EXAMEN INTEGRADOR

6 de agosto de 2014

- **Ejercicio 1.**

  a) Encuentre un intervalo real I en el cual las tres funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = |x|^3$ y $h(x) = 1$ sean linealmente independientes y un subintervalo de I en donde sean linealmente dependientes.

  En $I = [-a \ \ a]$ con $a > 0$, las tres funciones son linealmente independientes.

  En $J = [0 \ \ a]$ siendo J un subintervalo de I , las tres funciones son linealmente dependientes.

  b) Encuentre una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de segundo orden tal que la solución general sea $y(x) = Ae^x \cos(2x) + Be^x \operatorname{sen}(2x) + x^2 + 3x$, con A y B constantes reales.

Como la solución general es la suma de la solución general de la homogénea y una solución particular, identificando adecuadamente cada una de las soluciones se obtiene fácilmente una ecuación diferencial que responde al enunciado:

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 11x - 4$$

- **Ejercicio 2.**

Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

  a) Halle, si existe, $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ inversible tal que $B = PAP^{-1}$.

  La condición se cumple si y sólo si las dos matrices son semejantes. Como ambas matrices son diagonalizables, son semejantes a la misma matriz diagonal $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ o sea:

$$\begin{aligned} A &= P_1 \Lambda P_1^{-1} \\ B &= P_2 \Lambda P_2^{-1} \\ \Lambda = P_1^{-1} A P_1 &= P_2^{-1} B P_2 \end{aligned}$$

  con lo cual se obtiene matriz inversible $P = P_2 P_1^{-1}$.

  b) Encuentre una matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica que sea semejante a A y que cumpla la condición $Cx \in S$ para todo $x \in S = \text{gen}\{[2 \ -1]^T\}$.

La matriz real C es semejante a la matriz real A y por ser simétrica es diagonalizable ortogonalmente, por lo tanto $C = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Q^T$.

Dado que S es un espacio invariante de C, se puede suponer que es el autoespacio asociado al autovalor 1 con lo que se obtiene, teniendo en cuenta que Q es una matriz ortogonal: $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- **Ejercicio 3.**

Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática $Q(x) = \|x\|^2 + 2x_1x_2$. Halle, si existen, los puntos del conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = 4\}$ que se encuentran a distancia mínima o máxima del origen de coordenadas. Grafique la forma del conjunto C.

Se pide estudiar el conjunto de nivel 4 de la forma cuadrática, o sea hallar los puntos que satisfacen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 = 4$, siendo la matriz simétrica asociada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, cuya diagonalización es: $A = P\Lambda P^T$ con $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Las columnas de P son los ejes principales de la forma cuadrática.

Con el cambio de coordenadas $x = Py$ se obtiene el conjunto de nivel para la forma cuadrática sin términos cruzados $2y_1^2 + y_2^2 = 4$ que es un cilindro elíptico paralelo a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto los puntos más cercanos al origen de coordenadas son $x = \pm P \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $d_m = \sqrt{2}$.

No existen puntos a distancia máxima.

- **Ejercicio 4.**
  Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y' = BY$$

con $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la representación matricial en la base canónica de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que es la simetría respecto del plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

La matriz de la simetría respecto del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, en la base ortonormal $B' = \{v_1, v_2, v_3\} = \{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\}$, es $[T]_{B'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto la matriz de la transformación en la base canónica B es $[T]_B = P[T]_{B'}P^T$ siendo P la matriz de cambio de base de B' a B o sea $P = [v_1 \ \ v_2 \ \ v_3]$. Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones es : $y(t) = ae^t v_1 + be^t v_2 + ce^{-t} v_3$.

- **Ejercicio 5.**
  Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, dando una demostración en el primer caso o un contraejemplo en el segundo.

  a) Siendo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonal, y $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, si $A = QR$ entonces A^T y R^T tienen los mismos valores singulares no nulos.

     La afirmación es verdadera. Los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los autovalores de $A^T A$; los valores singulares de R son las raíces cuadradas de los autovalores de $R^T R$. Vale que $A^T A = R^T Q^T QR = R^T R$. Por lo tanto A y R tienen los mismos valores singulares. Por otra parte toda matriz tiene los mismos valores singulares no nulos que su matriz traspuesta, por lo tanto la afirmación es verdadera.

  b) Si todos los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son nulos, entonces los valores singulares de A también son nulos.

     La afirmación es falsa. Un ejemplo sencillo es la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, cuyos autovalores son todos nulos. Los autovalores de $A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, son 0 y 1, los valores singulares de A son 0 y 1 o sea no son todos nulos.