Examen integrador 12-02-2014. Esquema de resolución.

Ejercicio 1

T1. (a) En el espacio vectorial $\mathbb{V} = C^{\infty}(\mathbb{R})$ se definen los operadores T(u) = $u''-2u'$, H(u) = u'. Determinar el conjunto de todas las funciones u del núcleo de T que sean autovectores del operador H y que cumplan $u(0) = 3$. **(b)** Probar que es suficiente que la constante real a cumpla $|a| > 2$ para que el sistema $\begin{cases} f'(t) = 2f(t) - a\,g(t) \\ g'(t) = a\,f(t) - 2g(t) \end{cases}$ tenga soluciones acotadas con cualquier condición inicial.

T2. (a) En el espacio vectorial $\mathbb{V} = C^{\infty}(\mathbb{R})$ se definen los operadores T(u) = $u''-3u'$, H(u) = u'. Determinar el conjunto de todas las funciones u del núcleo de T que sean autovectores del operador H y que cumplan $u(0) = 2$. **(b)** Probar que es suficiente que la constante real a cumpla $|a| > 3$ para que el sistema $\begin{cases} f'(t) = 3f(t) - a\,g(t) \\ g'(t) = a\,f(t) - 3g(t) \end{cases}$ tenga soluciones acotadas con cualquier condición inicial.

Sugerencia de resolución T1. (1a). Los autovectores de H son funciones constantes (no nulas) o exponenciales. Además el núcleo de T es Nu(T) = gen$\{1, e^{2t}\}$, de donde las funciones que verifican lo pedido son solo dos: $u_1(t) = 3$, $u_2(t) = 3\,e^{2t}$. (1b) Las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema, $p(\lambda) = \lambda^2 + (a^2 - 4)$ son imaginarias puras sii $|a| > 2$, y en tal caso la solución resulta ser una combinación lineal de funciones acotadas, de modo que la condición es suficiente.

Sugerencia de resolución T2. (1a). Los autovectores de H son funciones constantes (no nulas) o exponenciales. Además el núcleo de T es Nu(T) = gen$\{1, e^{3t}\}$, de donde las funciones que verifican lo pedido son solo dos: $u_1(t) = 2$, $u_2(t) = 2\,e^{3t}$. (1b) Las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema, $p(\lambda) = \lambda^2 + (a^2 - 9)$ son imaginarias puras sii $|a| > 3$, y en tal caso la solución resulta ser una combinación lineal de funciones acotadas, de modo que la condición es suficiente.

Ejercicio 2

T1. En un espacio euclídeo $\mathbb{V}$, sean B = $\{v_1, v_2\}$ y B' = $\{v_3, v_4, v_5\}$ sendas bases del subespacio S y su complemento ortogonal $S^{\perp}$, y sea P el operador que proyección sobre S, H el operador reflexión sobre S. Determinar todos los valores reales de a tales que el operador $P + a\,H$ es regular y para esos valores determinar los autovalores y autovectores de $(P + a\,H)^{-1}$. ¿Para qué valores de a es diagonalizable el operador $P + a\,H$?

T2. En un espacio euclídeo $\mathbb{V}$, sean B = $\{v_1, v_2, v_3\}$ y B' = $\{v_4, v_5\}$ sendas bases del subespacio S y su complemento ortogonal $S^{\perp}$, y sea P el operador que proyección sobre S, H el operador reflexión sobre S. Determinar todos los valores reales de a tales que el operador $P + a\,H$ es regular y para esos valores determinar los autovalores y autovectores de $(P + a\,H)^{-1}$. ¿Para qué valores de a es diagonalizable el operador $P + a\,H$?

Sugerencia de resolución T1. Como $H = 2P - I$, se tiene que $M = P + a\,H = (1+2a)\,P - aI$, un polinomio matricial de P. Luego el espectro de H es $\sigma(M) = \{1 + a$ (doble), $-a$ (triple)$\}$, con autoespacios asociados gen B, gen B', siendo M diagonalizable para todo valor de a. Ahora, M es regular sii $a \neq 0$, $a \neq -1$. Los autovalores de $M^{-1} = (P + a\,H)^{-1}$ son entonces $(1+a)^{-1}$, $(-a)^{-1}$, con los mismos autoespacios asociados.

Sugerencia de resolución T2. Como $H = 2P - I$, se tiene que $M = P + a\,H = (1+2a)\,P - aI$, un polinomio matricial de P. Luego el espectro de H es $\sigma(M) = \{1 + a$ (triple), $-a$ (doble)$\}$, con autoespacios asociados gen B, gen B', siendo M diagonalizable para todo valor de a. Ahora, M es regular sii $a \neq 0$, $a \neq -1$. Los autovalores de $M^{-1} = (P + a\,H)^{-1}$ son entonces $(1+a)^{-1}$, $(-a)^{-1}$, con los mismos autoespacios asociados.

Ejercicio 3

T1. En el espacio $\mathbb{R}^{2x2}$ con el producto interno canónico, sea A la proyección de B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio S = {X∈$\mathbb{R}^{2x2}$: *traza*(X) = 0}. Determinar los puntos del conjunto H = {x∈$\mathbb{R}^2$: ‖Ax‖ = 2} que se encuentran más próximos al vector nulo, calcular esa distancia y graficar H y los puntos obtenidos.

T2. En el espacio $\mathbb{R}^{2x2}$ con el producto interno canónico, sea A la proyección de B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio S = {X∈$\mathbb{R}^{2x2}$: *traza*(X) = 0}. Determinar los puntos del conjunto H = {x∈$\mathbb{R}^2$: ‖Ax‖ = 2} que se encuentran más próximos al vector nulo, calcular esa distancia y graficar H y los puntos obtenidos.

Sugerencia de resolución T1. La descomposición inmediata $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ prueba que A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces el conjunto H tiene por ecuación $(x_1 + x_2)^2 = 2$, esto es el par de rectas paralelas de ecuación $|x_1 + x_2| = \sqrt{2}$, siendo los puntos más próximos pedidos $P_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\ 1)^T$, que se encuentran a distancia 1 del origen de coordenadas.

Sugerencia de resolución T2. La descomposición (única) inmediata $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ prueba que A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces el conjunto H tiene por ecuación $(x_1 - x_2)^2 = 2$, esto es el par de rectas paralelas de ecuación $|x_1 - x_2| = \sqrt{2}$, siendo los puntos más próximos pedidos $P_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\ 1)^T$, que se encuentran a distancia 1 del origen de coordenadas.

Ejercicio 4

T1. a) Hallar $A \in R^{2x3}$ que verifique las siguientes condiciones:

$$A^t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad A^t A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Para la A obtenida, encontrar: i) la solución por cuadrados mínimos de norma mínima del sistema Ax = [0 1]^t , ii) todas las soluciones por cuadrados mínimos de dicho sistema.

T2. **(a)** Hallar $A \in R^{2x3}$ que verifique las siguientes condiciones:

$$A^t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad A^t A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Para la A obtenida, encontrar: (i) la solución por cuadrados mínimos de norma mínima del sistema Ax = [0 1]^t , (ii) todas las soluciones por cuadrados mínimos de dicho sistema.

Sugerencia de resolución T1.

a) Col(A) = gen { [1 -1]^t } , Fil(A) = gen { [1 1 -1]^t } , $\sqrt{6}$ único VS no nulo de A

Haciendo una DVSR de A, se obtiene: $A = \pm \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) i) $\tilde{x} = A^+ b = \pm\left[-\frac{1}{6}\ -\frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right]^t$ (el signo acorde a la A propuesta)

ii) $\hat{x} = \tilde{x} + Nul(A) = \tilde{x} + \alpha\,[\,1\ -1\ 0\,]^t + \beta\,[1\ 1\ 2\,]^t$

Sugerencia de resolución T2.

a) Col(A) = gen { [1 -1]^t } , Fil(A) = gen { [1 2 -1]^t } , $\sqrt{12}$ único VS no nulo de A

Haciendo una DVSR de A, se obtiene: $A = \pm \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) i) $\tilde{x} = A^{+}b = \pm\,[\,-\frac{1}{12}\;\; -\frac{1}{6}\;\; \frac{1}{12}\,]^{t}$ (el signo acorde a la A propuesta)
ii) $\hat{x} = \tilde{x} + Nul(A) = \tilde{x} + \alpha\,[\,2\;\, -1\;\, 0\,]^{t} + \beta\,[0\;\,1\;\,2\,]^{t}$

EJERCICIO 5: Sea $M \in R^{nxn}$ tal que $M + M^{t} = O$
(a) Demostrar que M es unitariamente diagonalizable.
(b) Analizar la validez de la siguiente proposición: la transformación lineal $T: R^{n} \longrightarrow R^{n}$, $T(x) = Mx$ es diagonalizable.

Sugerencia de resolución.
a) M antisimétrica $\Longrightarrow$ iM hermítica

b) Falso. Contraejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$