EXAMEN INTEGRADOR.8 de julio de 2014

Un esquema de resolución

1. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Sea $f \in L(V)$ tal que $[f]_B = \begin{bmatrix} k^2+1 & -k^2 & k-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$. Determine para qué valores de k existe una base B' de V con respecto a la cual $[f]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y exhiba dicha base.

Solo cuando $k = -1$ el autovalor 2 es doble y su multiplicidad geométrica es 1. Sabemos que $[f]_B[id]_{B'B} = [id]_{B'B}[f]_{B'}$.

Sea $A = [f]_B$, $M = [id]_{B'B}$, esto es, la matriz de cambio de base de B' a B, y $F = [f]_{B'}$.

Llamando M_i la i-ésima columna de M, como $AM = MF$, es claro que $AM_1 = M_1$ y $AM_2 = 2M_2$, es decir que las 2 primeras columnas de M deben ser autovectores de A asociados a 1 y 2 respectivamente.

Para determinar M_3, planteamos $AM_3 = M_2 + 2M_3$.

Si, por ejemplo, $M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, una posible solución es $M_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.

Luego, una posible M es $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ y de ahí $B' = \{v_1 + v_2,\ v_1,\ -\frac{1}{2}v_3\}$.

2. Encuentre $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ sabiendo que rg $(A) = 1$, $(Nu(A^T))^\perp =$ gen $\{[1\ 1\ 1]^T\}$ y que si $b = [3\ 3\ 0]^T$, el vector de norma mínima que es solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$ es $x^+ = [1\ 1]^T$.

Consideramos definir A a partir de una DVS reducida. Sea $r = =$ rg(A).

Como $r = 1$, entonces $A = U_1 \sigma {V_1}^T$, DVS reducida de A, donde $\sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, $U_1 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ es ortonormal, $V_1 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ es ortonormal.

Como $x^+ = A^+ b$, se deduce que $V_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Como $(Nu(A^T))^\perp =$ gen $\{[1\ 1\ 1]^T\}$ entonces $U_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Fijando U_1 y V_1, falta despejar σ tal que $[1\ 1]^T = \frac{1}{\sigma} V_1 U_1^T$ para definir A.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1}$

- Halle, si existen $\max_{\|x\|=2} x^T A x$ y $\min_{x^T A x = 1} \|x\|^{\ 2}$, y los puntos donde se alcanzan estos extremos.

  Sabemos que $\lambda_{min}(A)\|x\|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{max}(A)\|x\|^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

  También que, en particular, los puntos donde se alcanzan los extremos, máximo o mínimo, son autovectores de A asociados a λ_{max} o a λ_{min}, respectivamente, que cumplan la condición dada.

  En el primer caso, $\max_{\|x\|=2} x^T A x = 8$ y se alcanza en $x = \alpha \begin{bmatrix} 2/\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

  Para el segundo caso, como $x^T A x \leq \lambda_{max}(A)\|x\|^2$ resulta $1 \leq 2\|x\|^2$, y de ahí $\|x\|^2 \geq 1/2, \forall x \in \mathbb{R}^3$.

  Luego, $\min_{x^T A x = 1} \|x\|^{\ 2} = 1/2$ y se alcanza en $x = \alpha \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1/2$.

- Para la matriz dada, resuelva el problema de valores iniciales $X' = AX$, $X(0) = [1\ -1\ \ 0]^T$.

  Sabemos que $X(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-4t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. De la condición inicial resultan $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica que cumple: $\mathbb{N}ul(A^3 - 1/27 I) = \text{gen}\,\{[1\ 2\ 1]^T,\ [1\ 1\ 0]^T\}$ y $\text{tr}(A) = 5/3$. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} A^n x = [-1\ 1\ -1]^T$-

De $\mathbb{N}ul(A^3 - 1/27I) = \text{gen}\,\{[1\ 2\ 1]^T,\ [1\ 1\ 0]^T\}$ se deduce que $\frac{1}{3}$ es autovalor por lo menos doble de A y de la condición sobre la traza, se concluye que $\frac{1}{3}$ es autovalor doble de A y 1 es autovalor simple de A.

Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de autovectores de A asociada a los autovalores $\frac{1}{3}$ doble y 1 simple.

Por ejemplo, $v_1 = [1\ 2\ 1]^T, v_2 = [1\ 1\ 0]^T, v_3 = [-1\ 1\ -1]^T$.

Para todo $x \in \mathbb{R}^3$ existen únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ con lo cual $A^n x = \alpha(\frac{1}{3})^n v_1 + \beta(\frac{1}{3})^n v_2 + \gamma v_3$.

Luego $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + v_3$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cumple lo pedido.

5. Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que:

- Si $b \in (\mathbb{C}ol(A))^\perp \Longrightarrow x^+ = 0_{\mathbb{R}^n}$.

  Consideremos una DVS reducida de A, $A = U_r D {V_r}^T$, la definición de la inversa de Moore-Pernrose, $A^+ = V_r D^{-1} U_r^T$, y del vector de norma mínima que resuelve el problema $Ax = b$ por cuadrados mínimos, $x^+ = A^+ b$.

  Si $b \in (\mathbb{C}ol(A))^\perp$ resulta ${U_r}^T b = 0$, recordando que las columnas de U_r forman una B.O.N. de $\mathbb{C}ol(A)$, y en consecuencia, $x^+ = 0$.

- Existe un único $x \in \mathbb{F}il(A)$ tal que $Ax = \text{proy}_{\mathbb{C}ol(A)} b$.

  Consideremos una DVS reducida de A, $A = U_r D {V_r}^T$, la definición de la inversa de Moore-Pernrose, $A^+ = V_r D^{-1} U_r^T$, y del vector de norma mínima que resuelve el problema $Ax = b$ por cuadrados mínimos, $x^+ = A^+ b$.

  Luego, como $x^+ = A^+ b = V_r (D^{-1} U_r^T b)$, resulta que x^+ es combinación lineal de las columnas de V_r. Entonces $x^+ \in \mathbb{F}il(A)$ dado que en las columnas de V_r hay una B.O.N. de $\mathbb{C}ol(A^T)$.
  Por otra parte $Ax^+ = AA^+ b = \text{proy}_{\mathbb{C}ol(A)} b$ recordando que AA^+ es la matriz de proyección sobre $\mathbb{C}ol(A)$.

  Si suponemos que hay otro $z \in \mathbb{F}il(A)$ que también cumple $Az = \text{proy}_{\mathbb{C}ol(A)} b$ resulta que $z - x^+ \in \mathbb{F}il(A)$ y también $z - x^+ \in Nu(A)$, con lo cual debe ser $z - x^+ = 0$.