FACULTAD DE INGENIERIA-UBA
ÁLGEBRA II. Primer cuatrimestre de 2014
EXAMEN INTEGRADOR - 16 de julio de 2014 (Tercera fecha)

TEMA 1

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Sea $L : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ definida por $L(f) = f'' - f' - 2f$. Hallar todas las funciones $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

i) $L(h) = g$ donde $g(t) = -3e^{-t}$

ii) $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$.

Las funciones $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ que verifican las condiciones dadas son las de la forma
$h(t) = c\,e^{-t} + t\,e^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$

Ejercicio 2:

Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, demostrando o dando un contraejemplo según el caso.

a) Si $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ es simétrica entonces A es diagonalizable.

b) Si $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ tiene columnas ortonormales entonces $A + A^{-1}$ es diagonalizable y sus autovalores son reales.

a) Falsa. Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2x2}$ es simétrica y no es diagonalizable.

b) Verdadera. Basta probar que $A + A^{-1}$ es hermítica, ya que las matrices hermíticas son diagonalizables; más aún, son unitariamente diagonalizables, y sus autovalores son reales.

Ejercicio 3:

a) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\,x\,2}$ simétrica tal que la forma cuadrática $Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $Q(x) = x^T A\,x$ verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

i) $Mín\,\{ Q(x) : \|x\| = 2 \} = -16$

ii) $Q([-1 \quad 2]^T) = -20$

iii) $det(A) = -4$.

b) Graficar el conjunto de nivel 0 de Q respecto del sistema de coordenadas canónico.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) El conjunto de nivel 0 de Q es el par de rectas de ecuaciones $x_2 = 0$ y $x_2 = \frac{4}{3}x_1$, respecto del sistema de coordenadas canónico.

Ejercicio 4:

Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales todas las soluciones del sistema $X'(t) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} X(t)$ verifican $\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$.

La condición pedida se verifica sii $\alpha < -2$

Ejercicio 5:

Dada la transformación líneal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T([1 \quad 0]^T) = [2 \quad 2 \quad 2]^T$ y $T([1 \quad 1]^T) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ y dado $b = [-1 \quad -1 \quad 5]^T$, hallar todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que hacen mínima la distancia entre $T(x)$ y b, determinando entre ellos, el de norma mínima. (Considere los productos internos canónicos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

Los $x \in \mathbb{R}^2$ que hacen mínima la distancia entre $T(x)$ y b son los de la forma

$x = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}^T + \alpha \ [1 \quad 2]^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}^T$ el de norma mínima.