

FACULTAD DE INGENIERIA-UBA

ÁLGEBRA II. Segundo cuatrimestre 2013

EXAMEN INTEGRADOR - 5 de febrero de 2014 (Tercera fecha)

TEMA 1

RESOLUCIÓN

El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. La resolución aquí presentada es una de las tantas posibles.

Ejercicio 1:

Sea $L : V \rightarrow V$ definida por $L(f) = f'' + f$. Hallar todas las funciones $f \in V$ tales que $L(f) = g$, donde $g(t) = t^2 + 1$, en los siguientes casos:

a) $V = C^\infty(\mathbb{R})$

b) $V = P_2(\mathbb{R})$

Resolución:

a) Las soluciones de la ecuación homogénea $f''(t) + f(t) = 0$ pueden expresarse como $f_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$. Usando coeficientes indeterminados, proponemos que la forma de una solución particular de $f'' + f = g$ sea $f_p(t) = At^2 + Bt + C$. Igualando los coeficientes respectivos, obtenemos $f_p(t) = t^2 - 1$. En consecuencia, todas las soluciones de la ecuación diferencial propuesta en el espacio dado son $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$. O sea,

$$f(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + t^2 - 1.$$

b) En este caso, conociendo una base del espacio de trabajo, proponemos que las soluciones sean de la forma $f(t) = At^2 + Bt + C$. Reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos, en este caso, la única solución

$$f(t) = t^2 - 1.$$

Ejercicio 2:

Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica y definida negativa tal que $A^2 - I$ no sea inversible, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ sean autovectores de A , $\det(A) = -9$ y $\text{tr}(A) = -7$.

Resolución:

Como debe cumplirse que $A^2 - I$ no sea inversible, deducimos que 1 es autovalor de A^2 . Por lo tanto, 1 o -1 debe ser autovalor de A . Teniendo en cuenta que la matriz debe ser definida negativa, concluimos que -1 es autovalor de A . Por otra parte, conociendo que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A , sabemos que la matriz tiene un autovalor doble o triple.

-1 no puede ser autovalor triple ya que no cumple la condición del determinante ni la de la traza. Así sabemos que A tiene un autovalor doble y otro simple. Si suponemos que -1 es autovalor doble de A , $\det(A) = -9$ implica que el otro autovalor debe ser -9 , resultando imposible satisfacer $\text{tr}(A) = -7$. En consecuencia, -1 es autovalor simple de A y, de las condiciones $\det(A) = -9$ y $\text{tr}(A) = -7$, resulta que -3 es autovalor doble de A , de modo que la matriz simétrica que se obtendrá será definida negativa. A continuación calculamos los subespacios propios. Debe ser $S_{-3} = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ 2]^T\}$, y usando que S_{-1} debe ser ortogonal a S_{-3} , deducimos que $S_{-1} = \text{gen}\{[1 \ -1 \ 0]^T\}$. Finalmente, la única matriz que cumple las condiciones fijadas en el enunciado es

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3:

Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por $Q(x) = \|Px\|^2 - \alpha\|(I - P)x\|^2$, donde P es una matriz de proyección y $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinar todos los valores de α y el subespacio $\text{Col}(P)$ de modo que se verifiquen las dos condiciones siguientes:

i) $\text{Máx}\{Q(x) : \|x\| = 1\} = 3$

ii) el máximo se alcanza sólo en los puntos $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0\right]^T$ y $\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} \ \frac{-1}{\sqrt{2}} \ 0\right]^T$.

Resolución:

Como P es matriz de proyección, también lo es $I - P$, y se tiene $\|Px\|^2 = x^T P x$ y $\|(I - P)x\|^2 = x^T (I - P)x$. Luego $Q(x) = x^T [(1 + \alpha)P - \alpha I]x$. Y considerando el polinomio $q(t) = (1 + \alpha)t - \alpha$, es $Q(x) = x^T q(P)x$. De la condición i), 3 es autovalor (en realidad, el máximo autovalor) de $q(P)$ entonces existe λ autovalor de P tal que $q(\lambda) = 3$. Por ser P matriz de proyección, los posibles valores de λ son 0 y 1 . Pero $q(1) = (1 + \alpha) - \alpha = 1$ entonces $\lambda = 0$, y se tiene $q(0) = -\alpha = 3$. Luego $\alpha = -3$. De la condición ii) se deduce que $S_3(q(P)) = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 0]^T\}$, y por lo tanto $S_0(P) = \text{Nul}(P) = \text{gen}\{[1 \ 1 \ 0]^T\}$. Entonces, como P es simétrica, $\text{Col}(P) = (\text{Nul}(P))^\perp = \text{gen}\{[1 \ -1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1]^T\}$.

Ejercicio 4:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la reflexión respecto del plano $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}$ y sea $A = [T]_E$, E base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar todas las soluciones del sistema $X'(t) = (A^3 - I)X(t)$ que verifican $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\|^2 = 0$.

Resolución:

$S = \text{gen}\{[1 \ 0 \ -1]^T, [0 \ 1 \ 0]^T\}$ entonces $S^\perp = \text{gen}\{[1 \ 0 \ 1]^T\}$. Luego, considerando la base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ $B = \{v_1 = [1 \ 0 \ -1]^T, v_2 = [0 \ 1 \ 0]^T, v_3 = [1 \ 0 \ 1]^T\}$, se tiene $Av_1 = T(v_1) = v_1$, $Av_2 = T(v_2) = v_2$, $Av_3 = T(v_3) = -v_3$. Entonces A es diagonalizable y

$A = P D P^{-1}$ donde $P = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ahora $A^3 - I = P (D - I) P^{-1}$, ya que $D^3 = D$ (y por lo tanto, $A^3 = A$ y $T^3 = T$). Entonces, la solución general del sistema es $X(t) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 e^{-2t} v_3$, donde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Por ser v_1, v_2, v_3 ortogonales se tiene

$$\|X(t)\|^2 = c_1^2 \|v_1\|^2 + c_2^2 \|v_2\|^2 + c_3^2 e^{-4t} \|v_3\|^2 = 2 c_1^2 + c_2^2 + 2 c_3^2 e^{-4t}.$$
 Luego

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\|^2 = 0$ si y sólo si $c_1 = c_2 = 0$. Por lo tanto, las soluciones que verifican lo pedido son las de la forma $X(t) = c_3 e^{-2t} v_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5:

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, demostrando o dando un contraejemplo según el caso.

a) La solución por cuadrados mínimos de norma mínima de $Ax = b$ es un vector perteneciente a $\text{Fil}(A)$.

b) Si $m = n$, $AA^+ b$ es la proyección ortogonal de b sobre $\text{Fil}(A)$.

Resolución:

a) La proposición es verdadera. La solución por cuadrados mínimos de norma mínima de $Ax = b$, que llamaremos $\tilde{x}$, puede calcularse como $A^+ b$. Empleando una descomposición en valores singulares reducida de A , obtenemos $\tilde{x} = V_r (\Sigma_r)^{-1} (U_r)^T b$. Como vemos, $\tilde{x}$ es una combinación lineal de las columnas de V_r , que forman una base ortonormal de $\text{Fil}(A)$.

b) La proposición es falsa. Como $AA^+ b$ es la proyección ortogonal de b sobre $\text{Col}(A)$, basta considerar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para la cual $\text{Col}(A) \neq \text{Fil}(A)$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$ conveniente. Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.