

RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. Sea V el subespacio del espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{R})$, $V = \text{gen}\{\text{sen}x, \text{cos}x\}$ y sea el endomorfismo $T: V \rightarrow V$ tal que

$$T(\text{sen}x) = 2\text{sen}x + \text{cos}x; \quad T(\text{cos}x) = 3\text{cos}x$$

- a) Muestre que T es un isomorfismo y halle la transformación inversa.
b) Si es posible, diagonalice la transformación lineal.

a) Si es $B = \{\text{sen}x; \text{cos}x\}$ base de V , $T_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ es matriz inversible por lo tanto T es un isomorfismo. $T_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$T^{-1}(\text{sen}x) = \frac{1}{2}\text{sen}x - \frac{1}{6}\text{cos}x; \quad T^{-1}(\text{cos}x) = \frac{1}{3}\text{cos}x$$

- b) Una diagonalización de T_B es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Por lo tanto para la base $B' = \{v_1, v_2\} = \{\text{sen}x - \text{cos}x; \text{cos}x\}$ es $T(v_1) = 2v_1$; $T(v_2) = 3v_2$.

2. Decidir si cada uno de los ítems es verdadero o falso, demostrando o suministrando un contraejemplo según el caso.

- a) Sean $A \in C^{n \times n}$, $B \in C^{n \times m}$, con A hermítica, entonces los autovalores de $B^H A B$ son reales.
b) Si $A \in R^{n \times n}$ es antisimétrica sus autovalores son imaginarios puros.

- a) Verdadero. Es fácil mostrar que $B^H A B$ es hermítica, por lo tanto sus autovalores son reales.
b) Verdadero, es fácil mostrar que $iA \in C^{n \times n}$ es hermítica (por lo tanto sus autovalores son reales y admite una diagonalización unitaria), y por lo tanto, A admite una diagonalización unitaria y los elementos de la matriz diagonal son imaginarios puros.

3. Considere el problema a valores iniciales $x' = Ax, x(0) = x_0$ con $x \in R^n$ y A una matriz de proyección. Demuestre que toda solución del problema verifica a) o b) siendo a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \|x_0\|$, b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = +\infty$. Determine todos los valores de la condición inicial x_0 para los que se cumple a) y aquéllos para los que se cumple b).

Como A es de proyección, es diagonalizable con autovalores 0 y 1. Sea $\text{rango}(A) = r$ y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal ordenada de autovectores de A tal que los primeros r corresponden al autovalor 1, Entonces si $[x_0]_B = [c_1, \dots, c_n]^T$

tendremos que

$$x(t) = (c_1 v_1 + \cdots + c_r v_r) e^t + c_{r+1} + \cdots + c_n v_n$$

Condición a) $\text{nul}(A^T)$; condición b) $\text{col}(A)$.

4. Halle los valores extremos de la forma cuadrática Q con la restricción $\|x\| = \frac{1}{4}$, siendo $Q: R^2 \rightarrow R: Q(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 + \sqrt{3}x_1x_2$. Especifique la localización de dichos extremos en el sistema de coordenadas x_1, x_2
-

La matriz simétrica asociada es $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Una diagonalización ortogonal de dicha matriz es $A = P \cdot D \cdot P^T$

siendo $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2]$.

Por lo tanto $\max_{\|x\|=\frac{1}{4}} Q = \frac{3}{16}$ y ocurre en $x = P \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$.

$\min_{\|x\|=\frac{1}{4}} Q = \frac{1}{16}$ y ocurre en $x = P \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.

5. Sea la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$ dada por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y sea $S = \{T(x), x \in R^3 : \|x\| = 1\}$. Siendo $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ una DVS de A con $U = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$ muestre a partir de ella que S es la porción del plano generado por $\{u_1, u_2\}$ encerrada por una elipse. Determine los semidiámetros y los ejes principales de la elipse.

La DVS de A viene dada por

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3];$$

Entonces si $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ con $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$. $T(x) = 3c_1 u_1 + c_2 u_2$, con lo cual S es la superficie encerrada por la elipse de semidiámetros 3 y 1 y ejes principales u_1 y u_2 respectivamente.
