADOR.19 de febrero de 2014

Un esquema de resolución

TEMA 1

1. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & a^2-5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a+2 & a^2-3 \end{pmatrix}$.

(**a**) Halle todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales T resulta diagonalizable.

Sea $A = [T]_B$. Los autovalores de A son $2, 1$ y $a^2 - 3$. Si estos 3 números son diferentes, T es diagonalizable. Cuando $a = 2$ o $a = -2$, 1 es autovalor doble de T y $rg(A - I) = 1$ solo si $a = -2$. Cuando $a = \sqrt{5}$ o $a = -\sqrt{5}$, 2 es autovalor doble de T y $rg(A - 2I) = 1$ en ambos casos.
Luego T es diagonalizable para todo $a \in \mathbb{R} \ - \{2\}$.

(**b**) Para los valores de a hallados encuentre todos los $w \in V$ para los que existe $lim_{n \longrightarrow \infty} T^n(w)$.

En este caso, sean $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, autovalores de T. Cualquier $w \in V$ puede escribirse de la forma $w = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$ para adecuados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ siendo w_i autovector asociado a λ_i.
Como $T^n(w) = \alpha\lambda_1^n w_1 + \beta\lambda_2^n w_2 + \gamma\lambda_3^n w_3 = \alpha 2^n w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$, para que exista $lim_{n \longrightarrow \infty} T^n(w)$, debe ser $\alpha = 0$. Además, resulta $w_2 = v_2, w_3 = v_1 + v_3$.

2.

(**a**) Halle una $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica e indefinida que cumpla: $A^2 + 3A + 2I = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Se considera una factorización de $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = MDM^T$ con $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, por ejemplo.
Un autovalor, sea λ_1, de A debe verificar $\lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 3 = 12$, y el otro, sea λ_2, debe verificar $\lambda_2^2 + 3\lambda_2 + 3 = 6$. Es decir, $\lambda_1 = 2$ o $\lambda_1 = -5$, y $\lambda_2 = 1$ o $\lambda_2 = -4$.
Basta definir $A = M\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}M^T$ con $\lambda_1.\lambda_2 < 0$.

(**b**) Sea $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $(x, y) = x^T G y$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$ y sea $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal. Pruebe que los autovalores de G coinciden con los valores singulares de $A = GR$.

3.

(**a**) Sean $f \in C(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $w_1(t) = (1 + t)e^t + t^3 - 4$ y $w_2(t) = e^t + t^3 - 4$ son soluciones de la ecuación $y'' + ay' + by = f(t)$, encuentre todas las soluciones de $y'' + ay' + by = e^t$.

$w_1(t)$-$w_2(t) = te^t$ resuelve la ecuación $y'' + ay' + by = 0$. Luego 1 es raiz doble de $p(t) = t^2 + at + b$. Por lo tanto $a = -2$, $b = 1$. La solución general de $y'' + ay' + by = e^t$ es $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$.

(**b**) Sean $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = C(B^{10} - B)C^{-1}$. Encuentre todas las soluciones del sistema $X' = AX$.

Se considera una factorización de $B = MDM^{-1}$ donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por ejemplo. La solución del sistema es $X(t) = c_1e^{(3^{10}-3)t}v_1 + c_2v_2$ donde v_1, v_2 son sutovectores de A, respectivamente primera y segunda columna de CM.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha, \gamma > 0$.

Halle todos los valores de α, γ para los que $4 \leq \|Ax\| \leq 12$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|x\| = 3$.

Supongamos $\alpha \geq \gamma$ (el caso $\gamma \geq \alpha$ se resulve de manera análoga).
A partir de la factoriazación de A , sus valores singulares son 15α y 15γ. Luego si $min\|Ax\| = 4$ y $max\|Ax\| = 12$ para x tales que $\|x\| = 3$, debe ser $\alpha = \frac{12}{45}$ y $\gamma = \frac{4}{45}$.

5. Demuestre las siguientes afirmaciones:

(**a**) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible entonces $A^+ = A^{-1}$.

(**b**) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ entonces $(A^+)^T = (A^T)^+$.